1.1 Änderungsraten – Ableitung

■ Die Tabelle zeigt Messwerte der 20. Etappe der Tour de France 2015.

Zeit (in h)	0,5	2	2,5	2,75	3,5
Strecke (in km)	24	56	84,5	96	110

a) Berechnen Sie für die gesamte Strecke und für die einzelnen Zeitabschnitte die Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h.
b) Erläutern Sie die berechneten Geschwindigkeiten. ■

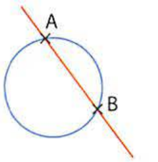
Erinnerung:
Steigung einer Geraden durch 2 Punkte:
$m = \frac{\text{y-Unterschied}}{\text{x-Unterschied}}$

Die Tabelle zeigt die Höhen einer Wanderstrecke. Die erste Etappe hat eine horizontale Entfernung von 2 km = 2000 m.
Die (vertikale) Höhendifferenz ist 1260 m – 860 m = 400 m.
Aus diesen Werten kann nun die durchschnittliche Steigung
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{400}{2000}$ berechnet werden.

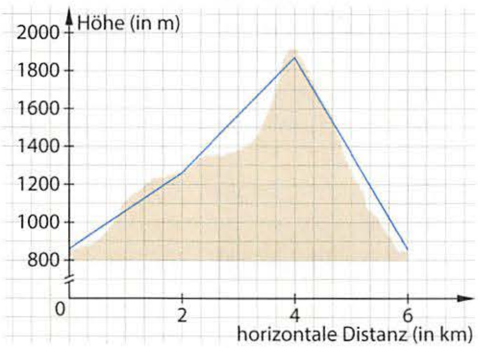
horizontale Distanz (in km)	0	2	4	6
Höhe (in m)	860	1260	1870	870

Abschnitt	Durchschnittliche Steigung
1. Etappe	$m = \frac{1260-860}{2000-0} = \frac{400}{2000} = 0{,}2$
2. Etappe	$m = \frac{1870-1260}{4000-2000} = \frac{610}{2000} = 0{,}305$
3. Etappe	$m = \frac{870-1870}{6000-4000} = \frac{-1000}{2000} = -0{,}5$

Erinnerung:
Sekante am Kreis



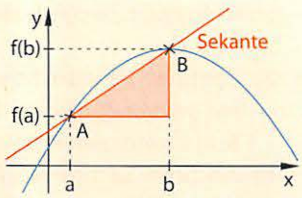
Die horizontale Entfernung ist auf der x-Achse und die Höhe auf der y-Achse eingetragen. Die Punkte wurden geradlinig zu einem Höhenprofil verbunden.
Die durchschnittliche Steigung entspricht der Steigung der **Sekante** vom Anfangs- bis zum Endpunkt jeder Etappe.
Die Steigung an einzelnen Stellen innerhalb der Etappen kann davon mal mehr, mal weniger abweichen, wie das tatsächliche Höhenprofil zeigt.



Wissen: Mittlere Änderungsrate

Der **Differenzenquotient** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gibt die **mittlere Änderungsrate** der Funktion f im Intervall [a; b] an.

Sie entspricht anschaulich der **Steigung** der **Sekante** durch die Punkte A(a | f(a)) und B(b | f(b)).



Beispiel 1: Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate zu $f(x) = 3x^2 - x$ im Intervall [–1; 2].

Lösung:
Setzen Sie die Intervallgrenzen $a = -1$ und $b = 2$ in den Differenzenquotienten $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ein.

$$m = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$$
$$= \frac{(3\cdot 2^2 - 2) - (3\cdot(-1)^2 - (-1))}{3} = \frac{10-4}{3} = 2$$

Basisaufgaben

1. Berechnen Sie für die Funktion f die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $I = [1; 3]$, $J = [-3; -1]$ und $K = [-1; 2]$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3 + 2x$ c) $f(x) = 2x^2 - x$

Lösungen zu 1:

−4 5 4 15 −9 7 −7 1

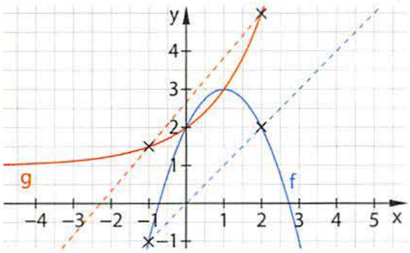
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2^x$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-2 \leq x \leq 3$.

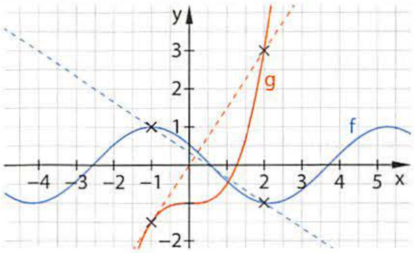
b) Zeichnen Sie die Sekanten für $[-1; 1]$ und $[-1; 2]$ ein und lesen Sie ihre Steigung ab.

3. Bestimmen Sie zu den Funktionen f und g die Steigung der Sekante im Intervall $[-1; 2]$.

a)



b)



c) Vergleichen Sie Ihr Vorgehen mit dem Ihres Nachbarn. Diskutieren Sie, ob es verschiedene Lösungswege gibt.

4. a) Betrachten Sie $f(x) = 2x - 3$ und $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Berechnen Sie zu f und g die Sekantensteigung im Intervall $[2; 6]$. Vergleichen Sie mit den Funktionstermen von f und g.

b) Erklären Sie das Ergebnis aus a), indem Sie die Graphen von f und g skizzieren. Erläutern Sie, dass das Ergebnis aus a) auch für beliebige Intervalle zutrifft.

5. Die Tabelle zeigt die Entwicklung der Arbeitslosenzahlen in Deutschland.

Jahr	2001	2005	2008	2009	2012	2014	2016	2019
Anzahl in Mio.	3,85	4,86	3,26	3,41	2,9	2,9	2,77	2,31

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Arbeitslosenzahlen für den Zeitabschnitt 2009 bis 2012 und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

b) Berechnen Sie die mittleren Änderungsraten für die übrigen Zeitabschnitte. Wann nahm die Zahl der Arbeitslosen am schnellsten zu bzw. am schnellsten ab?

c) Tragen Sie die Arbeitslosenzahlen in ein Koordinatensystem ein (2001 bei $x = 0$). Erklären Sie, wie sich die Fragestellung aus b) damit lösen lässt.

6. Bestimmen Sie für die angegebene Funktion die Einheit der mittleren Änderungsrate. Geben Sie an, was die mittlere Änderungsrate beschreibt.

a) vergangene Zeit in s → zurückgelegter Weg in m beim Laufen

b) horizontale Entfernung in m → Höhe in m beim Fahrradfahren

c) Zeit in Tagen → Anzahl der Infizierten bei einer Epidemie

d) Höhe in km → Luftdruck in hPa (Hektopascal)

7. **Durchschnittsgeschwindigkeit:** Bei zwei Autobahnfahrten las der Beifahrer die angegebenen Werte ab. Ermitteln Sie für jede Fahrt, auf welchem Abschnitt die Durchschnittsgeschwindigkeit am größten war. Begründen Sie, weshalb dies bei ② besonders leicht ist.

①

h	0	1,4	3,8	4,7	6,8
km	0	150	400	520	750

②

h	0	1,5	3	4,5	6
km	0	120	330	480	660

Lokale Änderungsrate – Ableitung

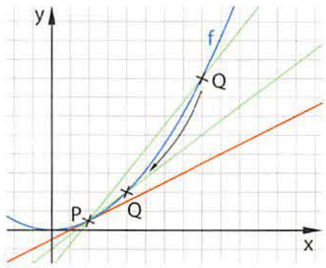
Mit der mittleren Änderungsrate kann man die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Zeitintervall berechnen. Nun soll die Momentangeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt bestimmt werden.

Ein startendes Auto legt in t Sekunden die Strecke $s(t) = 2t^2$ im Meter zurück. Die mittlere Änderungsrate im Intervall [1; 2] ist die Durchschnittsgeschwindigkeit im m/s zwischen der ersten und der zweiten Sekunde und beträgt $\frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{8 - 2}{1} = 6$.

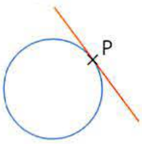
Die **Momentangeschwindigkeit** des Autos genau zum Zeitpunkt $t = 1$ kann nicht mit dem Differenzenquotienten berechnet werden, da man durch Null dividieren müsste. Jedoch lassen sich mithilfe immer kleiner werdender Zeitintervalle Näherungswerte bestimmen.

t	$\frac{s(t) - s(1)}{t - 1}$
2	6
1,5	5
1,1	4,2
1,01	4,02
1,0001	4,0002

Die **Näherungstabelle** zeigt, dass sich die Durchschnittsgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ dem Wert 4 annähert. Man kann also vermuten, dass die Momentangeschwindigkeit $4\,\frac{m}{s}$ beträgt.
Die mittlere Änderungsrate entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte P und Q. Wählt man das Intervall für die mittlere Änderungsrate immer kleiner, so bedeutet dies am Graphen, dass der Punkt Q immer näher an den Punkt P heranwandert.
Die Sekanten (grün) nähern sich einer **Tangente** (rot) an. Die Steigung der Tangente entspricht der Steigung des Graphen im Berührpunkt P und der lokalen Änderungsrate der Funktion.



Erinnerung:
Tangente am Kreis:

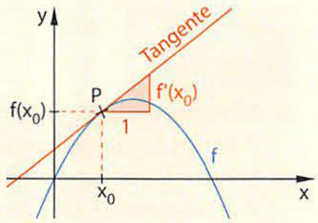


Hinweis:
Die Schreibweise $x \to x_0$ bedeutet, dass x sich immer stärker x_0 annähert.

Definition: Lokale Änderungsrate – Ableitung

Wenn sich der Wert des Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x \to x_0$ einem festen Wert annähert, so heißt dieser Wert **Ableitung $f'(x_0)$**. Er gibt die **lokale Änderungsrate** der Funktion f an der Stelle x_0 an.

Die Ableitung $f'(x_0)$ entspricht der **Steigung der Tangente** an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$.



Beispiel 2: Bestimmen Sie näherungsweise die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Lösung:
Erstellen Sie eine Näherungstabelle. Wenn Sie in den Differenzenquotienten Werte für x einsetzen, die immer näher bei 4 liegen, so erkennen Sie, dass sich die Werte des Differenzenquotienten immer stärker 8 annähern.

Also gilt vermutlich $f'(4) = 8$.

x	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
5	$\frac{5^2 - 4^2}{5 - 4} = 9$
4,1	$\frac{4{,}1^2 - 4^2}{4{,}1 - 4} = 8{,}1$
4,01	$\frac{4{,}01^2 - 4^2}{4{,}01 - 4} = 8{,}01$
4,001	$\frac{4{,}001^2 - 4^2}{4{,}001 - 4} = 8{,}001$