

V. Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Vierfeldertafeln

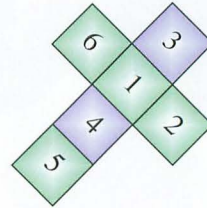


1. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

A. Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine relative Größe. Sie kann durch Informationen beeinflusst werden. Wir betrachten als Beispiel einen Würfelwurf.

Beispiel: Ein Würfel mit dem abgebildeten Netz wurde verdeckt geworfen. Betrachtet wird die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 5. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit? Wie hoch würde jemand die Wahrscheinlichkeit taxieren, der von einem direkten Beobachter die Information erhielt, dass eine grüne Fläche oben lag.



Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl Fünf beträgt im Prinzip $\frac{1}{6}$, da es sechs gleichwahrscheinliche Ergebnisse 1, 2, 3, 4, 5, 6 gibt.

Hat man jedoch die Vorinformation, dass eine grüne Fläche gefallen ist, so kommen nur noch die Ergebnisse 1, 2, 5 und 6 in Frage, und man wird unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl Fünf auf $\frac{1}{4}$ taxieren.

Man spricht in diesem Zusammenhang von einer **bedingten Wahrscheinlichkeit**.

Man verwendet hierfür die symbolische Schreibweise $P_B(A)$.

(gelesen: Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B).

Bedingte Wahrscheinlichkeiten können durch zweistufige Baumdiagramme veranschaulicht werden. Rechts ist der Zusammenhang dargestellt. In der zweiten Stufe des Baumdiagramms treten vier bedingte Wahrscheinlichkeiten auf.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten beim Würfelwurf

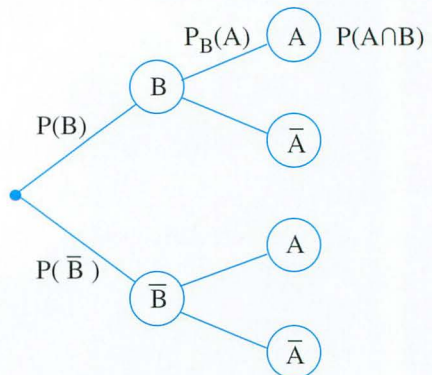
A: „Es fällt eine Fünf“

B: „Es fällt eine grüne Fläche“

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P_B(A) = \frac{1}{4}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm



Beispielsweise gibt es für das Eintreten von A zwei bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$P_B(A)$: Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, unter der Bedingung, dass B eingetreten ist.

$P_{\bar{B}}(A)$: Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, unter der Bedingung, dass $\bar{B}$ eingetreten ist.

Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit kann durch eine Formel definiert werden:

Definition V.1:
Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

Satz V.1: Multiplikationssatz

Für zwei Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$ gilt die Formel

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Zur Lösung von Aufgaben wird meistens der Multiplikationssatz herangezogen, weil er die Schnittwahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ auf die einfacher zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ und $P_B(A)$ zurückführt.

Beispiel: Aus einem Kartenspiel werden zwei Karten nacheinander gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- beide Karten Buben sind,
- beide Karten keine Buben sind?

Lösung:

Gesucht sind die Schnittwahrscheinlichkeiten $P(B_1 \cap B_2)$ und $P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)$, wobei B_1 und B_2 rechts aufgeführt sind.

4 der 32 Karten sind Buben. Daher gilt $P(B_1) = \frac{4}{32}$ und $P(\bar{B}_1) = \frac{28}{32}$.

Auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{31}$ und $P_{\bar{B}_1}(B_2) = \frac{4}{31}$ sind leicht zu bestimmen. Hieraus ergeben sich auch noch die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{B_1}(\bar{B}_2) = \frac{28}{31}$ und $P_{\bar{B}_1}(\bar{B}_2) = \frac{27}{31}$ als Gegenwahrscheinlichkeit.

Nun wird der Multiplikationssatz angewendet.

Alternativ kann man die Aufgabe mithilfe des abgebildeten Baumdiagramms lösen.



B_1 : „Die 1. Karte ist ein Bube“

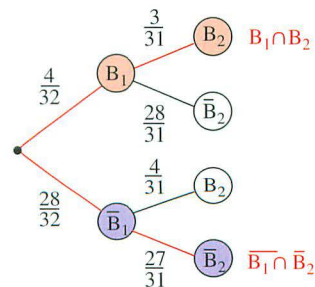
B_2 : „Die 2. Karte ist ein Bube“

Anwendung des Multiplikationssatzes:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \approx 0,012 = 1,2\%$$

$$P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) = P(\bar{B}_1) \cdot P_{\bar{B}_1}(\bar{B}_2) = \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \approx 0,762 = 76,2\%$$

Alternativ: Lösung mit Baumdiagramm:



Übung 1

Otto hat fünf Schlüssel in seiner Hosentasche. Er zieht blindlings einen nach dem anderen, um in seine Wohnung zu gelangen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er den richtigen Schlüssel beim zweiten Griff (beim dritten Griff) zieht?

Übungen

2. 40 % der Mitarbeiter einer Firma sind Raucher, 30 % der Raucher treiben Sport. Unter den Nichtrauchern beträgt der Anteil der Sportler 45 %.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger Mitarbeiter
 - a) besonders gesund lebt, d. h. Sport treibt und Nichtraucher ist,
 - b) sich besonders unvernünftig verhält, d. h. keinen Sport treibt und Raucher ist?
3. Eine Urne enthält 5 rote und 4 schwarze Kugeln. Es werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,
 - a) dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste Kugel bereits rot war,
 - b) dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste Kugel schwarz war,
 - c) dass beide gezogenen Kugeln rot sind?
4. Aus einem Skatblatt wird eine Karte gezogen. Es ist eine Bildkarte (Bube, Dame, König, Ass).
 - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es die Herzdame?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es weder Ass noch König?
5. Bei einer Lottoziehung aus 49 Kugeln trägt die erste gezogene Kugel eine gerade Zahl.
 - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie durch 5 teilbar?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält sie keine 1?
6. Eine Schachtel enthält 15 Pralinen, davon 3 mit Marzipanfüllung. Peter nimmt zwei Pralinen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt er zwei Marzipanfüllungen?
7. Eine Packung mit 50 elektrischen Sicherungen wird vom Käufer einem Test unterzogen. Er entnimmt der Packung zufällig nacheinander ohne Zurücklegen zwei Sicherungen und prüft sie auf ihre Funktionsfähigkeit. Sind beide einwandfrei, so wird die Packung angenommen, ansonsten wird sie zurückgewiesen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Packung angenommen, obwohl sie 10 defekte Sicherungen enthält?
8. Otto hat fünf Schlüssel in seiner Hosentasche. Er zieht blindlings einen nach dem anderen, um in seine Wohnung zu gelangen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er den richtigen Schlüssel beim zweiten Griff (beim dritten Griff) zieht?
9. In einem Betrieb werden Keramikteile hergestellt, von denen 80 % in den Handel gelangen. Diese werden zu 65 % als I. und zu 35 % als II. Wahl angeboten.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird hergestellte Ware als I. Wahl angeboten?

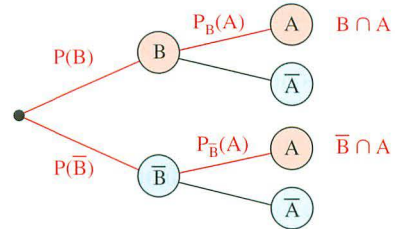
B. Die totale Wahrscheinlichkeit

Die erste Pfadregel für Baumdiagramme ist äquivalent zum Multiplikationssatz für Schnittereignisse. In entsprechender Weise gibt es ein Äquivalent zur zweiten Pfadregel für Baumdiagramme, nämlich die folgende Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

A und B seien beliebige Ereignisse mit $P(B) \neq 0$, $P(\bar{B}) \neq 0$. Dann gilt:

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A).$$



Der Satz führt die „totale Wahrscheinlichkeit“ $P(A)$ des Ereignisses A auf die „bedingten Wahrscheinlichkeiten“ $P_B(A)$ und $P_{\bar{B}}(A)$ des Ereignisses A zurück.

Beispiel: Die Belegschaft eines großen Betriebes besteht zu 41 % aus Angestellten und zu 59 % aus Arbeitern. Die gesamte Belegschaft soll per Abstimmung entscheiden, ob für einige Abteilungen die gleitende Arbeitszeit eingeführt werden soll. Interne Umfragen ergaben, dass 80 % der Angestellten, aber nur 25 % der Arbeiter für die gleitende Arbeitszeit sind. Wie wird die Abstimmung wohl ausgehen?

Lösung:

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig ausgewähltes Belegschaftsmitglied für die gleitende Arbeitszeit entscheidet. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich mithilfe der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit nach nebenstehender Rechnung bestimmen. Da sie weniger als 50 % beträgt, wird die Abstimmung vermutlich zuungunsten der gleitenden Arbeitszeit ausgehen.

Bezeichnungen:

G: „Entscheidung für gleitende Arbeitszeit“

R: „Die abstimmende Person ist Arbeiter“

$\bar{R}$: „Die abstimmende Person ist Angestellter“

Rechnung:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(R) \cdot P_R(G) + P(\bar{R}) \cdot P_{\bar{R}}(G) \\ &= 0,59 \cdot 0,25 + 0,41 \cdot 0,80 \\ &= 0,4755 \end{aligned}$$

Übung 10

In einem Entwicklungsland leiden ca. 0,1 % der Menschen an einer bestimmten Infektionskrankheit. Ein Test zeigt die Krankheit bei 98 % der Kranken korrekt an, während er bei 5 % der Gesunden irrtümlich die Krankheit anzeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Test bei einer zufällig ausgewählten Person ein positives Resultat? (Lösen Sie mithilfe eines Baumdiagramms und des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit.)

Übung 11

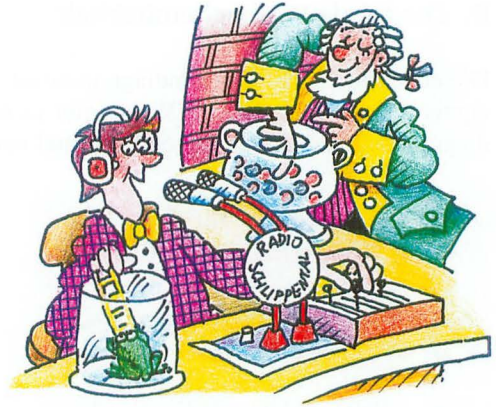
Ein Kandidat für den Posten des Schulsprechers wird von 63 % der 528 weiblichen Schüler favorisiert. Von den Jungen wollen 41 % für ihn stimmen. Insgesamt sind 1200 Schüler auf der Schule. Mit welchem Stimmanteil kann er rechnen?

Beispiel: Im Schlippental ist das Wetter an 70 von 100 Tagen schön und an 30 von 100 Tagen schlecht.

Der königliche Hofmeteorologe simuliert das Wetter daher mithilfe einer Urne, die 7 rote und 3 schwarze Kugeln enthält. Zieht er eine rote Kugel, so prognostiziert er für den folgenden Tag schönes Wetter, andernfalls schlechtes Wetter.

Radio Schlippental hat einen einheimischen Breitmaulfrosch unter Vertrag, der schöne Tage mit 90 % und schlechte Tage mit 60 % Sicherheit vorhersagen kann.

Wessen Prognosen sind treffsicherer?



Lösung:

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

S: „Es tritt schönes Wetter ein“

M: „Die Prognose des Meteorologen ist richtig“

F: „Die Froschprognose ist richtig“

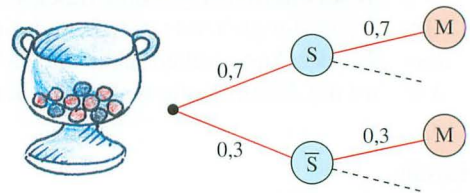
Nun bestimmen wir die totale Wahrscheinlichkeit der Ereignisse M und F, deren bedingte Wahrscheinlichkeiten $P_S(M) = 0,7$, $P_{\bar{S}}(M) = 0,3$, $P_S(F) = 0,9$ und $P_{\bar{S}}(F) = 0,6$ wir der Aufgabenstellung entnehmen können.

Mithilfe der abgebildeten Baumdiagramme bzw. mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$P(M) = 58 \% \text{ und } P(F) = 81 \%.$$

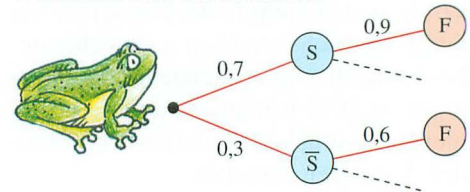
Der Frosch ist also besser.

Treffsicherheit des Meteorologen:



$$P(M) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,3 = 0,58 = 58 \%$$

Treffsicherheit des Frosches:



$$P(F) = 0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,81 = 81 \%$$

Übung 12

In unserem obigen Beispiel tritt nun ein Optimist hinzu, der stets schönes Wetter prognostiziert. Wie groß ist die Treffersicherheit des Optimisten?

Übung 13

Die vom beliebten Showmaster moderierte Fernsehsendung wird von sogenannten Vielsehern (Fernsehzuschauer, die täglich mehr als 3 Stunden fernsehen, 18 % der Zuschauer) zu 75 % gesehen. In der Gruppe der restlichen Fernsehteilnehmer beträgt die Einschaltquote 40 %. Wie groß ist die Einschaltquote?

Übungen

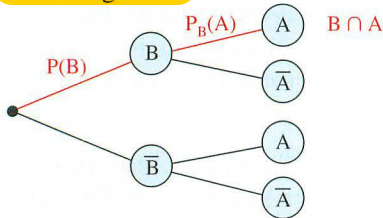
14. Die Urne U_1 enthält 10 rote und 5 grüne Kugeln, die Urne U_2 enthält 3 rote und 7 grüne Kugeln. Jemand wählt blindlings (d.h. mit verbundenen Augen) eine der beiden Urnen aus und zieht eine Kugel.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese rot?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese grün?
15. 3% der Bevölkerung sind zuckerkrank. Ein Test zeigt bei 96% der Kranken die Krankheit an. Bei den Gesunden ergibt der Test bei 6% irrtümlich ein positives Ergebnis. Welcher Prozentsatz der Durchschnittsbevölkerung wird bei einem Massenscreening ein positives Testergebnis erhalten?
16. Auf zwei Urnen werden 5 weiße und 5 rote Kugeln beliebig verteilt. Anschließend wird eine Urne ausgewählt und aus ihr eine Kugel gezogen. Bei welcher Verteilung ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel besonders groß (klein)?
17. Ein Hersteller von elektrischen Widerständen produziert diese auf drei Maschinen M_1 , M_2 , und M_3 . 20% der Widerstände werden auf M_1 , 30% auf M_2 und 50% auf M_3 produziert. Die Ausschussraten betragen 4% für M_1 , 3% für M_2 und 2% für M_3 . Welche Ausschussrate ergibt sich für die Gesamtproduktion?
18. Formulieren Sie den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit für den Fall einer Zerlegung des Ergebnisraumes Ω in 3 paarweise disjunkte (d.h. je zwei Mengen haben eine leere Schnittmenge) Teilmengen B_1 , B_2 , B_3 .
19. Der Physiklehrer heißt bei allen Schülern Katastrophen-Willi, denn in der Mechanik misslingen 15%, in der Optik 26% und in der Elektrostatik 85% seiner Versuche. Wie groß ist der Anteil der misslungenen Experimente, wenn Katastrophen-Willi in Mechanik eine Klasse, in Optik 2 und in Elektrostatik 3 Klassen unterrichtet und pro Unterrichtsstunde genau ein Experiment durchführt?
20. In drei Urnen sind jeweils 50 Kugeln. In Urne i ($1 \leq i \leq 3$) befinden sich $10i+5$ rote Kugeln. Es wird eine Urne gewählt und aus dieser werden zwei Kugeln mit einem Griff gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kugeln rot?
21. Vier Kontrolleure führen zu gleichen Teilen die Endkontrolle durch. Dabei werden von ihnen 90%, 85%, 95%, 50% des Ausschusses entdeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein defektes Teil erkannt und aussortiert?
22. Doc Holliday und Billy The Cid tragen ein Pistolenduell aus. Doc Holliday trifft mit der Wahrscheinlichkeit 0,9, sein Gegner mit der Wahrscheinlichkeit 0,95. Es wird abwechselnd geschossen, wobei Doc Holiday den ersten Schuss hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
- Doc Holliday siegt mit seinem zweiten Schuss.
 - Billy The Cid siegt mit seinem zweiten Schuss.
 - Doc Holliday siegt spätestens nach insgesamt fünf Schüssen.
 - Billy The Cid siegt irgendwann im Laufe des Duells.

C. Der Satz von Bayes

150-1

Wir entwickeln im Folgenden eine Formel, die einen Gleichungszusammenhang zwischen den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_B(A)$ und $P_A(B)$ herstellt. Man spricht daher auch vom sogenannten Umkehrproblem für bedingte Wahrscheinlichkeiten. Die Formel lässt sich leicht gewinnen, wenn man den zu den Ereignissen B und A gehörigen zweistufigen Wahrscheinlichkeitsbaum mit dem dazu „inversen“ Baumdiagramm vergleicht.

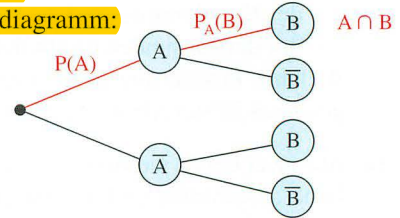
Baumdiagramm:



$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Inverses

Baumdiagramm:



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Die Ereignisse $B \cap A$ und $A \cap B$ sind identisch, also sind dies auch ihre Wahrscheinlichkeiten: $P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B)$. Lösen wir diese Gleichung nach $P_B(A)$ auf, so ergibt sich die sogenannte Formel von Bayes*:

Der Satz von Bayes

Sind A und B Ereignisse mit $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$, so gelten folgende Formeln:

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$$

Die zweite Formel folgt aus der ersten durch Anwendung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit auf den Nennerterm $P(B)$.

Beispiel: Die Aussagekraft medizinisch-diagnostischer Tests

Eine von zehntausend Personen leidet an einer bestimmten Stoffwechselerkrankung. Für diese Erkrankung gibt es einen einfachen diagnostischen Test, der bei Kranken mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% und bei Gesunden mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% die korrekte Diagnose liefert. Eine Person, die sich dem Test unterzieht, erhält ein positives, d. h. für das Vorliegen der Erkrankung sprechendes Testergebnis. Wie wahrscheinlich ist es, dass dieser Patient tatsächlich erkrankt ist?

Lösung:

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_T(K)$, dass jemand tatsächlich erkrankt ist, wenn der Test ein positives

Resultat ergibt.

Bezeichnungen:

K: „Die getestete Person ist krank“

T: „Der Test zeigt ein positives Resultat“

* Thomas Bayes (1702–1761), engl. Geistlicher und Mathematiker

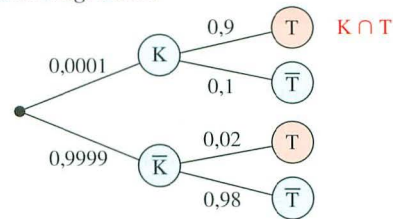
Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten:
 $P(K) = 0,0001$, $P_K(T) = 0,9$, $P_{\bar{K}}(\bar{T}) = 0,98$.
 Als Gegenwahrscheinlichkeiten ergeben sich hieraus die Wahrscheinlichkeiten:
 $P(\bar{K}) = 0,9999$, $P_K(\bar{T}) = 0,1$,
 $P_{\bar{K}}(T) = 0,02$.

1. Möglichkeit:

Wir lösen die Aufgabe zunächst ohne Verwendung der Formeln nur mithilfe des zu den Ereignissen K und T gehörigen zweistufigen Baumdiagramms sowie des dazu inversen Baumdiagramms.*

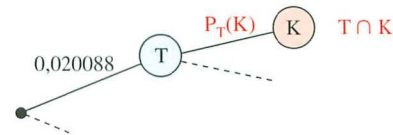
Nach nebenstehend aufgeführter Rechnung erhalten wir dann $P_T(K) \approx 0,45\%$.

Baumdiagramm:



$$P(T) = 0,0001 \cdot 0,9 + 0,9999 \cdot 0,02 = 0,020088$$

Inverses Baumdiagramm:



$$\begin{aligned} P(T) \cdot P_T(K) &= P(T \cap K) = P(K \cap T) \\ 0,020088 \cdot P_T(K) &= 0,0001 \cdot 0,9 \\ P_T(K) &= 0,00448 \approx 0,45\% \end{aligned}$$

Totale Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(K) \cdot P_K(T) + P(\bar{K}) \cdot P_{\bar{K}}(T) \\ &= 0,0001 \cdot 0,9 + 0,9999 \cdot 0,02 \\ &= 0,020088 \end{aligned}$$

Anwendung der Formel von Bayes:

$$\begin{aligned} P_T(K) &= \frac{P(K) \cdot P_K(T)}{P(T)} = \frac{0,0001 \cdot 0,90}{0,020088} \\ &= 0,00448 \approx 0,45\% \end{aligned}$$

2. Möglichkeit:

Die Anwendung der Formeln liefert ebenfalls das gesuchte Ergebnis. Hierzu berechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit $P(T)$ mithilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Nun können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_T(K)$ mithilfe des Satzes von Bayes bestimmen.

Wir erhalten als Resultat $P_T(K) \approx 0,45\%$.

Die getestete Person muss sich also trotz des positiven Testergebnisses keine übertriebenen Sorgen machen. Die aus Sicherheitsgründen folgenden Nachuntersuchungen werden mit großer Wahrscheinlichkeit zum Ergebnis haben, dass die Testperson nicht an der Stoffwechselkrankheit leidet. Bei einer seltenen Krankheit ist die Wahrscheinlichkeit einer Fehldiagnose oft hoch.

Übung 23

- Der im obigen Beispiel beschriebene diagnostische Test fällt bei einem bestimmten Patienten negativ aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Krankheit dennoch vor?
- Im obigen Beispiel wurde die Diagnostik einer relativ seltenen Erkrankung untersucht. Betrachten Sie nun den Fall, dass eine relativ häufig auftretende Krankheit vorliegt, die bei einer von zwanzig Personen auftritt. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten liefert der Test bei sonst gleichen Daten falsche Ergebnisse? Bestimmen Sie $P_{\bar{T}}(K)$ und $P_T(\bar{K})$.

* Bemerkung: Die Bestimmung von totalen Wahrscheinlichkeiten und die Lösung von Bayes-Aufgaben erfordern in der Regel keine Formeln. Man kommt mit Baumdiagrammen und inversen Baumdiagrammen aus.

Übungen

24. Mit einem Lügendetektor werden des Diebstahls verdächtige Personen überprüft. Der Detektor schlägt durch ein rotes Lichtsignal an oder entwarnt durch ein grünes Signal. Er ist zu 90% zuverlässig, wenn die überprüfte Person tatsächlich schuldig ist, und er ist zu 99% zuverlässig, wenn die Person unschuldig ist. Aus einer Gruppe von Personen, von denen 5% einen Diebstahl begangen haben, wird eine Person überprüft. Der Detektor gibt ein rotes Signal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person dennoch unschuldig?

a) Lösen Sie die Aufgabe mithilfe von Baumdiagrammen.

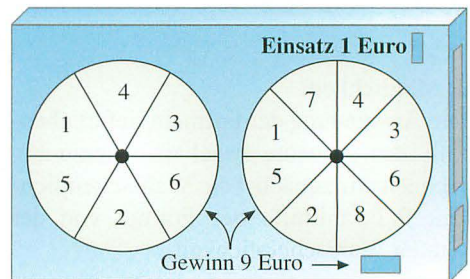
b) Lösen Sie die Aufgabe durch Anwendung der Formeln.

25. Eine noble Villa ist durch eine Alarmanlage gesichert. Diese gibt im Falle eines Einbruchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% Alarm. Jedoch muss mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% ein Fehlarmer einkalkuliert werden, wenn kein Einbruch stattfindet. Die Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch liegt pro Nacht bei etwa 1:1000. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Falle eines Alarms tatsächlich ein Einbruch begangen wird?

26. Der abgebildete Glücksspielautomat schüttet einen Gewinn aus, wenn die Augensumme größer als 11 ist.

a) Wie groß ist die Gewinnchance eines Spielers?

b) Ein Spieler hat gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigte das erste Rad „6“?



27. Urne U_1 enthält 3 weiße und 5 schwarze Kugeln. Urne U_2 enthält 7 weiße und 4 schwarze Kugeln. Jemand wählt blindlings eine Urne und zieht gleichzeitig drei Kugeln. Alle Kugeln sind schwarz (weiß). Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammen sie aus U_2 ?

28. Über eine bestimmte Stoffwechselkrankheit ist bekannt, dass sie ca. eine von 150 Personen befällt. Ein recht zuverlässiger Test fällt bei tatsächlich erkrankten Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von 97% positiv aus. Bei Personen, die nicht krank sind, fällt er mit 95% Wahrscheinlichkeit negativ aus.

a) Jemand lässt sich testen und erhält ein positives Resultat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er tatsächlich erkrankt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem negativen Ergebnis tatsächlich nicht erkrankt ist?

c) Welche Ergebnisse würde man bei a) erhalten, wenn die Krankheit nur eine von 1500 Personen befällt?

29. In Egons Hosentasche befinden sich 10 Münzen, 9 echte mit Kopf (K) und Zahl (Z) und eine falsche, die beidseitig Zahl aufweist. Egon zieht zufällig eine dieser Münzen und wirft sie mehrfach. Es erscheint die Folge ZZZK. Bestimmen Sie für jede der Teilfolgen, also für Z, ZZ, ZZZ und ZZZK die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine echte Münze handelt.

2. Vierfeldertafeln

In der statistischen Praxis werden häufig sog. Vierfeldertafeln anstelle von Baumdiagrammen eingesetzt. Sie sind übersichtlicher in der Darstellung und einfach in der Handhabung.

Eine Vierfeldertafel ist eine zusammenfassende Darstellung zweier Merkmale mit jeweils zwei Ausprägungen ($A, \bar{A}, B, \bar{B}$).

In die Tafel werden in der Regel **die absoluten Häufigkeiten** oder **die Wahrscheinlichkeiten** der vier möglichen Kombinationsereignisse $A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$, eingetragen.

In die fünf Randfelder werden die Zeilen- und Spaltensummen eingetragen, d. h. $|A|, |\bar{A}|, |B|, |\bar{B}|$, und die Gesamtsumme.

Mit Hilfe dieser Eintragungen können gesuchte Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, z. B. die Randwahrscheinlichkeit $P(A)$ oder $P_B(A)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit für A , wenn B bereits eingetreten ist.

	B	$\bar{B}$	
A	$ A \cap B $	$ A \cap \bar{B} $	$ A $
$\bar{A}$	$ \bar{A} \cap B $	$ \bar{A} \cap \bar{B} $	$ \bar{A} $
	$ B $	$ \bar{B} $	Summe

Berechnung einer Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{\text{Summe}}$$

Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Beispiel: Oktoberfest

Im Festzelt feiern 140 Touristen, die eine Lederhose tragen, sowie 60 Touristen in normaler Kleidung. Hinzu kommen 10 Münchner mit Lederhose und 40 Münchner in Alltagskleidung.

Durch die Hitze wird eine Person ohnmächtig. Sie trägt eine Lederhose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Tourist?



Lösung:

Wir tragen die vier bekannten absoluten Häufigkeiten in die Vierfeldertafel ein (rote Felder).

Dann bilden wir die Zeilensummen, die Spaltensummen und schließlich die Gesamtsumme (gelbe Felder).

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_L(T)$. Diese erhalten wir, indem wir die Anzahl der Personen im Schnittereignis $T \cap L$ durch die Anzahl aller Lederhosensträger teilen.

Resultat: Die ohnmächtige Person ist zu 93,33 % ein Tourist.

Bezeichnungen:

T: Tourist

L: Lederhose

$\bar{T}$: Münchner

$\bar{L}$: keine Lederhose

Vierfeldertafel:

	L	$\bar{L}$	
T	140	60	200
$\bar{T}$	10	40	50
	150	100	250

Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P_L(T)$:

$$P_L(T) = \frac{|T \cap L|}{|L|} = \frac{140}{150} \approx 93,33 \%$$

Beispiel: Alarmanlage

In einer gefährlichen Stadt werden 500 Häuser mit dem neuen Modell einer Alarmanlage ausgerüstet. In der ersten Nacht ergibt sich die rechts dargestellte Statistik.

A: Alarm, $\bar{A}$: kein Alarm

E: Einbruch, $\bar{E}$: kein Einbruch

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt die Anlage bei einem Einbruch Alarm?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Fehlalarm ausgelöst?
- Mit welcher Zahl von Einbruchsversuchen muss ein Hausbesitzer im Jahr rechnen?

	E	$\bar{E}$	
A	3	9	12
$\bar{A}$	1	487	488
	4	496	500



Lösung zu a):

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_E(A)$.

Da es bei 4 Einbrüchen 3-mal Alarm gab, beträgt diese Wahrscheinlichkeit 75 %.

Korrekter Alarm:

$$P_E(A) = \frac{|A \cap E|}{|E|} = \frac{3}{4} \approx 75 \%$$

Lösung zu b):

Nun ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{E}}(A)$ gesucht.

Da in 496 Häusern kein Einbruch stattfand, aber dennoch 9-mal Alarm geschlagen wurde, beträgt das Risiko für einen Fehlalarm knapp 2 %.

Fehlalarm:

$$P_{\bar{E}}(A) = \frac{|A \cap \bar{E}|}{|\bar{E}|} = \frac{9}{496} \approx 1,81 \%$$

Lösung zu c):

Die Wahrscheinlichkeit eines Einbruchs liegt für ein einzelnes Haus bei 0,8 % pro Nacht. Im Jahr muss also mit ca. 3 Einbruchsversuchen gerechnet werden, eine wahrlich gefährliche Gegend.

Einbruchswahrscheinlichkeit pro Nacht:

$$P(E) = \frac{4}{500} = 0,8 \%$$

Erwartete Einbrüche pro Jahr und Haus:

$$n = 365 \cdot 0,008 = 2,92 \text{ Einbrüche}$$

Übung 1 Lügendetektor

Ein neuer Lügendetektor wird einer gründlichen Testserie unterzogen.

Die Vierfeldertafel zeigt die Ergebnisse von 1200 Testläufen.

A: Detektor schlägt an

L: Person hat gelogen

	L	$\bar{L}$	
A	300	400	700
$\bar{A}$	150	350	500
	450	750	1200



- Mit welcher Wahrscheinlichkeit bewertet der Detektor eine Lüge richtig?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine wahre Antwort korrekt eingestuft?
- Wie wahrscheinlich sind falsch-positive bzw. falsch-negative Ergebnisse?
- Wie viele Fehler sind bei einer Person zu erwarten, der 50 Fragen gestellt werden, von denen sie 20 wahrheitsgemäß und 30 falsch beantwortet?

Exkurs: Vierfeldertafel in der Medizin

Häufige Verwendung finden Vierfeldertafeln im Rahmen medizinischer Studien, insbesondere bei sog. Interventionsstudien und auch zur Überprüfung von Diagnoseverfahren.

Beispiel: Interventionsstudie*

In einer Studie wurde das Schmerzmittel Diclofenac bei Zahnschmerzen getestet. Eine Patientengruppe erhielt Diclofenac, eine Kontrollgruppe erhielt nur ein Placebo (Scheinmedikament).

Es wurde überprüft, ob die Zahnschmerzen reduziert wurden.

Die Ergebnisse wurden in einer Vierfeldertafel protokolliert.

Vergleichen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeiten der beiden Therapien.

	Starke Reduktion der Schmerzen		
	ja	nein	
Diclofenac	32	89	121
Placebo	8	55	63
	40	144	184

Lösung:

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit für Schmerzreduktion (R) unter der Bedingung, dass Diclofenac (D) bzw. dass Placebo (P) eingesetzt wurden.

Sie betragen 26,9 % bzw. 12,7 %.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Behandlungserfolg wird durch die Interventionstherapie mit Diclofenac gegenüber der

D: Diclofenac

P: Placebo

R: Reduktion (ja)

$\bar{R}$: keine Red. (nein)

$$P_P(R) = \frac{|R \cap P|}{|P|} = \frac{8}{63} \approx 12,7\%$$

$$P_D(R) = \frac{|R \cap D|}{|D|} = \frac{32}{121} \approx 26,9\%$$

Placebothherapie verdoppelt.

Beispiel: Diagnosestudie*

Ein Labortest wird zur Diagnose einer Erkrankung verwendet. In einer Studie wird untersucht, wie zuverlässig eine gesunde oder erkrankte Person mit dem Testverfahren richtig eingestuft wird. Die Vierfeldertafel zeigt die Ergebnisse der Studie.

	Tatsächlicher Zustand krank gesund		
Test positiv	172	5	177
Test negativ	385	5160	5545
	557	5165	5722

Lösung:

Die richtige Einstufung eines Gesunden bezeichnet man als Spezifität.

Sie beträgt $P_{\bar{K}}(\bar{T}) \approx 99,9\%$.

Die richtige Einstufung eines Kranken bezeichnet man als Sensitivität.

Sie beträgt $P_K(T) \approx 30,9\%$.

Kranke werden also weniger zuverlässig richtig erkannt.

T: Test positiv

$\bar{T}$: Test negativ

K: krank

$\bar{K}$: gesund

Spezifität: Richtiges Erg. bei Gesunden

$$P_{\bar{K}}(\bar{T}) = \frac{|\bar{T} \cap \bar{K}|}{|\bar{K}|} = \frac{5160}{5165} \approx 99,9\%$$

Sensitivität: Richtiges Erg. bei Kranken

$$P_K(T) = \frac{|T \cap K|}{|K|} = \frac{172}{557} \approx 30,9\%$$

* Quelle: Deutsche Zahnärztliche Zeitschrift 59, 2004, 8

Übungen

2. Interventionsstudie

Ein neues Medikament gegen Akne wird an einer Gruppe von 200 Personen ausprobiert. Eine Vergleichsgruppe von 80 Personen erhält ein Placebo.

Bei 50 Personen der Interventionsgruppe wirkt das Medikament.

In der Placebogruppe heilt die Krankheit bei 10 Personen ab.

(M: Medikament, P: Placebo, H: Heilung, $\bar{H}$: keine Heilung)

	H	$\bar{H}$	
M	50		200
P	10		80

- Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.
- Vergleichen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit der Interventionsgruppe mit der Erfolgswahrscheinlichkeit der Placebogruppe.
- Bei Jakob heilt die Krankheit ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dennoch nur das Scheinmedikament erhalten?

3. Französisch

In einer Reisegruppe mit 30 Personen sprechen 16 Französisch.

60 % der Teilnehmer sind weiblich. 6 Mädchen sprechen Französisch.

- Stellen Sie eine Vierfeldertafel auf.
- Wie viele Jungen sprechen Französisch?
- Eines der Mädchen wird zur Sprecherin der Gruppe gewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit spricht sie Französisch?



4. Safari

An einer Safari nehmen 200 Personen teil. 60 % der Teilnehmer sind Touristen, der Rest besteht aus Einheimischen. 10 Einheimische haben keine Wasservorräte, 30 Touristen haben einen Wasservorrat.

- Stellen Sie eine Vierfeldertafel auf.
- Einer der Touristen verirrt sich in der Wüste. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er keinen Wasservorrat und muss verdursten?
- Eine Person bekommt kurz nach dem Aufbruch Angst. In einem Dorf kauft sie sich doch noch Wasser. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um einen Einheimischen?



5. Großfamilie

Eine Großfamilie besteht aus Erwachsenen und Kindern. 200 Erwachsene und 100 Kinder spielen ein Instrument. Insgesamt 80 Kinder spielen kein Instrument. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Erwachsener ein Instrument spielt, beträgt 20 %.

- Aus wie vielen Personen besteht die Familie? Wie viele Kinder und wie viele Erwachsene gehören zur Familie?
- Auf dem Fest spielt ein zufällig ausgewähltes Familienmitglied die Eröffnungsmelodie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um ein Kind?

6. Farbenblindheit

Von 1000 zufällig ausgewählten Personen einer Bevölkerung sind 420 männlich und 580 weiblich. 60 der ausgesuchten Personen sind farbenblind, darunter 40 männliche.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine weibliche Person farbenblind?
- Eine Person ist nicht farbenblind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie männlich?

Beispiel: Komplexe abiturartige Aufgabe

Laut einer Online-Umfrage in Norddeutschland haben 25 % der Bevölkerung blonde Haare (H) und 30 % blaue Augen (A). Die Blonden mit blauen Augen haben einen Anteil von 15 % an der Bevölkerung.

Lösen Sie die Aufgaben a) bis c) zunächst mit Formeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten und anschließend im Rahmen von d) mit Hilfe einer Vierfeldertafel.

- Der Bürgermeister einer norddeutschen Stadt ist blond. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er blaue Augen?
- Der Busfahrer ist erkennbar nicht blond. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dennoch blaue Augen?
- Jernifer erzählt, daß Viktoria blaue Augen hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie auch noch blond?
- Erstellen Sie auf der Grundlage von 100 Schülern des Abiturjahrgangs eine Vierfeldertafel.
- Der Mathekurs hat zehn Schüler, drei mit blauen Augen. Drei Schüler werden ausgelost. Wie wahrscheinlich ist es, dass mindestens zwei davon blaue Augen haben?



Lösung zu a:

Wir bezeichnen zunächst die Ereignisse Blond (H) und Blau (A). Dann notieren wir die dem Text entnommenen gegebenen Wahrscheinlichkeiten.

Zur Lösung des Bürgermeisterproblems verwenden wir die Definitionsformel für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_H(A)$. Wir erhalten eine Wahrscheinlichkeit von 60 % dafür, dass der blonde Bürgermeister auch noch blaue Augen hat.

In der norddeutschen Praxis dürfte sie allerdings 100 % betragen, denn dort sind die Bürgermeister grundsätzlich blond und blauäugig.

Lösung zu b:

Zur Lösung des Busfahrerproblems müssen wir $P_{\bar{H}}(A)$ berechnen. Dazu werden $P(\bar{A})$ und auch $P(\bar{H} \cap A)$ benötigt. (siehe rechts).

Resultat: Der dunkelhaarige Busfahrer ist mit ca. 20 % Wahrscheinlichkeit blauäugig.

Lösung zu c:

Gesucht ist nun $P_A(H)$. Diese Wahrscheinlichkeit können wir mit von $P_A(H) \cdot P(A) = P_H(A) \cdot P(H)$ bzw. mit dem Satz von Bayes auf das bereits berechnete $P_{\bar{H}}(A)$ zurückführen (siehe rechts).

Resultat: Viktoria ist mit 50 % Wahrscheinlichkeit blond.

Ereignisse:

H: Person hat blonde Haare

A: Person hat blaue Augen

Gegebene Wahrscheinlichkeiten:

$P(H) = 0,25$ (blonde Haare)

$P(A) = 0,30$ (blaue Augen)

$P(H \cap A) = 0,15$ (blond und blau)

Bürgermeister:

$$P_H(A) = \frac{P(H \cap A)}{P(H)} = \frac{0,15}{0,25} = 0,60$$

Busfahrer:

$$P(\bar{H}) = 1 - P(H) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P(\bar{H} \cap A) = P(A) - P(H \cap A) \\ = 0,30 - 0,15 = 0,15$$

$$P_{\bar{H}}(A) = \frac{P(\bar{H} \cap A)}{P(\bar{H})} = \frac{0,15}{0,75} = 0,20$$

Viktoria:

$$P_A(H) = \frac{P_H(A) \cdot P(H)}{P(A)} \\ = \frac{0,60 \cdot 0,25}{0,30} = 0,50$$

Lösung zu d:

Mit einer Vierfeldertafel hätten wir alle Aufgabenstellungen ebenfalls lösen können. Sie ist rechts abgebildet auf der Basis von 100 Personen.

Die drei fett eingezeichneten Daten waren gegeben. Alle anderen können durch summativ Ergänzung der Zeilen und Spalten errechnet werden.

Vierfeldertafel:

Auge \ Haar	A	$\bar{A}$	
H	15	10	25
$\bar{H}$	15	60	75
	30	70	100

Die in a) bis c) gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeiten können nun sehr leicht als Quotienten jeweils einer Schnittwahrscheinlichkeit aus dem Innern der Tafel und einer totalen Wahrscheinlichkeit vom Rand der Tafel berechnet werden.

Sie betragen 60 %, 20 % und 50 %.

Das Beispiel demonstriert recht eindrucksvoll, wie effizient die Verwendung von Vierfeldertafeln bei Berechnungen im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten sein kann.

Bürgermeister:

$$P_H(A) = \frac{P(H \cap A)}{P(H)} = \frac{15}{25} = 0,60$$

Busfahrer:

$$P_{\bar{H}}(A) = \frac{P(\bar{H} \cap A)}{P(\bar{H})} = \frac{15}{75} = 0,20$$

Viktoria:

$$P_A(H) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{15}{30} = 0,50$$

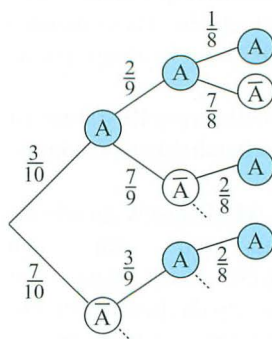
Lösung zu e:

Hier werden im Prinzip drei Schüler aus einer Gruppe von zehn Schülern zufällig ohne Zurücklegen gezogen.

Mit jedem Zug ändert sich je nach Ausgang die Wahrscheinlichkeit für blaue Augen in der Restgruppe deutlich.

Wir verwenden zur Lösung ein dreistufiges Baumdiagramm.

Resultat: Die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Schülern mit blauen Augen in der Abordnung beträgt nur ca. 18 %.



$$P(D) = \frac{6}{720} + 3 \cdot \frac{42}{720} = \frac{132}{720} = 0,1833$$

Überblick

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt unter der Bedingung, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist, gilt: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$, $P(B) > 0$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: A und B seien beliebige Ereignisse mit $P(B) \neq 0$, $P(\bar{B}) \neq 0$. Dann gilt: $P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$
Diese Formel gewinnt man direkt aus den Pfadregeln für das zu B und A gehörige Baumdiagramm.

Satz von Bayes: Sind A und B Ereignisse mit $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$, so gilt folgende Formel:

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$$

Diese Formel ergibt sich, wenn man das zu den Ereignissen B und A zugehörige inverse Baumdiagramm zeichnet.

Vierfeldertafel:

	B	$\bar{B}$	
A	$ A \cap B $	$ A \cap \bar{B} $	$ A $
$\bar{A}$	$ \bar{A} \cap B $	$ \bar{A} \cap \bar{B} $	$ \bar{A} $
	$ B $	$ \bar{B} $	Summe

Zunächst werden die gegebenen Daten eingetragen. Alle anderen können durch summative Ergänzungen der Zeilen und Spalten errechnet werden.

Berechnung einer Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{\text{Summe}}$$

Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$