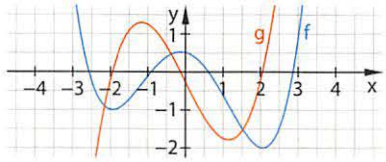
1.2 Grafisches Ableiten

■ Prüfen Sie anhand der abgebildeten Graphen von f und g, ob die Funktion g die Ableitung der Funktion f sein kann. Notieren Sie die Zusammenhänge, auf die Sie dabei achten. ■



Bildet man den Grenzwert des Differenzenquotienten einer Funktion f an einer beliebigen Stelle x, so ergibt sich ein allgemeiner Term für die Ableitung $f'(x)$.

Hinweis:
Das Berechnen der Ableitungsfunktion nennt man **Ableiten**. Spricht man von „**Ableitung**" ohne Angabe einer Stelle, so ist damit die Ableitungsfunktion gemeint.
Das rechnerische Ableiten mithilfe des Differenzenquotienten wird im Streifzug auf Seite 17 behandelt.

Definition: Ableitungsfunktion
Die **Ableitungsfunktion f'** zu einer Funktion f ordnet jeder Stelle x ihre Ableitung $f'(x)$ zu.

Der Graph der Ableitungsfunktion lässt sich aus dem Graphen der Funktion herleiten.

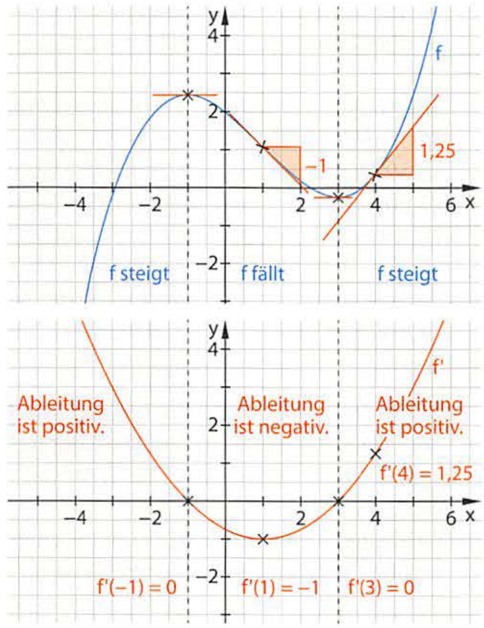
Der Funktionswert der Ableitungsfunktion f' an einer Stelle x entspricht der Steigung des Graphen von f an dieser Stelle.

In den Intervallen, in denen der Graph von f steigt (bzw. fällt), in denen also die Steigung positiv (bzw. negativ) ist, verläuft der Graph von f' oberhalb (bzw. unterhalb) der x-Achse.

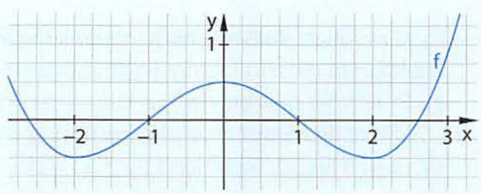
An den Hoch- und Tiefpunkten (hier bei $x = -1$ und $x = 3$) hat der Graph von f eine waagerechte Tangente. Die Steigung ist 0, f' hat eine Nullstelle.

Ab $x = 3$ wird der Graph von f immer steiler, die Funktionswerte von f' also immer größer. Der Graph von f fällt bei $x = 1$ am steilsten ab. An dieser Stelle hat der Graph von f' einen Tiefpunkt.

Die Tangente bei $x = 4$ hat die Steigung 1,25. Der Graph von f' verläuft durch den Punkt $L(4 \mid 1{,}25)$.

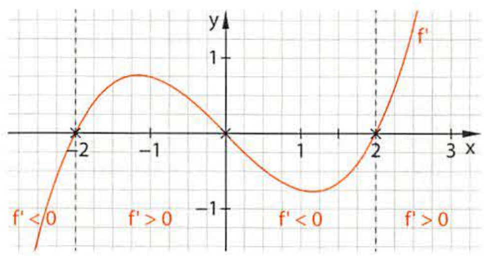


Beispiel: Skizzieren Sie zum abgebildeten Graphen von f den Graphen der Ableitungsfunktion f'.
Markieren Sie die Nullstellen von f' sowie die Intervalle, in denen die Ableitung positiv bzw. negativ ist.



Lösung:
Der Graph von f hat Tiefpunkte bei $x = -2$ und $x = 2$ sowie einen Hochpunkt bei $x = 0$. An diesen Stellen hat f' daher Nullstellen.

In den Bereichen $x < -2$ und $0 < x < 2$ fällt der Graph von f, hier ist $f'(x)$ negativ.
In den Bereichen $-2 < x < 0$ und $x > 2$ steigt der Graph von f, hier ist $f'(x)$ positiv.

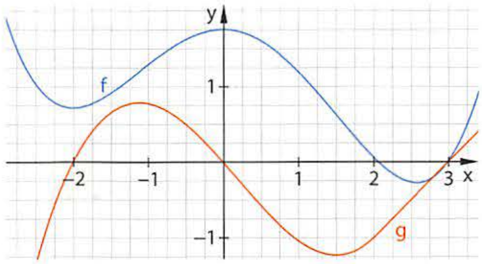


Hinweis:
$f' < 0$ ist die Kurzschreibweise für $f'(x) < 0$ für alle x im betrachteten Intervall.

Basisaufgaben

1. a) Notieren Sie möglichst viele Zusammenhänge, die zwischen dem Graphen einer Funktion f und dem ihrer Ableitungsfunktion f′ bestehen.

b) Überprüfen Sie die Graphen von f und g auf die Zusammenhänge aus a) und entscheiden Sie so, ob g die Ableitungsfunktion von f sein kann.

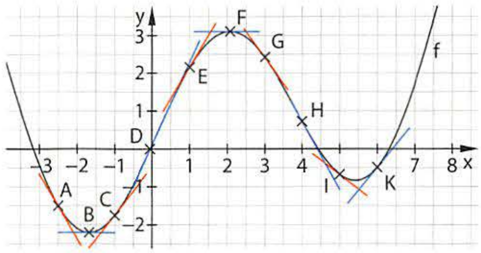


2. Skizzieren Sie die Graphen zu f und f′ und erläutern Sie die Zusammenhänge.

a) $f(x) = x^2 - 4;\quad f'(x) = 2x$

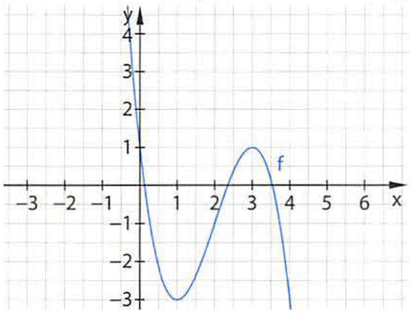
b) $f(x) = x^3 - 4x;\quad f'(x) = 3x^2 - 4$

3. Schätzen Sie die Tangentensteigungen an den Punkten A bis K. Tragen Sie die diesen Steigungen entsprechenden Punkte des Graphen der Ableitung f′ in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie so den Graphen der Ableitung von f.

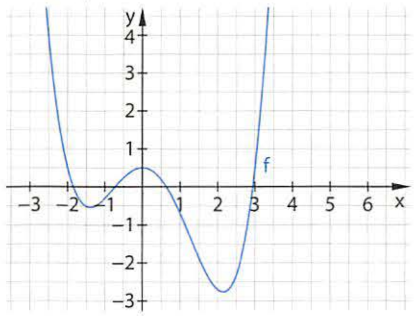


4. Skizzieren Sie den Graphen von f′ zum abgebildeten Graphen von f.

a)



b)



5. Finden Sie heraus, welche der Funktionen $g_1, \ldots, g_5$ Ableitung zu welcher der Funktionen $f_1, \ldots, f_5$ ist. Begründen Sie Ihre Zuordnung.