1.3 Ableitung von Potenzfunktionen

■ Die Tabelle zeigt die Terme einiger Funktionen und ihrer Ableitungen.

a) Vermuten Sie aufgrund der Ableitungen zu $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^3$ eine Regel für die Ableitung zu $f(x) = x^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

b) Prüfen Sie, ob die Ableitungen zu $f(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x}$ und $f(x) = \sqrt{x}$ dieser Regel entsprechen. ■

f(x)	f'(x)
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Potenzregel für natürliche Exponenten

Es gibt Regeln, die das Ableiten erheblich vereinfachen.
Beim Ableiten von $f(x) = x^3$ oder $f(x) = x^2$ wird der Exponent von f(x) zum Vorfaktor von f'(x). Außerdem verkleinert sich der Exponent um 1. Dies gilt allgemein für alle Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten.

$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x^1 = 2x$

Satz: Potenzregel für Potenzen mit natürlichen Exponenten
Die Funktion f mit $f(x) = x^n$ und $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ hat die Ableitung $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Hinweis:
Für $f(x) = x$ gilt $f'(x) = 1$.
Für $f(x) = 1$ gilt $f'(x) = 0$.

Auch die Ableitungen zu $f(x) = x$ und $f(x) = 1$ entsprechen für $x \neq 0$ dieser Regel, wie die Rechnungen zeigen.
Für den Fall $x = 0$ lässt sich die Ableitung mithilfe des Differenzenquotienten bestimmen.

$f(x) = x = x^1$
$f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$
$f(x) = 1 = x^0$
$f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$

Erinnerung:
$x^1 = x$
$x^0 = 1$ für $x \neq 0$

Beispiel 1: Berechnen Sie $f'(-2)$ für die Funktion f mit $f(x) = x^6$.

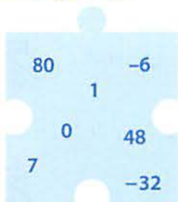
Lösung:
Beim Ableiten von f wird der Exponent 6 zum Vorfaktor, der Exponent in f' um 1 verkleinert. — $f(x) = x^6$, $f'(x) = 6x^5$
Setzen Sie $x = -2$ in f'(x) ein. — $f'(-2) = 6 \cdot (-2)^5 = 6 \cdot (-32) = -192$

Basisaufgaben

1. Bestimmen Sie zu der Funktion die Ableitung.
a) $f(x) = x^7$ b) $f(x) = x^9$ c) $h(x) = x^{100}$
d) $f(x) = x^{m+1}$ e) $g(x) = x^{2n}$ f) $v(t) = t^2$

2. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.
a) $f(x) = x^5$; $x_0 = 2$ b) $f(x) = x^2$; $x_0 = -3$ c) $f(x) = x^3$; $x_0 = 4$
d) $f(x) = x^4$; $x_0 = -2$ e) $f(x) = x^7$; $x_0 = -1$ f) $f(x) = x$; $x_0 = 9$

Lösungen zu 2:



3. Begründen Sie, warum die Potenzregel für die Funktionen f und g mit $f(x) = x^1 = x$ und $g(x) = x^0 = 1$ an der Stelle $x = 0$ nicht angewendet werden kann. Weisen Sie mithilfe des Differenzenquotienten nach, dass dennoch $f'(x) = 1$ und $g'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

4. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitung der Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, für welche x die Steigung des Graphen positiv, negativ oder null ist. Unterscheiden Sie die Fälle, ob n ungerade oder n gerade ist.

Potenzregel für rationale Exponenten

Hinweis:
Es ist oft praktisch, den Ableitungsstrich direkt an den Term zu schreiben:
$\left[\frac{1}{x}\right]'$ bezeichnet die Ableitung von $\frac{1}{x}$.

Die **Ableitung zu** $f(x) = \frac{1}{x}$ erhält man mit der Potenzregel, wenn man $\frac{1}{x}$ unter Verwendung der Potenzgesetze als x^{-1} schreibt.

$$\left[\frac{1}{x}\right]' = [x^{-1}]' = (-1)\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Auch die **Ableitung der Wurzelfunktion** mit $f(x) = \sqrt{x}$ lässt sich durch Umschreiben von $\sqrt{x}$ in $x^{\frac{1}{2}}$ auf diese Weise ermitteln.

$$[\sqrt{x}]' = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Die Potenzregel kann also auch auf rationale Exponenten erweitert werden.

Satz: Potenzregel für Potenzen mit rationalen Exponenten
Die Funktion f mit $f(x) = x^r$ und $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, hat die Ableitung $f'(x) = r\cdot x^{r-1}$.

Für $r = -1$ ergibt sich: $f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$

Für $r = \frac{1}{2}$ ergibt sich: $f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$

Jede Funktion, deren Funktionsterm sich als Potenz schreiben lässt, kann mit der Potenzregel abgeleitet werden. Für das Umschreiben in eine Potenz werden die Potenzgesetze verwendet.

Beispiel 2: Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f.
a) $f(x) = x^{-3}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Erinnerung:
Potenzgesetze
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$; $\frac{1}{a} = a^{-1}$
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$(m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 1)$

Lösung:
Schreiben Sie den Funktionsterm von f mithilfe der Potenzgesetze in eine Potenz um und wenden Sie die Potenzregel an. Achten Sie dabei auf das Vorzeichen.

a) $f(x) = x^{-3}$
$f'(x) = (-3)\cdot x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$
$f'(x) = (-2)\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$
$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Basisaufgaben

5. Leiten Sie mithilfe der Potenzregel ab.
a) $f(x) = x^{-4}$ b) $f(x) = x^{-1}$ c) $g(x) = x^{-2}$ d) $h(x) = x^{\frac{1}{2}}$ e) $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

6. Formen Sie den Funktionsterm so um, dass x im Zähler steht. Bestimmen Sie dann die Ableitung.
a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^5}$ c) $h(x) = \frac{1}{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^7}$ e) $g(x) = \frac{1}{x^9}$

7. Schreiben Sie den Funktionsterm als Potenz mit der Basis x. Bestimmen Sie dann die Ableitung.
a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ d) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Lösungen zu 8:
-4 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $-\frac{1}{4}$ 6 $-\sqrt{2}$

8. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.
a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$; $x_0 = -2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 2$ c) $h(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = \frac{1}{2}$
d) $g(x) = \frac{1}{x^6}$; $x_0 = -1$ e) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$; $x_0 = 16$ f) $f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$; $x_0 = 1$