

1. Wiederholung der Grundbegriffe

A. Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten

Die Ergebnisse bzw. Elementarereignisse eines Zufallsexperimentes bilden in ihrer Gesamtheit den **Ergebnisraum** Ω . Die Teilmengen von Ω bezeichnet man als **Ereignisse**. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E wird aus den Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörigen Ergebnisse nach folgendem Satz berechnet.

Satz II.1 Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Ein Zufallsexperiment besitze den Ergebnisraum Ω .

$E = \{e_1, \dots, e_k\}$ sein ein beliebiges Ereignis. Dann gilt:

Wahrscheinlichkeit von E : $P(E) = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_k)$

Sonderfälle: $P(E) = 0$, falls $E = \emptyset$ das unmögliche Ereignis ist.
 $P(E) = 1$, falls $E = \Omega$ das sichere Ereignis ist.

Beispiel: Der einfache Würfelwurf

Beim einmaligen Würfelwurf mit einem fairen Würfel gilt $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jedes der sechs gleichwertigen Ergebnisse hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Das Ereignis E : „Es kommt eine Primzahl“ kann durch $E = \{2, 3, 5\}$ beschrieben werden. Das Ereignis E hat also die Wahrscheinlichkeit $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Beispiel: Der doppelte Würfelwurf

Beim zweifachen Würfelwurf kann jedes Ergebnis als Zahlenpaar erfasst werden. Es gibt also 36 gleichwertige Zahlenpaare. Daher kann $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$ als geeigneter Ergebnisraum verwendet werden. Das Ereignis E : „Es kommt ein Pasch“ kann durch die Teilmenge $E = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ erfasst werden. Seine Wahrscheinlichkeit beträgt $P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 16,67\%$.

Bei vielen Problemstellungen ist es vorteilhaft, mit dem Begriff des Gegenereignisses zu arbeiten. Ist Ω der Ergebnisraum eines Zufallsexperimentes, und stellt die Teilmenge E von Ω ein beliebiges Ereignis dar, so bezeichnet man das Ereignis $\bar{E} = \Omega \setminus E$ als **Gegenereignis** von E .

Satz II.2: Die Gegenwahrscheinlichkeit

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses E und des zugehörigen Gegenereignisses $\bar{E} = \Omega \setminus E$ beträgt 1.

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

Übung 1

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim doppelten Würfelwurf eine Augensumme von zehn oder weniger zu erzielen?

B. Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Bei **Laplace-Experimenten** liegt als Wahrscheinlichkeitsverteilung eine sogenannte **Gleichverteilung** zugrunde, die jedem Ergebnis (Elementarereignis) exakt die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet.

Besteht also bei einem Laplace-Experiment der Ergebnisraum Ω aus n Ergebnissen, so besitzt jedes einzelne Ergebnis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$. Für ein zusammengesetztes Ereignis $E = \{e_1, \dots, e_k\}$ gilt dann $P(E) = k \cdot \frac{1}{n}$.  069-1



Satz II.3: Formel von Laplace

Bei einem Laplace-Experiment sei Ω der Ergebnisraum. Ω besitze n Elemente. $E = \{e_1, \dots, e_k\}$ sei ein beliebiges Ereignis. Dann gilt für dessen Wahrscheinlichkeit:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{k}{n},$$

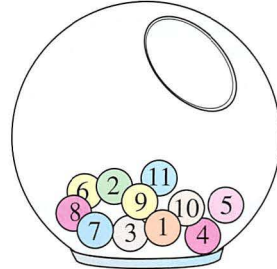
$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}.$$

Beispiel: Aus einer Urne mit elf Kugeln, die von 1 bis 11 numeriert sind, wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt eine Primzahl?

Lösung.

Alle Ergebnisse sind gleichwahrscheinlich. Für das Ereignis E : „Primzahl“, d. h. $E = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, sind fünf der elf möglichen Ergebnisse günstig.

► Daher gilt $P(E) = \frac{5}{11} \approx 0,45 = 45\%$.



Übung 2

Eine Urne enthält 6 blaue, 4 rote und 3 gelbe Kugeln. Eine Kugel wird gezogen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man eine rote, bzw. eine blaue bzw. eine gelbe Kugel?
- Durch Hinzufügen weiterer gelber Kugeln soll die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer gelben Kugel auf $\frac{1}{3}$ erhöht werden. Wie viele gelbe Kugeln müssen hinzugefügt werden?
- Bei einem Spiel zieht man gegen einen Einsatz von 2 € eine Kugel aus der Urne. Ist sie gelb, erhält man 5 €. Ist sie rot, erhält man 1 €. Ist sie blau, erhält man nichts. Lohnt das Spiel?
- Aus der Urne werden nun nacheinander mit Zurücklegen zwei Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter wenigstens eine Kugel befindet, die entweder rot oder blau ist?

C. Mehrstufige Zufallsversuche und Baumdiagramme

Ein **mehrstufiger Zufallsversuch** kann oft ausgesprochen gut durch ein **Baumdiagramm** erfasst und veranschaulicht werden. Die Wahrscheinlichkeiten beliebiger Ereignisse lassen sich mit Hilfe der beiden Pfadregeln berechnen.

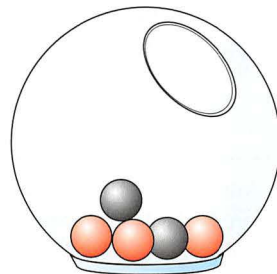
Satz II.4: Die Pfadregeln für Baumdiagramme

Mehrstufige Zufallsversuche können durch Baumdiagramme dargestellt werden. Dabei stellt jeder Pfad ein Ergebnis e des Zufallsversuchs dar. Ein Ereignis E kann durch die zugehörigen Pfade erfasst werden. Es gelten folgende Regeln:

- 1. Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses e ist gleich dem Produkt der Zweigwahrscheinlichkeiten des zugehörigen Pfades.
- 2. Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade.

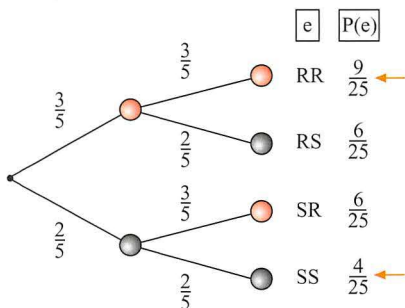
Beispiel: In einer Urne liegen drei rote und zwei schwarze Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E : „beide Kugeln sind gleichfarbig“

- a) beim Ziehen mit Zurücklegen,
- b) beim Ziehen ohne Zurücklegen.



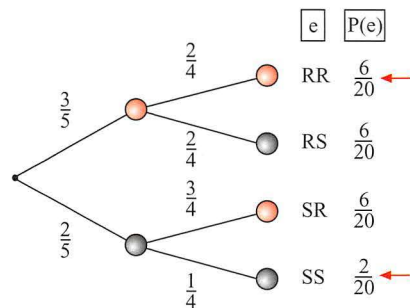
Lösung:

Ziehen mit Zurücklegen



$$P(E) = P(RR) + P(SS) = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25} = 0,52$$

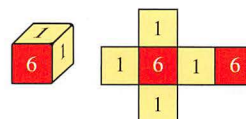
Ziehen ohne Zurücklegen



$$P(E) = P(RR) + P(SS) = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = 0,40$$

Übung 3

Der Würfel mit dem rechts abgebildeten Netz wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine gerade Augensumme?



Übungen

4. Würfelwurf

Ein Würfel mit dem abgebildeten Netz wird dreimal geworfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

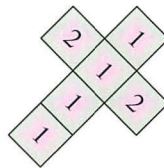
A: Es fallen mindestens zwei Einsen.

B: Die Augensumme beträgt 5.

C: Die Augensumme ist ungerade.

b) Der dreifache Würfelwurf wird für ein Spiel genutzt. Ein Durchgang kostet 1 € Einsatz. Man gewinnt, wenn keine zwei gleichen Zahlen hintereinander fallen. Im Gewinnfall werden 4 € ausgezahlt. Ist das Spiel für den Spieler lukrativ?

c) Wie müsste man die Auszahlung verändern, um das Spiel aus b) fair zu gestalten?



5. Notengebung

Der Lehrer würfelt die mündlichen Noten folgendermaßen aus:

Er wirft dreimal einen Spielwürfel. Die niedrigste Augenzahl verwendet er als Note.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Note Eins?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Note schlechter als Vier ausfällt?



6. Urnenspiel

Kurt und Jakob ziehen aus einer Urne mit zwei weißen und drei roten Kugeln abwechselnd ohne Zurücklegen. Gewonnen hat derjenige, der zuerst eine weiße Kugel gezogen hat. Kurt macht den ersten Zug. Wie groß sind die Gewinnchancen der beiden Spieler?

7. Elfmeterschießen

Sven und Björn üben das Elfmeterschießen, wobei Björn mit 60 % Wahrscheinlichkeit ein Tor erzielt und Sven nur mit 40 %. Sie vereinbaren einen Wettkampf. Die Elfmeter werden abwechselnd geschossen, wobei Sven beginnen darf und jeder insgesamt höchstens zweimal schießt. Es gewinnt derjenige, welcher den ersten Treffer erzielt.

a) Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht das Spiel unentschieden aus?

c) Würde Fabian anstelle von Sven spielen, so hätten beide Spieler die gleiche Gewinnchance. Welche Trefferwahrscheinlichkeit p hat Fabian?

8. Spielstrategie

In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, 3 weiße, 2 rote und 5 schwarze. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln gleicher Farbe zu ziehen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in drei Durchgängen mindestens einmal zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen?

c) Es wird folgendes Spiel angeboten: Der Spieler zieht ohne Zurücklegen. Er muss entscheiden, ob er eine Kugel oder zwei Kugeln ziehen möchte. Für eine weiße Kugel erhält er einen Punkt, für eine rote Kugel dagegen fünf Punkte. Zieht er jedoch eine schwarze Kugel, ist das Spiel sofort beendet und die Punktzahl wird auf null zurückgesetzt. Welche Strategie sollte er verwenden?

A: Er sollte eine Kugel ziehen.

B: Er sollte zwei Kugeln ziehen.

Bei mehrstufigen Zufallsversuchen wird die Ergebnismenge oft so umfangreich, dass ein Baumdiagramm viel zu groß würde. Dann verwendet man kombinatorische Abzählverfahren und sog. Urnenmodelle, um die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Im Folgenden sind die wichtigsten Abzählprinzipien und Urnenmodelle dargestellt.

D. Die Produktregel

Satz II.5 Die Produktregel

Betrachtet wird ein k -stufiger Zufallsversuch, dessen Stufen unabhängig voneinander sind. In der ersten Stufe des Versuchs seien n_1 verschiedene Ergebnisse möglich, in der zweiten Stufe seien es n_2 Ergebnisse, ... und in der k -ten Stufe seien es n_k Ergebnisse.

Dann hat der gesamte Zufallsversuch insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ Ergebnisse.

Beispiel: Automodelle

Ein Autohersteller bietet für ein Modell fünf unterschiedliche Motorstärken (60, 65, 70, 90 und 110 kW), sechs verschiedene Farben (Rot, Blau, Weiß, Gelb, Schwarz, Metallicgrau) sowie 3 verschiedene Innenausstattungen an (Standard, Luxus, Sport). Unter wie vielen Modellvarianten kann der Käufer auswählen?

- Lösung: Es sind insgesamt $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ Variationen möglich.

Übung 9

In einer Großstadt besteht das Kfz-Kennzeichen aus zwei Buchstaben, gefolgt von zwei Ziffern, gefolgt von einem weiteren Buchstaben. Wie viele Kennzeichen sind in der Stadt möglich?

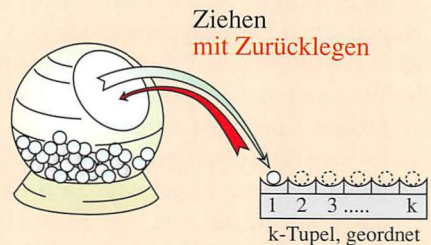


E. Geordnete Stichproben

Geordnete Stichproben Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander k Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen. Die Ergebnisse werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert. Dann gilt für die Anzahl N der möglichen Anordnungen (k -Tupel) die Formel

$$N = n^k.$$



Beispiel: 13-Wette (Fußballtoto)

Beim Fußballtoto muss man den Ausgang von 13 festgelegten Spielen vorhersagen. Dabei bedeutet 1 einen Sieg der Heimmannschaft, 0 ein Unentschieden und 2 einen Sieg der Gastmannschaft. Wie viele verschiedene Tippreihen sind möglich?

Lösung:

Man modelliert die Wette durch eine Urne, welche drei Kugeln mit den Nummern 0, 1 und 2 enthält. Man zieht eine Kugel, notiert das Ergebnis und legt die Kugel zurück. Das ganze wiederholt man 13-mal. Die Reihenfolge der Ergebnisse ist dabei wichtig.

Nach obiger Formel gibt es $N = 3^{13}$ verschiedene Anordnungen (13-Tupel), d.h. 1 594 323 Tippreihen.

**TOTO 13er-Wette**

	1			2			3			4			5			6			
1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	
2	1	0	2	2	1	0	2	2	1	0	2	2	1	0	2	2	1	0	2
3	1	0	2	3	1	0	2	3	1	0	2	3	1	0	2	3	1	0	2
4	1	0	2	4	1	0	2	4	1	0	2	4	1	0	2	4	1	0	2
5	1	0	2	5	1	0	2	5	1	0	2	5	1	0	2	5	1	0	2
6	1	0	2	6	1	0	2	6	1	0	2	6	1	0	2	6	1	0	2
7	1	0	2	7	1	0	2	7	1	0	2	7	1	0	2	7	1	0	2
8	1	0	2	8	1	0	2	8	1	0	2	8	1	0	2	8	1	0	2
9	1	0	2	9	1	0	2	9	1	0	2	9	1	0	2	9	1	0	2
10	1	0	2	10	1	0	2	10	1	0	2	10	1	0	2	10	1	0	2
11	1	0	2	11	1	0	2	11	1	0	2	11	1	0	2	11	1	0	2
12	1	0	2	12	1	0	2	12	1	0	2	12	1	0	2	12	1	0	2
13	1	0	2	13	1	0	2	13	1	0	2	13	1	0	2	13	1	0	2

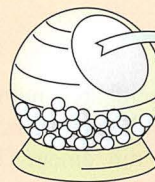
Im obigen Beispiel wurde das Modell der geordneten Stichprobe beim Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne angewandt. Im folgenden Beispiel wird ebenfalls eine geordnete Stichprobe entnommen, aber diesmal beim Ziehen ohne Zurücklegen.

Geordnete Stichproben Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander k Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen. Die Ergebnisse werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert. Dann gilt für die Anzahl N der möglichen Anordnungen (k -Tupel) die Formel

$$N = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1).$$

Wichtiger Sonderfall: $k = n$. Aus der Urne wird so lange gezogen, bis sie leer ist. Es gibt dann $N = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (n -Fakultät) mögliche Anordnungen.



Ziehen
ohne Zurücklegen

1 2 3 k
k-Tupel, geordnet

Beispiel: Pferderennen

Bei einem Pferderennen mit 12 Pferden gibt ein völlig ahnungsloser Zuschauer einen Tipp ab für die Plätze 1, 2 und 3.

Wie groß sind seine Chancen, die richtige Einlaufreihenfolge vorherzusagen?



Lösung:

Man zieht aus einer Urne mit 12 Kugeln, die den Pferden entsprechen, dreimal eine Kugel ohne Zurücklegen. Es gibt $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ geordnete Stichproben. Die Chance des Zuschauers ist also kleiner als 1 Promille.

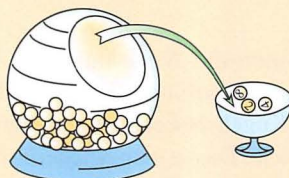
F. Ungeordnete Stichproben

Zieht man mehrfach ohne Zurücklegen und achtet bei den Ergebnissen nicht auf die Reihenfolge, so kommt das folgende besonders wichtige Modell zum Einsatz.

Ungeordnete Stichproben Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Wird aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln eine ungeordnete Teilmenge von k Kugeln entnommen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten hierfür durch den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gegeben:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$



Taschenrechnerfolge: $n \boxed{nCr} k \boxed{=}$

Beispiel: Zahlenlotto 6 aus 49

Wie viele verschiedene Tipps müsste man abgeben, um beim Zahlenlotto „6 aus 49“ mit Sicherheit „6 Richtige“ zu erzielen?

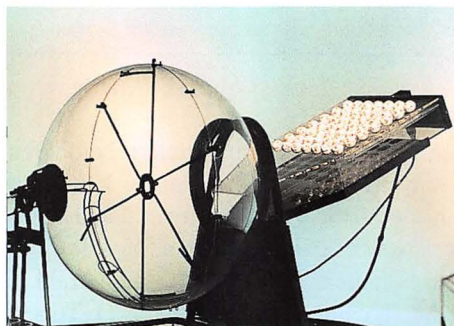
Lösung:

Aus der Menge von 49 unterscheidbaren, nummerierten Kugeln werden 6 Kugel entnommen, und zwar ohne Zurücklegen oder mit einem Griff, was im Endergebnis das Gleiche ist. Man wählt also aus einer 49-elementigen Menge eine 6-elementige Teilmenge aus. Hierfür gibt es folgende Anzahl von Möglichkeiten.

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 43} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$$

Man kann diese Zahl auch mit dem Taschenrechner bestimmen, der eine Taste zur Berechnung

des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ besitzt. Man gibt hierfür ein: $49 \boxed{nCr} 6$.



Übung 10

- Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten $\binom{5}{3}$, $\binom{7}{6}$, $\binom{4}{4}$, $\binom{5}{0}$, $\binom{8}{3}$, $\binom{9}{2}$, $\binom{22}{11}$, $\binom{100}{20}$.
- In einer Stadt gibt es 5000 Telefonanschlüsse. Wie viele Gesprächspaarungen gibt es?
- Aus einer Klasse mit 25 Schülern sollen drei Schüler abgeordnet werden. Wie viele Gruppenzusammenstellungen sind möglich?
- Aus einem Skatspiel werden vier Karten gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um vier Asse?
- Aus den 26 Buchstaben des Alphabets werden 5 zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Konsonant dabei ist?

G. Das Lottomodell

Die Bestimmung von Tippwahrscheinlichkeiten beim Lottospiel kann als Modell für zahlreiche weitere Zufallsprozesse verwendet werden. Wir betrachten eine Musteraufgabe.

► **Beispiel:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Lotto „6 aus 49“ mit einem abgegebenen Tipp genau vier Richtige erzielt?

Lösung:

Insgesamt sind $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Tipps möglich. Um festzustellen, wie viele dieser Tipps günstig für das Ereignis E: „Vier Richtige“ sind, verwenden wir folgende Grundidee: Wir denken uns den Inhalt der Lottourne in zwei Gruppen von Zahlen unterteilt: in eine Gruppe von 6 roten Gewinnkugeln und eine Gruppe von 43 weißen Nieten.

Ein für E günstiger Tipp besteht aus vier roten und zwei weißen Kugeln.

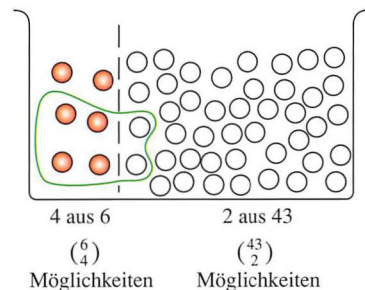
Es gibt $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten, aus der Gruppe der 6 roten Kugeln 4 Kugeln auszuwählen.

Analog gibt es $\binom{43}{2} = 903$ Möglichkeiten, aus der Gruppe der 43 weißen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen.

Folglich gibt es $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$ Möglichkeiten, vier rote Kugeln mit zwei weißen Kugeln zu einem für E günstigen Tipp zu kombinieren.

Dividieren wir diese Zahl durch die Anzahl aller Tipps, d. h. durch $\binom{49}{6}$, so erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

► Sie beträgt ca. 0,001.



⇓

$$\begin{aligned}
 P(\text{„4 Richtige“}) &= \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \\
 &= \frac{15 \cdot 903}{13\,983\,816} \approx 0,001
 \end{aligned}$$

Übung 11

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für genau drei Richtige im Lotto 6 aus 49.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man mindestens fünf Richtige?

Übung 12

Eine Zehnerpackung Glühlampen enthält vier Lampen mit verminderter Leistung. Jemand kauft fünf Lampen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter

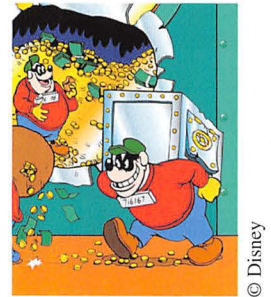
- genau zwei defekte Lampen,
- mindestens zwei defekte Lampen,
- höchstens zwei defekte Lampen?

Übungen

13. Geheimzahl

Ein Banktresor ist durch eine vierstellige Geheimzahl geschützt. Als Ziffern sind jeweils 0 bis 9 erlaubt.

- Wie wahrscheinlich sind folgende Ereignisse?
 - Alle Ziffern der Geheimzahl sind ungerade.
 - Die Geheimzahl enthält nur die Ziffern 8 und 9.
 - Die Geheimzahl ist spiegelsymmetrisch (z. B. 2772).
- Tim sagt: Mit über 50 % Wahrscheinlichkeit hat die Geheimzahl mindestens zwei gleiche Ziffern. Hat er recht?
- Wie wahrscheinlich ist das folgende Ereignis:
 - Das Quadrat der Geheimzahl ist eine siebenstellige Zahl, die mit zwei Einsen beginnt und auf eins endet?



© Disney

14. Tanz der Vampire

Sechs Vampire tanzen in den Morgen. Im Saal stehen fünf Tische. Beim ersten Sonnenstrahl flüchten sie unter die Tische. Derjenige Vampir, der keinen Tisch findet, scheidet aus. In der nächsten Nacht wird das Spiel mit fünf Vampiren und vier Tischen fortgesetzt, danach mit vier Vampiren usw. Wie wahrscheinlich sind die folgenden Ereignisse?

- Gwyn bleibt in der fünften Nacht als Letzte übrig.
- Avidan scheidet als Erste aus, Destiny als Zweite.
- Die drei männlichen Vampire scheiden zuerst aus.



15. Kinobesuch

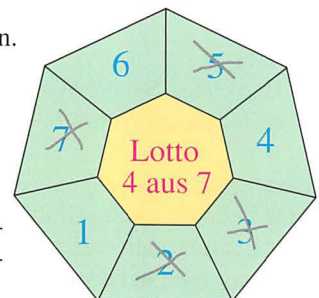
Hans, Angelika, Johann, Lisa, Kurt, Hanna, Evelyn und Karsten wollen ins Kino gehen. Es gibt aber nur noch vier Eintrittskarten, die ausgelost werden.

- Wie wahrscheinlich sind die folgenden Ereignisse?
 - Es werden zwei Jungen und zwei Mädchen ausgewählt.
 - Es werden vier Jungen ausgewählt.
 - Kurt und Lisa werden ausgewählt.
- Das Kino hat 10 Reihen zu jeweils 10 Plätzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen Hans und Angelika (die je eine Karte erhalten haben) direkt nebeneinander?

16. Lottospiel

Auf dem Sommerfest wird das Lottospiel „4 aus 7“ angeboten. Man kreuzt vier der sieben Felder des Lottoscheins an. Später werden vier Gewinnzahlen gezogen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse?
 - Man erzielt den Hauptgewinn, d. h. vier Richtige.
 - Man erzielt mindestens zwei Richtige.
- Ein Tip kostet 2 €. Man erhält für zwei Richtige eine Auszahlung von 0,50 €, für drei Richtige 1 € und für vier Richtige 20 €. Lohnt das Spiel für den Spieler?



2. Bernoulliketten

A. Die Formel von Bernoulli

Ein Zufallsversuch wird als **Bernoulli-Versuch** bezeichnet, wenn es nur zwei Ausgänge T und $\bar{T}$ gibt. T wird als Treffer (Erfolg) und als $\bar{T}$ Niete (Mißerfolg) bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von T wird als Trefferwahrscheinlichkeit bezeichnet. Beispiele sind das Werfen einer Münze (Kopf, Zahl), das Werfen eines Würfels (Sechs, keine Sechs) oder das Überprüfen eines Bauteils (defekt, nicht defekt).

Wiederholt man einen Bernoulli-Versuch n -mal in exakt gleicher Weise, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p .

Beispiel: Bernoulli-Kette der Länge $n = 4$

Ein Würfel wird viermal geworfen. X sei die Anzahl der dabei geworfenen Sechsen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X = 2$, d. h. für genau zwei Sechsen.

Lösung:

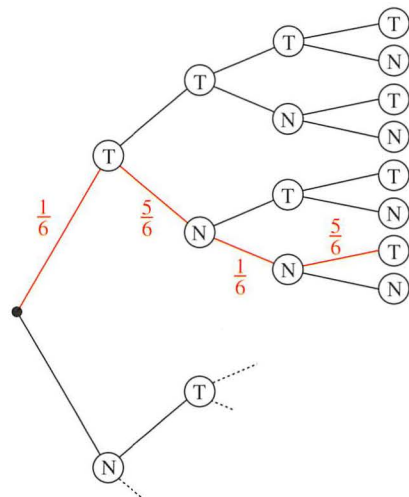
Es ist eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 4$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$. Das Diagramm veranschaulicht die Kette als mehrstufigen Zufallsversuch.

Die Wahrscheinlichkeit eines Weges mit genau zwei Treffern T und zwei Nieten N beträgt nach der Produktregel $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Es gibt $\binom{4}{2}$ solcher Pfade, da man $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten hat, die beiden Treffer auf die vier Plätze eines Pfades zu verteilen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lautet:

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,1157$$



Verallgemeinert man die Rechnung aus dem obigen Beispiel, so erhält man folgende allgemeingültige Formel zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten.

Satz II.6: Die Formel von Bernoulli

Liegt eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p vor, so wird die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer mit $B(n; p; k)$ bezeichnet.

Sie kann mit der rechts dargestellten Formel berechnet werden.

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Durch mehrfache Anwendungen der Formel von Bernoulli lassen sich auch kumulative Wahrscheinlichkeiten und Intervallwahrscheinlichkeiten bestimmen.

Beispiel: Multiple-Choice-Test

Ein Test enthält vier Fragen mit jeweils drei Antwortmöglichkeiten. Welche Chance hat ein ganz und gar ahnungsloser Testkandidat, mehr als die Hälfte der Fragen richtig zu beantworten?

Lösung:

Der Test kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 4$ betrachtet werden. Das korrekte Beantworten einer Frage zählt als Treffer. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist $p = \frac{1}{3}$. X sei die Anzahl der Treffer. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 3)$ gesucht.

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81} \approx 0,0988$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81} \approx 0,0123$$

Addiert man diese Einzelwahrscheinlichkeiten, so erhält man für die gesuchte Ratewahrscheinlichkeit $P(X \geq 3) \approx 0,111 = 11,1\%$.

Im folgenden Beispiel wird bestimmt, wie oft man einen Bernoulli-Versuch mindestens wiederholen muss, um wenigstens einen Treffer mit einer vorgegebenen Mindestwahrscheinlichkeit zu erzielen (Man bezeichnet diese beliebte Aufgabenstellung auch als mindestens-mindestens-mindestens Problem).

Beispiel: Länge einer Bernoulli-Kette

Wie oft muss man einen Würfel mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Sechs zu erzielen?

Lösung:

n sei die gesuchte Länge der Bernoulli-Kette, d. h. die Anzahl der Würfelwürfe. X sei die Anzahl der dabei erzielten Sechsen.

Laut Voraussetzung soll $P(X \geq 1) \geq 0,90$ gelten. Aus dieser Ansatzgleichung lässt sich nach nebenstehender Rechnung die gesuchte Mindestanzahl n von Würfeln bestimmen, d. h. die Länge der Bernoulli-Kette.

Das Resultat ist $n \geq 12,63$, d. h. $n = 13$.

Man benötigt also mindestens 13 Würfe, wenn man eine 90 %-Chance auf mindestens eine Sechs haben möchte.



Einstellungstest für den auswärtigen Dienst

Kreuzen Sie das Zutreffende an. Nur jeweils eine Antwort ist richtig.

1. Welche der folgenden chinesischen Städte liegt am weitesten westlich?	XINYANG ☐
	XIANGFAN ☐
	XIANGTAN ☐
2. An welchem Fluß liegt die chinesische Stadt DAYU?	OU ☐
	MIN ☐
	GAN ☐
3. Welches der folgenden chinesischen Schriftzeichen lautet "chün"?	君 ☐
	友 ☐
	非 ☐
4. Wie hieß der chinesische Verkehrsminister im Jahre 1971?	TAO TSCHU ☐
	YANG TSCHIE ☐
	YUNG LO ☐

Lösung: 078-1

$$\text{Ansatz: } P(X \geq 1) \geq 0,90$$

$$1 - P(X = 0) \geq 0,90$$

$$P(X = 0) \leq 0,10$$

$$B\left(n; \frac{1}{6}; 0\right) \leq 0,10$$

$$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,10$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,10$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,10)$$

$$n \geq 12,63$$

Übungen

1. Bestimmung einer Punktwahrscheinlichkeit $P(X = k)$

43 % aller Deutschen haben die Blutgruppe A. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 8 zufällig ausgewählten Personen genau 4 die Blutgruppe A haben?

2. Bestimmung einer linksseitigen Intervallwahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$

Der Marktanteil von Smartphones liegt im Jahr 2011 bei 23 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 6 zufällig ausgewählten Personen höchstens 2 ein Smartphone besitzen?

3. Bestimmung einer rechtsseitigen Intervallwahrscheinlichkeit $P(X \geq k)$

Der Anteil der Haushalte mit Internet-Anschluss ist auf 73 % angewachsen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig ausgewählten Haushalten mindestens 8 einen Internet-Anschluss haben?

4. Bestimmung einer Intervallwahrscheinlichkeit: $P(k \leq X \leq m)$

70 % aller Schäferhunde werden 10 Jahre oder älter. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 12 Hunden eines Züchters mindestens 7 und höchstens 10 Schäferhunde dieses Alter erreichen?

5. Anwendung der Formel für das Gegenereignis: $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$

30 % der Deutschen sind in einem Verein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 12 Personen mindestens 3 in einem Verein sind?

6. Bestimmung einer Mindestanzahl von Versuchen

Wie oft muss ein Würfel mindestens geworfen werden, damit mit mindestens 98 % Sicherheit mindestens einmal die Sechs fällt?

7. Nach Angaben der Post erreichen 90 % aller Inlandbriefe den Empfänger am nächsten Tag.

Johanna verschickt acht Einladungen zu ihrem Geburtstag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) sind alle Briefe am nächsten Tag zugestellt?

b) sind mindestens sechs Briefe am nächsten Tag zugestellt?

8. Die Mitglieder der deutschen Tischtennis-Nationalmannschaft gewinnen gegen chinesische Spitzenspieler 15 % der Spiele.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt von 6 Nationalspielern genau einer sein Spiel?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen die Deutschen von 10 Einzelspielen mehr als 2?



Timo Boll 2010: Vorhandstudie