

II. Stochastik

1. Wiederholung der Grundbegriffe

1. $P(E) = 1 - P(\bar{E})$, $\bar{E} = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$, $P(E) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12} \approx 0,92$
2. a) $P(r) = \frac{4}{13} \approx 0,31$, $P(b) = \frac{6}{13} \approx 0,46$, $P(g) = \frac{3}{13} \approx 0,23$
 b) $P(g) = \frac{3+k}{13+k} = \frac{1}{3}$, $9+3k = 13+k$, $k = 2$
 c) $5 \cdot \frac{3}{13} + \frac{4}{13} = \frac{19}{13} < 2$, das Spiel lohnt sich nicht.
 d) $P(\text{mind. 1r oder 1b}) = 1 - P(\text{keine r und keine b}) = 1 - \left(\frac{3}{13}\right)^2 = \frac{160}{169} \approx 0,95$
3. Ein Baumdiagramm liefert drei Pfade zur Summe 8 und einen Pfad zur Summe 18.
 $P(e) = 3 \cdot \frac{4}{27} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27} \approx 0,48$
4. a) $P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{27} \approx 0,74$
 $P(B) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27} \approx 0,22$
 $P(C) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{14}{27} \approx 0,52$
 b) $P(G) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{27}$, $\frac{6}{27} \cdot 4 = \frac{24}{27} < 1$, das Spiel lohnt sich nicht.
 c) $\frac{6}{27} \cdot x = 1$, $x = \frac{9}{2} = 4,5$ Für 4,5 Euro Auszahlung wäre das Spiel fair.
5. a) Das zugehörige Baumdiagramm hat 216 Pfade. Wir zählen die Pfade, die keine 1 enthalten.
 Das sind $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ Stück. Es gibt also 91 Pfade mit mindestens einer 1.
 Daher gilt: $P(1) = \frac{91}{216} \approx 0,42$
 b) Zum Ereignis Note schlechter als 4 gehören die Pfade, die nur die 5 und die 6 enthalten.
 Das sind 8 Pfade, also $P(> 4) = \frac{8}{216} = \frac{1}{27} \approx 0,037$.

6. Kurt gewinnt:

$$P(K) = P(w) + P(r, r, w) \\ = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12+6}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Jakob gewinnt:

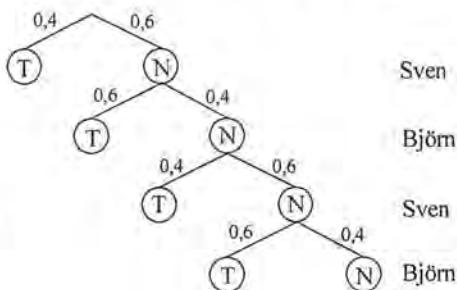
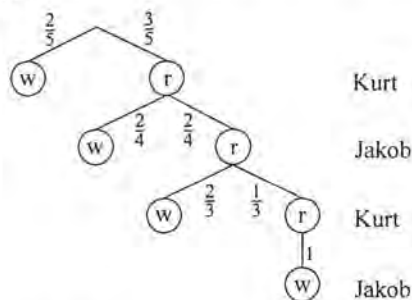
$$P(J) = P(r, w) + P(r, r, r, w) \\ = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{9+3}{30} = \frac{2}{5} = 0,4$$

7. a) Sven gewinnt:

$$P(S) = P(T) + P(N, N, T) \\ = 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,496$$

Björn gewinnt:

$$P(B) = P(N, T) + P(N, N, N, T) \\ = 0.6 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.4464$$



71

- b) Das Spiel geht unentschieden aus, wenn keiner gewinnt:

$$P(\text{unentsch.}) = 1 - 0,496 - 0,4464 = 0,0576$$

- c) Fabian gewinnt:

$$P(F) = P(T) + P(N, N, T)$$

$$= p + (1-p) \cdot 0,4 \cdot p$$

$$= -0,4p^2 + 1,4p$$

Björn gewinnt:

$$P(B) = (1-p) \cdot 0,6 + (1-p) \cdot 0,4 \cdot (1-p) \cdot 0,6$$

$$= 0,24p^2 - 1,08p + 0,84$$

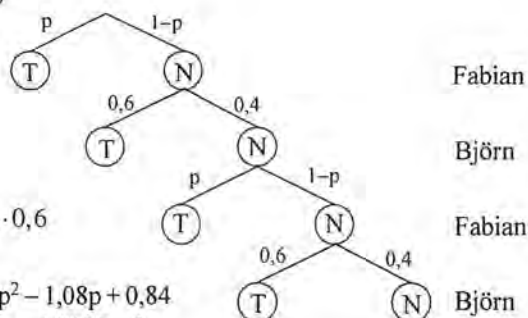
$$\text{Es gilt } P(F) = P(B): -0,4p^2 + 1,4p = 0,24p^2 - 1,08p + 0,84$$

$$0,64p^2 - 2,48p + 0,84 = 0 \text{ bzw. } p^2 - 3,875p + 1,3125 = 0$$

$$p = 1,9375 - \sqrt{1,9375^2 - 1,3125} = 0,375 \text{ das ist Fabian Trefferwahrscheinlichkeit.}$$

Die positive Wurzel führt auf ein $p > 1$, bleibt also unberücksichtigt.

$$\text{Probe: } P(F) = 0,46875, P(B) = 0,46875$$



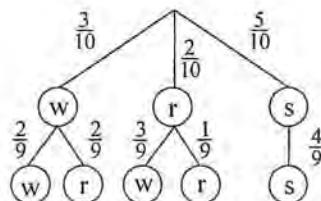
8. a) Das nebenstehende verkürzte Baumdiagramm

$$\text{liefert: } P(2\text{gleiche}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{14}{45} \approx 0,31$$

- b)
- $P(\text{mind. einmal}) = 1 - P(\text{nie}) = 1 - 0,69^3 \approx 0,67$

- c) Punkteergebnis für Strategie A:

$$\frac{2}{10} \cdot 5 + \frac{3}{10} \cdot 1 = \frac{13}{10} = 1,3$$



$$\text{Punkteergebnis für Strategie B: } \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot 2 + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot 6 + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10 + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot 6 = \frac{104}{90} \approx 1,16$$

Strategie A liefert im Mittel 0,14 Punkte mehr als Strategie B, er sollte A verwenden.

72

9. Es gibt 26 Buchstaben und 10 Ziffern. Daher sind
- $26^3 \cdot 10^2 = 1757600$
- Autokennzeichen möglich.

74

10. a)
- $\binom{5}{3} = 10$
- ,
- $\binom{7}{6} = 7$
- ,
- $\binom{4}{4} = 1$
- ,
- $\binom{5}{0} = 1$
- ,
- $\binom{8}{3} = 56$
- ,
- $\binom{9}{2} = 36$
- ,
- $\binom{22}{11} = 705432$

$$\binom{100}{20} \approx 5,359833703 \cdot 10^{20}$$

- b)
- $\binom{5000}{2} = 12497500$

- c)
- $\binom{25}{3} = 2300$

- d) Es gibt
- $\binom{32}{4} = 35960$
- Möglichkeiten, 4 Karten auszuwählen. Da nur eine dieser Möglichkeiten 4 Asse liefert, gilt:
- $P(\text{"4 Asse"}) = \frac{1}{35960} \approx 0,000028$
- .

- e) Da es genau eine 5-Auswahl ohne Konsonanten gibt (da 5 Vokale), gilt:

$$P(\text{"kein Konsonant"}) = P(\text{"nur Vokale"}) = \frac{1}{\binom{26}{5}} = \frac{1}{65780} \approx 0,000015.$$

75

11. a)
- $P(3R) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{20 \cdot 12341}{13983816} \approx 0,0177$

- b)
- $P(\text{min. 5R}) = P(5R) + P(6R) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{13983816} + \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0}}{13983816} = \frac{258}{13983816} + \frac{1}{13983816} \approx 0,000019$

$$12. a) P(\text{genau 2 def. Lampen}) = \frac{\binom{6}{3} \binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{120}{252} \approx 0,4762$$

75

$$b) P(\text{min. 2 def. Lampen}) = \frac{\binom{6}{3} \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \binom{4}{3} + \binom{6}{1} \binom{4}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{186}{252} \approx 0,7381$$

$$c) P(\text{höch.. 2 def. Lampen}) = \frac{\binom{6}{5} \binom{4}{0} + \binom{6}{4} \binom{4}{1} + \binom{6}{3} \binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{186}{252} \approx 0,7381$$

$$13. a) P(A) = \frac{5^4}{10^4} = 0,5^4 = 0,0625, \quad P(B) = \frac{2^4}{10^4} = 0,2^4 = 0,0016, \quad P(C) = \frac{10^2}{10^4} = 0,01$$

76

$$b) P(\text{min. 2 gl.}) = 1 - P(\text{alle versch.}) = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0,496 < 0,5$$

Er hat Unrecht.

$$c) \text{ Das Quadrat der Geheimzahl ist } 11\dots 1.$$

Die kleinste solche Zahl ist 1100001. Wegen $\sqrt{1100001} \approx 1048,8\dots$ ist 1049 die kleinste Geheimzahl, die den Anforderungen genügt.

Da nur Geheimzahlen mit den Endstellen 1 und 9 beim Quadrieren als Endstelle eine 1 erzeugen, probiert man von 1049 beginnend aus, wann die Grenze 1199991 überschritten wird. Resultat: 1049, 1051, 1059, 1061, 1069, 1071, 1079, 1081, 1089, 1091 sind 10 mögliche Geheimzahlen. Damit gilt: $P(D) = \frac{10}{10^4} = 0,001$

$$14. A: \text{ Jeder der 6 Vampire hat die gleiche Chance als Letzter übrig zu bleiben. Daher } P(A) = \frac{1}{6}.$$

Oder Gwyns Chance, die erste Runde zu überstehen ist $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$ ist es für die 2. Runde, usw.

$$\text{Daher } P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$B: \text{ Es gibt 6 Kandidaten für das erste Ausscheiden, 5 für das zweite, also 30 Kombinationen aber nur eine Möglichkeit für B, daher } P(B) = \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{30} \approx 0,033.$$

$$C: \text{ Es gibt } \binom{6}{3} = 20 \text{ Möglichkeiten aus 6 Vampiren 3 auszuwählen, aber nur eine männliche Dreierauswahl, daher } P(C) = \frac{1}{20}. \text{ Oder analog zu A: } P(C) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$15. a) \text{ Die Aufgabe entspricht dem Lottomodell mit 4 Jungen und 4 Mädchen:}$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{36}{70} \approx 0,51, \quad P(B) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{70} \approx 0,014, \quad P(C) = \frac{\binom{2}{2} \binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{15}{70} \approx 0,214$$

$$b) \text{ In jeder Reihe gibt es 9 Zwillingssitze, insgesamt also 90, daher:}$$

$$P(H, A) = \frac{90}{\binom{100}{2}} = \frac{90 \cdot 2}{100 \cdot 99} = \frac{1}{55} \approx 0,018$$

$$16. a) P(A) = \frac{1}{\binom{7}{4}} = \frac{1}{35} \approx 0,029, \quad P(B) = 1 - P(0R) - P(1R) = 1 - 0 - \frac{\binom{3}{3} \binom{4}{1}}{\binom{7}{4}} = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35} \approx 0,886$$

$$b) P(2R) = \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{2}}{\binom{7}{4}} = \frac{18}{35}, \quad P(3R) = \frac{\binom{4}{3} \binom{3}{1}}{\binom{7}{4}} = \frac{12}{35}, \quad P(4R) = \frac{1}{35}$$

Wegen $\frac{18}{35} \cdot 0,5 + \frac{12}{35} \cdot 1 + \frac{1}{35} \cdot 20 = \frac{41}{35} < 2$ lohnt sich das Spiel nicht.

2. Bernoulliketten

79

1. $n = 8$; $k = 4$; $p = 0,43$ (Blutgruppe A)

$$P(X=4) = \binom{8}{4} \cdot 0,43^4 \cdot 0,57^4 \approx 25,26\%$$

2. $n = 6$; $k \leq 2$; $p = 0,23$

$$P(X \leq 2) = 0,77^6 + 6 \cdot 0,23 \cdot 0,77^5 + 15 \cdot 0,23^2 \cdot 0,77^4 \approx 86,09\%$$

3. $n = 10$; $k \geq 8$; $p = 0,73$ (Internet Anschluss)

$$P(X \geq 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,73^8 \cdot 0,27^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,73^9 \cdot 0,27^1 + 0,73^{10} \approx 46,65\%$$

4. $n = 12$; $k = 7, 8, 9, 10$; $p = 0,7$

$$P(7 \leq X \leq 10) = \binom{12}{7} \cdot 0,7^7 \cdot 0,3^5 + \binom{12}{8} \cdot 0,7^8 \cdot 0,3^4 + \binom{12}{9} \cdot 0,7^9 \cdot 0,3^3 + \binom{12}{10} \cdot 0,7^{10} \cdot 0,3^2 \approx 79,71\%$$

5. $n = 12$; $k > 2$; $p = 0,3$ (Verein)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) \\ &= 1 - (0,7^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0,3 \cdot 0,7^{11} + \binom{12}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^{10}) \approx 74,72\% \end{aligned}$$

6. $p = \frac{1}{6}$; $P(\text{keine 6 bei } n \text{ Würfeln}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$P(\text{mindestens eine 6 bei } n \text{ Würfeln}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,98 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,02, \quad n \geq \frac{\ln 0,02}{\ln \frac{5}{6}} \approx 21,46$$

Der Würfel muss mindestens 22-mal geworfen werden.

7. E: "Brief am nächsten Tag zugestellt", $P(E) = 0,9$, $n = 8$

a) $k = 8$; $B(8; 0,9; 8) = 0,9^8 = 0,4305$

b) $k = 6, 7, 8$

$$B(8; 0,9; 6) + B(8; 0,9; 7) + B(8; 0,9; 8) = 28 \cdot 0,9^6 \cdot 0,1^2 + 8 \cdot 0,9^7 \cdot 0,1 + 0,9^8 = 0,9619$$

8. a) $n = 6$; $k = 1$; $p = 0,15$

$$P(X=1) = \binom{6}{1} \cdot 0,15 \cdot 0,85^5 \approx 39,93\%$$

b) $n = 10$; $k > 2$; $p = 0,15$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0,85^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,15 \cdot 0,85^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^8 \approx 17,98\%$$

81

9. $n = 200$, $p = 0,3$ (bekommt kein Geld)

a) Der Erwartungswert beträgt $\mu = 0,3 \cdot 200 = 60$

b) $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = \sqrt{42} \approx 6,48$

c) 2σ -Regel: $\mu - 2\sigma \approx 47$, $\mu + 2\sigma \approx 73$

Mit 95% Wahrscheinlichkeit werden mindestens 47 aber höchstens 73 Personen kein Geld bekommen.