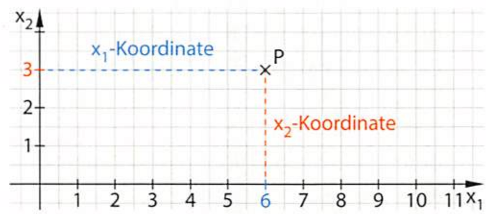
1.1 Punkte im Raum

■ Die genaue Position des Balls in dieser Momentaufnahme lässt sich nur erahnen.

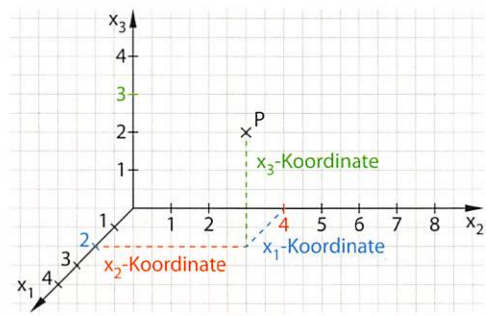
a) Beschreiben Sie die Lage des Balls.
b) Erklären Sie, warum die Lage des Balls nicht zweifelsfrei erkennbar ist.
c) Bestimmen Sie, wie viele Zahlenangaben nötig sind, um die momentane Lage genau zu beschreiben. ■

In der Ebene wird ein Punkt mithilfe zweier Koordinatenachsen festgelegt. Der Punkt P(6|3) liegt 6 Einheiten in x_1-Richtung und 3 Einheiten in x_2-Richtung vom Ursprung entfernt.



Zur Beschreibung des Raumes wird die bekannte x_1x_2-Ebene durch eine dritte x_3-Achse ergänzt, die im Ursprung senkrecht zur x_1x_2-Ebene verläuft. Der Punkt P(2|4|3) liegt 2 Einheiten in x_1-, 4 Einheiten in x_2- und 3 Einheiten in x_3-Richtung vom Ursprung entfernt.

Man fasst die x_1x_2-Ebene als Grundebene auf und die x_3-Koordinate als Höhe. Die x_1- Achse zeigt dann nach vorne, die x_2-Achse nach rechts und die x_3-Achse nach oben.



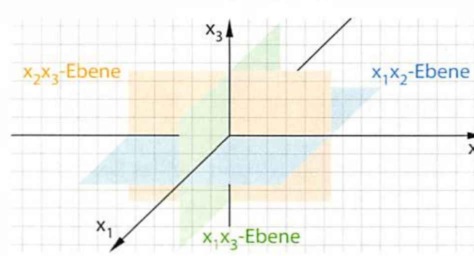
Wie bei einem Schrägbild wird die x_1-Achse diagonal mit verkürzten Einheiten eingezeichnet. Auf Karopapier ist es günstig, als Längeneinheit für die x_2- und die x_3-Achse 1 cm zu wählen und für die x_1-Achse eine Kästchendiagonale.

Wissen: Punkte im Raum

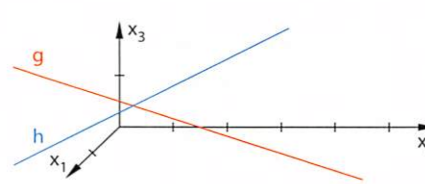
Die Lage eines Punktes im Raum gibt man in der Form $P(x_1|x_2|x_3)$ mit **drei Koordinaten** an. Diese beschreiben im **dreidimensionalen Koordinatensystem** (mit dem **Ursprung** O), wo sich der Punkt in Bezug auf die Richtung der jeweiligen **Koordinatenachse** befindet.

Im 3D-Koordinatensystem spannen je zwei Koordinatenachsen eine **Koordinatenebene** auf. Liegt ein Punkt in einer Koordinatenebene, so ist mindestens eine Koordinate gleich 0:

x_1x_2-Ebene: alle Punkte $P(x_1|x_2|0)$
x_1x_3-Ebene: alle Punkte $P(x_1|0|x_3)$
x_2x_3-Ebene: alle Punkte $P(0|x_2|x_3)$



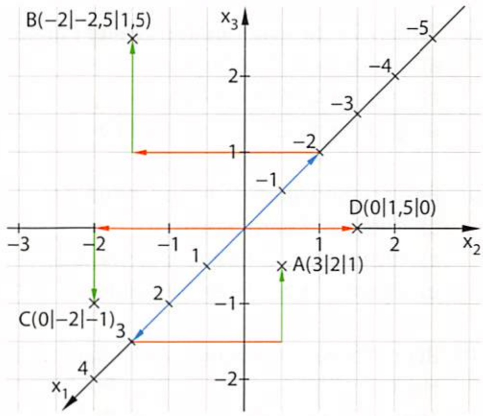
Die ebene Darstellung des Raumes ist mit Verlusten verbunden. Anhand der Skizze lässt sich nicht erkennen, ob die Geraden g und h sich schneiden.



Beispiel: Gegeben sind die Punkte A(3 | 2 | 1), B(−2 | −2,5 | 1,5), C(0 | −2 | −1) und D(0 | 1,5 | 0).
a) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem und tragen Sie die Punkte ein.
b) Beschreiben Sie die besondere Lage der Punkte C und D.

Lösung:

a) Zeichnen Sie die waagerechte x_2-Achse und die senkrechte x_3-Achse mit 1 cm = 1 LE. Ergänzen Sie die x_1-Achse als Diagonale durch den Ursprung. Wählen Sie als Längeneinheit eine Kästchendiagonale.
Gehen Sie vom Ursprung aus 3 Einheiten nach vorn, 2 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach oben. Tragen Sie dort den Punkt A(3 | 2 | 1) ein. Wiederholen Sie das Vorgehen für die Punkte B, C und D. Bei negativem Vorzeichen einer Koordinate ändert sich die Laufrichtung.



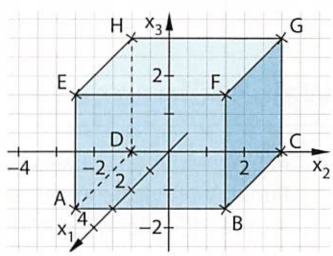
b) C liegt in einer Koordinatenebene, da eine Koordinate 0 ist. D liegt auf einer der Achsen, da zwei Koordinaten 0 sind.

C(0 | −2 | −1) liegt in der x_2x_3-Ebene.
D(0 | 1,5 | 0) liegt auf der x_2-Achse.

Merkhilfe:
Das Vorzeichen einer Koordinate gibt die Richtung an.
Auf der x_1-Achse:
+ → vorn; − → hinten
Auf der x_2-Achse:
+ → rechts; − → links
Auf der x_3-Achse:
+ → oben; − → unten

Basisaufgaben

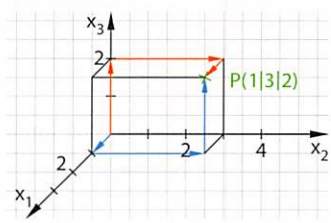
1. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A bis H in der Zeichnung.



Lösungen zu 1:
(3 | −1 | 0) (0 | −1 | 0) (0 | −1 | 3) (0 | 0 | 0)
(0 | 3 | 3) (0 | 3 | 0) (3 | 3 | 0) (3 | −1 | 3) (3 | 3 | 3)

2. Zeichnen Sie ein Koordinatensystem und tragen Sie die Punkte ein.
   a) A(2 | 3 | 0), B(−3 | 2 | 1) und C(3 | −1 | 2)
   b) A(3 | 0 | 0), B(0 | 1 | 0) und C(0 | 0 | 2)
   c) A(3 | 0 | −1), B(−1 | 1 | −1), C(−1 | 1 | 3) und D(3 | 0 | 3)

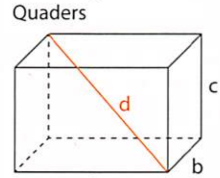
3. Erklären Sie mithilfe der Zeichnung, warum beim Eintragen eines Punktes die Reihenfolge, in der die Koordinaten abgezählt werden, keine Rolle spielt.



4. Zeichnen Sie die dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche A(−1 | −4 | 1), B(3 | 0 | 0), C(−2 | 0 | 0) und der Spitze S(1 | 0 | 5) in ein Koordinatensystem.

5. Die fünf Punkte sind Eckpunkte eines Quaders. Zeichnen Sie den Quader in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Koordinaten der übrigen drei Ecken an.
   a) A(2 | −1 | −2), B(2 | 3 | −2), C(−2 | 3 | −2), D(−2 | −1 | −2), E(2 | −1 | 3)
   b) A(1 | −1 | 0), C(−2 | 2 | 0), D(−2 | −1 | 0), F(1 | 2 | 2), H(−2 | −1 | 2)
   c) B(3 | 3 | 0), C(0 | 3 | 0), E(3 | 0 | 3), G(0 | 3 | 3), H(0 | 0 | 3)

Hinweis zu 6:
Raumdiagonale eines Quaders



6. Die Punkte A und O(0 | 0 | 0) sind Ecken eines Quaders mit achsenparallelen Kanten. Sie liegen sich auf einer Raumdiagonale gegenüber. Zeichnen Sie den Quader in ein Koordinatensystem und geben Sie die Koordinaten der übrigen Ecken an.
   a) A(2 | 3 | 3) b) A(−3 | 2 | 1) c) A(4 | −3 | −1) d) A(−2 | 2 | −1)

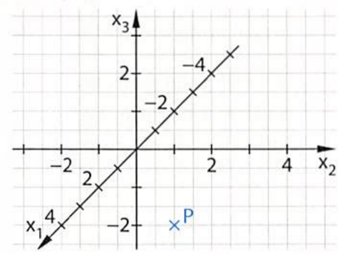
7. Geben Sie an, auf welchen der drei Koordinatenachsen und in welchen der drei Koordinatenebenen die Punkte liegen.

A(0|0|1) B(3|0|−5) C(6|0|0) D(0|−2|0) E(6|6|0) F(0|0|0)

8. Geben Sie die Koordinaten zweier Punkte an, die
a) auf der x_1-Achse liegen,
b) auf der x_3-Achse liegen,
c) in der x_1x_2-Ebene liegen,
d) in der x_1x_3-Ebene liegen,
e) in der x_2x_3-Ebene, aber auf keiner Koordinatenachse liegen.

9. Beschreiben Sie die Lage aller Punkte,
a) deren x_1-Koordinate 0 ist,
b) deren x_2- und x_3-Koordinate 0 sind,
c) die in der x_1x_2-Ebene und x_2x_3-Ebene liegen,
d) deren x_3-Koordinate 2 ist,
e) deren x_1-Koordinate 0 und deren x_2-Koordinate 1 ist.

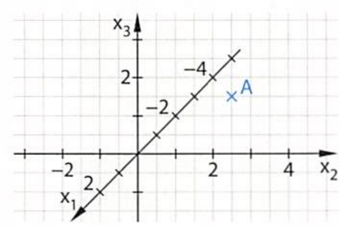
10. Beim Ablesen von Koordinaten gab es verschiedene Ergebnisse:
Hannah: P(0|1|−2) Ilja: P(−2|0|−3)
Jona: P(4|3|0) Karl: P(2|2|−1)
Übertragen Sie das Koordinatensystem und tragen Sie die vier Punkte der Schüler ein. Beschreiben Sie Ihre Beobachtung und beurteilen Sie die Ergebnisse der Schüler. Formulieren Sie einen Satz über das Ablesen der Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Koordinatensystem.



Weiterführende Aufgaben

11. In ein dreidimensionales Koordinatensystem wurde der Punkt A eingezeichnet. Geben Sie die Koordinaten von A unter der folgenden Voraussetzung an.

① A liegt in der x_2x_3-Ebene. ② A liegt in der x_1x_2-Ebene.
③ A hat die x_1-Koordinate −2. ④ A hat die x_3-Koordinate 2.



12. Stolperstelle: Tobias stellt fest: *„Wenn ich Punkte wie A(2|1|1) oder B(6|3|3), bei denen x_1 doppelt so groß ist wie x_2 und x_3, in ein Koordinatensystem einzeichnen will, lande ich wieder beim Ursprung. Es gibt also viele Möglichkeiten, Koordinaten für den Ursprung anzugeben."*
Nehmen Sie dazu Stellung.

13. Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
a) Alle Punkte mit $x_1 = 3$ und $x_3 = -1$ liegen auf einer Geraden, die parallel zur x_2-Achse ist.
b) Die Punkte P(1|−2|5) und Q(−3|3|1) liegen auf verschiedenen Seiten der x_1x_2-Ebene.
c) Die x_3-Koordinate eines Punktes gibt seinen Abstand zur x_1x_2-Ebene an.

Hinweis zu 13c:
Der Abstand wird längs des Lots vom Punkt auf die Ebene gemessen.

● **14.** Der Punkt B soll genau in der Mitte zwischen den Punkten A und C liegen. Geben Sie die fehlenden Koordinaten an.
a) A(0|2|0), B(●|●|●), C(0|10|0)
b) A(1|1|0), B(4|4|0), C(●|●|●)
c) A(●|●|●), B(5|8|−1), C(0|0|0)
d) A(−2|3|10), B(●|●|●), C(4|5|2)
e) A(7|0|3,5), B(5|6|4), C(●|●|●)
f) A(●|−6|2), B(4|−1|●), C(7|●|3)

15. Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide mit den Ecken der Grundfläche $A(1|0|1)$, $B(1|4|1)$, $C(-3|4|1)$ und D und der Spitze S. Die Höhe der Pyramide ist 3 LE.
Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein und geben Sie die Koordinaten der übrigen Ecken an. Gibt es mehrere Möglichkeiten?

16. Die um 2550 v. Chr. erbaute Chephrenpyramide ist die zweithöchste aller ägyptischen Pyramiden. Damals wurde die Längeneinheit Königsellen verwendet. Die Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 410 Königsellen und ist 275 Königsellen hoch.

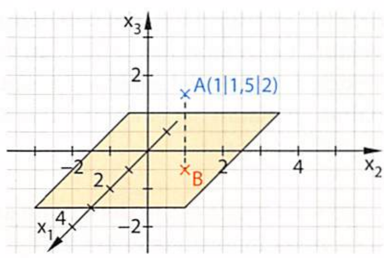
a) Geben Sie die fünf Eckpunkte der Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem an.
b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Ihrem Nachbarn und erklären Sie, warum es verschiedene richtige Ergebnisse geben kann.

Hinweis zu 16:
Gehen Sie davon aus, dass die Pyramide gerade ist. Sie können die Einheit Königselle verwenden oder in Meter umrechnen.
1 Königselle = 52,4 cm

17. Punkte auf Geraden: Gegeben sind die Punkte $A(4|1|0)$, $B(0|1|-1)$ und $C(2|3|0{,}5)$.
a) Zeichnen Sie die Punkte in das übliche Koordinatensystem ein. Entscheiden Sie, ob die Punkte auf einer Geraden liegen.
b) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem, das um die x_3-Achse um 90° gedreht wurde und bei dem die x_1-Achse nach rechts und die x_2-Achse nach hinten verläuft. Tragen Sie die Punkte ein und überprüfen Sie Ihre Aussage aus a).
c) Wiederholen Sie das Vorgehen aus a) und b) mit $P(-1|-4|-1)$, $Q(5|5|2)$, $R(2|0{,}5|0{,}5)$.
d) Formulieren Sie eine allgemeine Aussage über die Darstellung im dreidimensionalen Koordinatensystem (Hinweis: P, Q und R liegen tatsächlich auf einer Geraden).

Hinweis zu 17:
Hier bietet sich die Verwendung einer dynamischen Geometriesoftware an.

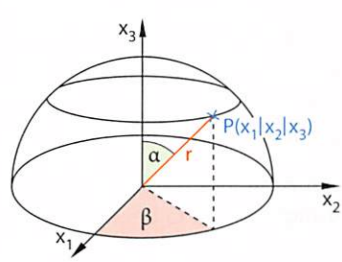
18. Senkrechte Projektion: Der Punkt B ergibt sich durch eine **senkrechte Projektion** des Punktes A auf die x_1x_2-Ebene. B entspricht dem Schattenpunkt von A auf der x_1x_2-Ebene, wenn das Licht senkrecht von oben auf diese Ebene fällt.



a) Geben Sie die Koordinaten von B an.
b) Die Punkte C und D ergeben sich durch eine Projektion des Punktes A auf die x_1x_3-Ebene bzw. auf die x_2x_3-Ebene. Geben Sie die Koordinaten an.

19. Spiegelung an einer Koordinatenebene: Der Punkt B ergibt sich durch eine **Spiegelung** des Punktes $A(4|-1|3)$ an der x_1x_2-Ebene.
a) Zeichnen Sie Punkt A in ein Koordinatensystem. Ermitteln Sie die Koordinaten von B.
b) Die Punkte C und D ergeben sich durch eine Spiegelung des Punktes A an der x_1x_3- bzw. an der x_2x_3-Ebene. Ermitteln Sie die Koordinaten von C und D.
c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes E, der sich ergibt, wenn A nacheinander an der x_1x_2-, der x_1x_3- und der x_2x_3-Ebene gespiegelt wird.

20. Ausblick: Die Lage eines Punktes im Raum kann auch durch seinen Abstand zum Ursprung $r \geq 0$ sowie zwei Winkel $0 \leq \alpha < 180°$ und $0 \leq \beta < 360°$ beschrieben werden. Die Koordinaten $(r|\alpha|\beta)$ beschreiben den Punkt $P(x_1|x_2|x_3)$.
Geben Sie r, α und β für die Punkte $A(1|0|0)$, $B(-2|0|0)$, $C(0|3|0)$, $D(1|1|0)$, $E(1|0|1)$ und $F(0|1|-1)$ an.



Info:
Diese Koordinaten werden als **Kugelkoordinaten** bezeichnet. Sie werden zum Beispiel bei der Beschreibung von Gravitationsfeldern verwendet.

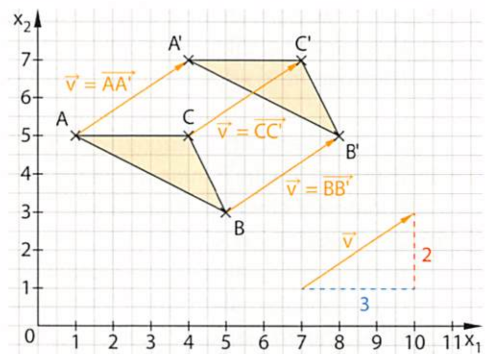
1.2 Vektoren

■ Auf der Karte sind verschiedene Winde mithilfe von Pfeilen dargestellt.

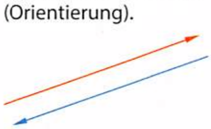
a) Geben Sie an, welche der Pfeile man als gleich bezeichnen könnte.
Beschreiben Sie, worin sich die übrigen Pfeile unterscheiden.

b) Erläutern Sie, wie sich die dargestellten Winde unterscheiden und wie dies durch die Pfeile verdeutlicht wird. ■

Bei der Verschiebung des Dreiecks ABC zu A'B'C' legen seine Eckpunkte den gleichen **Weg** zurück, nämlich 3 Einheiten in x_1-Richtung und 2 Einheiten in x_2-Richtung. Diese Bewegung kann mit dem **Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit den Koordinaten 3 und 2 beschrieben werden.
Im Koordinatensystem stellen die Verbindungspfeile $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ und $\overrightarrow{CC'}$ alle den gleichen **Vektor** $\vec{v}$ dar, also $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$.



Hinweis:
Die abgebildeten Pfeile sind parallel zueinander, aber haben eine entgegengesetzte Richtung (Orientierung).



Allgemein werden Vektoren mit Kleinbuchstaben und einem Pfeil darüber bezeichnet und im Koordinatensystem durch **Vektorpfeile** dargestellt. Alle Vektorpfeile mit gleicher **Länge** und gleicher **Richtung** beschreiben denselben Weg und sind damit Darstellungen desselben Vektors. Ein Vektor ist also nicht an einen Ort gebunden. Gleiche Richtung bedeutet, dass die Vektorpfeile **parallel zueinander** sind und die **gleiche Orientierung** (Richtung der Pfeilspitze) haben. Im Raum hat ein Vektor drei Koordinaten, die angeben, wie viel man in x_1-, x_2- und x_3- Richtung geht.

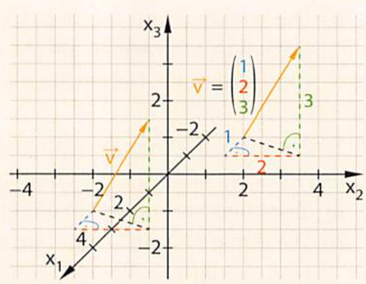
Hinweis:
Ist eine Koordinate eines Vektors negativ, so erfolgt die Verschiebung entgegen der Richtung der zugehörigen Koordinatenachse.

Wissen: Vektoren in der Ebene und im Raum

Ein **zweidimensionaler Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ beschreibt eine **Verschiebung in der Ebene.**

Ein **dreidimensionaler Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ beschreibt eine **Verschiebung im Raum.**

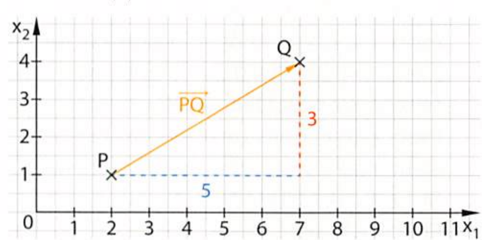
Geometrisch kann man einen Vektor durch einen **Vektorpfeil** darstellen, der gekennzeichnet ist durch seine **Länge** und **Richtung**.



Ein besonderer Vektor ist der **Nullvektor** $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Er hat keine Richtung.

Um den Punkt $P(2|1)$ zum Punkt $Q(7|4)$ zu verschieben, muss man $7 - 2 = 5$ Einheiten in x_1-Richtung und $4 - 1 = 3$ Einheiten in x_2-Richtung gehen.

Der zugehörige Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird als **Verbindungsvektor** $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet.



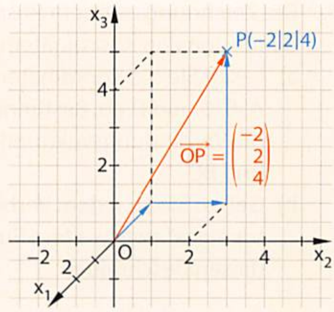
Wissen: Verbindungsvektoren und Ortsvektoren

Für den **Verbindungsvektor** von einem Punkt $P(p_1 | p_2 | p_3)$ zu einem Punkt $Q(q_1 | q_2 | q_3)$ gilt:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{OP}$ vom Koordinatenursprung O zu einem Punkt $P(p_1 | p_2 | p_3)$ heißt **Ortsvektor** von P:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



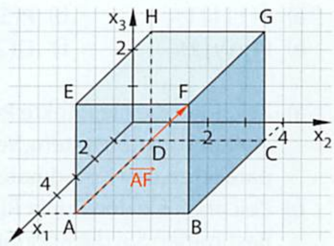
Hinweis:
Im zweidimensionalen Fall gilt entsprechend $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$.

Hinweis:
Die Koordinaten des Ortsvektors stimmen mit den Koordinaten des Punktes überein.

Beispiel 1: Die Punkte A, B, C, D, E, F, G und H sind die Ecken eines Quaders im dreidimensionalen Koordinatensystem.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A und F und damit den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AF}$.

b) Zeigen Sie, dass zwei weitere Ecken des Quaders denselben Verbindungsvektor haben.



Lösung:

a) Lesen Sie die Koordinaten von A und F aus der Zeichnung ab.
Der Vektor $\overrightarrow{AF}$ zeigt von A in Richtung F.
Subtrahieren Sie die Koordinaten von A von denen von F.

$A(5 | 1 | 0)$, $F(5 | 4 | 3)$

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 5-5 \\ 4-1 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Wählen Sie eine Diagonale, die parallel zu $\overline{AF}$ verläuft, und bestimmen Sie den Verbindungsvektor der Eckpunkte.

$D(1 | 1 | 0)$, $G(1 | 4 | 3)$ $\quad \overline{DG}$ parallel zu $\overline{AF}$

$$\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 4-1 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AF}$$

Basisaufgaben

1. Zeichnen Sie zum Vektor drei Vektorpfeile in ein Koordinatensystem. Geben Sie jeweils die Anfangs- und Endpunkte der Pfeile an.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Zeichnen Sie die Punkte und den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ und vergleichen Sie mit der Skizze.

a) $P(0 | 0)$, $Q(5 | -2)$ b) $P(2 | 3)$, $Q(7 | 4)$ c) $P(-4 | -3 | -1)$, $Q(0 | 4 | -2)$

d) $P(-1 | 4 | -2)$, $Q(2 | -3 | -4)$ e) $P(4 | 6 | 5)$, $Q(0 | 0 | 0)$ f) $P(7 | 3 | 1)$, $Q(7 | 3 | 1)$

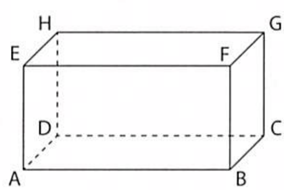
3. Ergänzen Sie die fehlenden Eckpunkte so, dass die Gleichung stimmt.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{E●}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{●G}$

c) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{C●}$ d) $\overrightarrow{H●} = \overrightarrow{GC}$

e) $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{A●} = \overrightarrow{●G}$ f) $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{A●}$

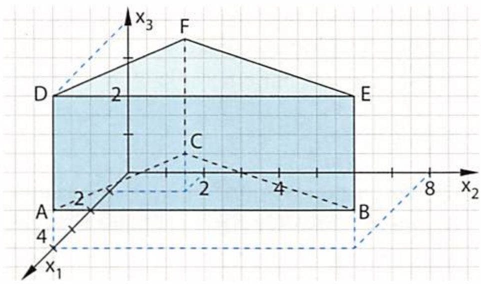
g) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{●●}$ h) $\overrightarrow{●●} = \overrightarrow{AH}$



4. Die Zeichnung zeigt ein Prisma im dreidimensionalen Koordinatensystem.

a) Lesen Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C und D ab. Bestimmen Sie damit die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$.

b) Geben Sie zu jedem Verbindungsvektor aus a) zwei weitere Punkte an, die diesen beschreiben.



5. Es sei $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P bzw. Q.

a) $P(1|1|1)$ b) $P(5|4|7)$ c) $P(0|0|0)$ d) $P(12|-5|-7)$
e) $P(x|y|z)$ f) $Q(2|3|2)$ g) $Q(-8|7|-3)$ h) $Q(x|y|z)$

6. a) Zeichnen Sie die Punkte $P(4|1|0)$ und $Q(3|3|4)$ und den Vektorpfeil von P nach Q in ein Koordinatensystem. Veranschaulichen Sie die Koordinaten von $\overrightarrow{PQ}$ durch Hilfslinien parallel zu den Koordinatenachsen.

b) Zeichnen Sie den Punkt $R(2|-1|1)$ ein und von dort ausgehend den Vektorpfeil von $\overrightarrow{PQ}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Endpunktes S, für den $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ gilt.

c) Tarek meint: *„Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ verbindet nicht nur die Punkte P und Q, sondern auch die Punkte R und S."* Hat er Recht? Begründen Sie.

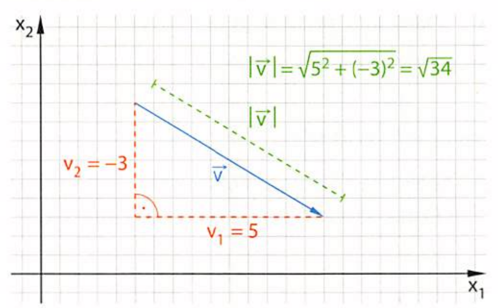
d) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes T an, dessen Ortsvektor gleich $\overrightarrow{PQ}$ ist.

e) Svea meint: *„Während die Koordinaten eines Punktes einen Ort beschreiben, beschreiben die Koordinaten eines Vektors einen Weg."* Nehmen Sie dazu Stellung. Erläutern Sie den Unterschied zwischen einem Punkt und einem Vektor.

Betrag eines Vektors – Abstand zweier Punkte

Der **Betrag** $|\vec{v}|$ eines Vektors $\vec{v}$ bezeichnet die gemeinsame Länge seiner Pfeile.

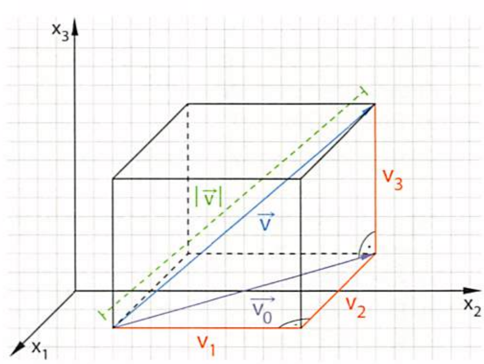
Aus den Koordinaten eines zweidimensionalen Vektors $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ergeben sich die Kathetenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks. Für $|\vec{v}|$ gilt dann nach dem Satz des Pythagoras:
$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$



Bei einem dreidimensionalen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ entspricht ein Pfeil der Raumdiagonale eines Quaders. Um seine Länge zu ermitteln, wird der Satz des Pythagoras zweimal angewendet.

① Flächendiagonale:
$|\vec{v_0}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ mit $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

② Raumdiagonale:
$$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v_0}|^2 + v_3^2} = \sqrt{\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + v_3^2}$$
$$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$



Definition: Betrag eines Vektors in der Ebene oder im Raum

Der **Betrag** $|\vec{v}|$ eines Vektors $\vec{v}$ ist die Länge seiner Vektorpfeile im Koordinatensystem.

Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Hinweis:
Der Betrag eines Vektors wird auch als **Länge** des Vektors bezeichnet.

Der Nullvektor hat damit den Betrag $|\vec{0}| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ bzw. $|\vec{0}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$.

Beispiel 2: Betrag eines Vektors im Raum

Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Berechnen Sie die Quadrate der einzelnen Koordinaten. Addieren Sie diese und ziehen Sie anschließend die Wurzel.

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 0 + 4} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$$

Der Abstand zweier Punkte P und Q entspricht der Länge der Strecke $\overline{PQ}$ und somit dem Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PQ}$.

Wissen: Abstand zweier Punkte im Raum

Für den **Abstand** zweier Punkte $P(p_1\,|\,p_2\,|\,p_3)$ und $Q(q_1\,|\,q_2\,|\,q_3)$ gilt:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left|\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Beispiel 3: Abstand zweier Punkte im Raum

Berechnen Sie den Abstand der Punkte $P(1\,|\,-6\,|\,-2)$ und $Q(-3\,|\,0\,|\,4)$.

Lösung:

Bestimmen Sie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ und berechnen Sie dessen Betrag. Die Punkte P und Q haben einen Abstand von etwa 9,38 LE.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 - 1 \\ 0 - (-6) \\ 4 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{88} \approx 9{,}38$$

Basisaufgaben

7. Zeichnen Sie einen Vektorpfeil des Vektors $\vec{v}$ in ein Koordinatensystem (LE: 1 cm) und messen Sie die Länge des Pfeils. Kontrollieren Sie, indem Sie den Betrag des Vektors berechnen.
   a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ e) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

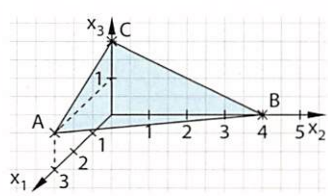
8. Berechnen Sie den Betrag des Vektors.
   a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungen zu 8:
teilweise gerundet

8 9 0 3 2,83 6,16

9. Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und Q.
   a) $P(3\,|\,-2\,|\,6)$, $Q(0\,|\,2\,|\,6)$ b) $P(4\,|\,1)$, $Q(-2\,|\,-2)$
   c) $P(0\,|\,5)$, $Q(12\,|\,0)$ d) $P(5\,|\,-3\,|\,1)$, $Q(6\,|\,-2\,|\,-1)$
   e) $P(3\,|\,9\,|\,2)$, $Q(0\,|\,0\,|\,0)$ f) $P(2\,|\,13\,|\,7)$, $Q(2\,|\,13\,|\,7)$

10. Bestimmen Sie die Seitenlängen des abgebildeten Dreiecks ABC.



Weiterführende Aufgaben

11. a) Zeichnen Sie einen Vektorpfeil des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in ein zweidimensionales Koordinatensystem. Berechnen Sie den Betrag von $\vec{v}$.

b) Zeichnen Sie Vektorpfeile von vier Vektoren ein, die die gleiche Richtung haben wie $\vec{v}$, aber alle einen anderen Betrag. Geben Sie Koordinaten und Betrag der Vektoren an.

c) Zeichnen Sie Vektorpfeile von vier Vektoren ein, die den gleichen Betrag haben wie $\vec{v}$, aber in unterschiedliche Richtung zeigen. Geben Sie die Koordinaten der Vektoren an.

12. **Stolperstelle:** Es ist $P(3|-5|2)$ und $Q(2|2|1)$. Leon sagt: *„Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ kann nicht Ortsvektor eines Punktes sein, weil er nicht am Ursprung beginnt."* Nehmen Sie dazu Stellung.

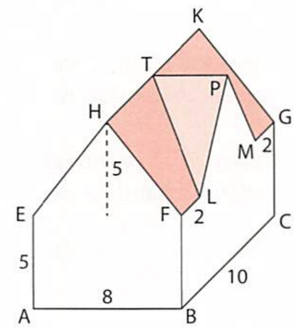
13. Zeigen Sie, dass der Betrag eines Vektors immer mindestens so groß ist wie der Betrag der betragsgrößten Koordinate. Erklären Sie, in welchen Fällen beide Werte gleich sind.

14. Die Maße des abgebildeten Hauses mit einer Dachgaube sind in Meter angegeben.

a) Zeichnen Sie das Haus in ein Koordinatensystem und geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{LT}$ an.

b) Vergleichen Sie Ihre Lösungen aus a) mir Ihrem Nachbarn. Begründen Sie, dass die Lösungen nicht von der Lage des Hauses im Koordinatensystem abhängen.

c) Berechnen Sie die Beträge der Vektoren aus Teil a).



15. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig oder sogar gleichseitig ist.

a) $A(3|1|2)$, $B(1|5|5)$, $C(-2|-1|2)$

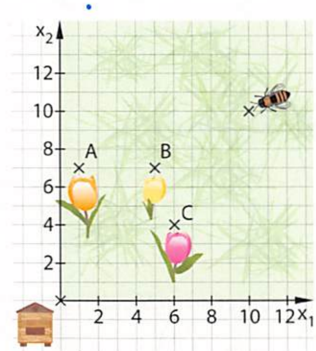
b) $A(5|-5|10)$, $B(2|-2|3)$, $C(2|-5|10)$

16. Skizzieren Sie das Viereck ABCD in ein Koordinatensystem. Prüfen Sie, ob es eine Raute ist.

a) $A(0|-2|1)$, $B(-4|1|-1)$, $C(-4|6|1)$, $D(0|3|3)$

b) $A(1|-2|1)$, $B(5|1|0)$, $C(3|3|-2)$, $D(-1|0|-1)$

17. Eine kleine Biene befindet sich auf dem Rückflug zu ihrem Bienenstock im Koordinatenursprung. Beim Überfliegen von Punkt $P(10|10)$ entdeckt sie drei Blumen auf der Wiese. Ermitteln Sie, in welcher Reihenfolge die Biene diese Blumen anfliegen sollte, damit ihr Weg am kürzesten ist.



18. Ein mit Helium gefüllter Luftballon bewegt sich durch Wind und seinen Auftrieb durch die Luft. Innerhalb einer Sekunde bewegt er sich von $P(0|0|7)$ nach $Q(2|-1|9)$, wobei eine Längeneinheit im Koordinatensystem ein Meter ist. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Ballons in km/h.

19. **Ausblick:** Beschreiben Sie die Menge aller Punkte P in der Ebene bzw. im Raum mit den angegebenen Eigenschaften.

a) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 = 2$

b) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{OP}| = 1$

c) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 = x_2$

d) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $x_2 = -3$

e) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1 = x_3$

f) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{OP}| = 2$

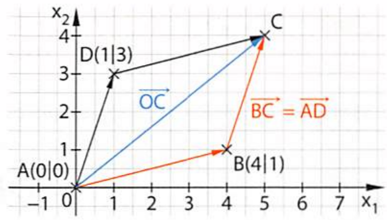
1.3 Addition und Subtraktion von Vektoren

■ Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

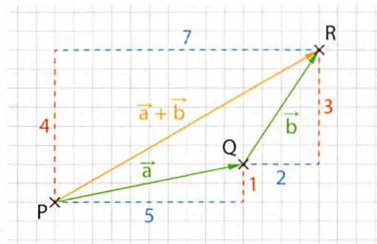
a) Begründen Sie, dass dann gilt:
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Punktes C des Parallelogramms.

c) Geben Sie an, wie Sie die Koordinaten von C mithilfe der Ortsvektoren von B und D berechnen. ■



Vektoren kann man addieren. Geht man vom Punkt P aus mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Punkt Q und von dort mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zum Punkt R, dann zeigt der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ vom Startpunkt P zum Endpunkt R, es ist $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PR}$ oder $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
Mit $\vec{a}$ geht man 5 in x_1-Richtung, mit $\vec{b}$ danach 2, also geht man insgesamt 7 in x_1-Richtung. Ebenso geht man insgesamt $1 + 3 = 4$ in x_2-Richtung.
Zu $\overrightarrow{PR}$ gehört also der Vektor $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5+2 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

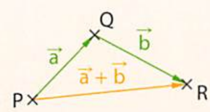


Hinweis:
Man kann sich vorstellen, dass der Summenvektor den zurückgelegten Weg in „Luftlinie" darstellt.

Die Koordinaten des Summenvektors $\vec{a} + \vec{b}$ ergeben sich durch Addition der entsprechenden Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dies ist auch bei dreidimensionalen Vektoren der Fall.

Wissen: Addition von Vektoren
Vektoren werden koordinatenweise addiert:

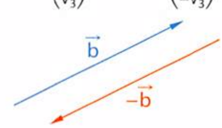
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



Setzt man an der Pfeilspitze von $\vec{a}$ einen Vektorpfeil von $\vec{b}$ an, so zeigt der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ vom Anfang von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$. Es gilt: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

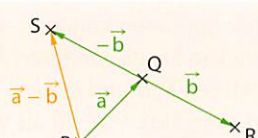
Zu jedem Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ist $-\vec{b} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}$ der **Gegenvektor.** Seine Pfeile haben die gleiche Länge wie $\vec{b}$, aber zeigen in die entgegengesetzte Richtung. Es gilt $\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$.
Mit dem Gegenvektor erhält man eine **Subtraktion von Vektoren:** $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
Man rechnet: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hinweis:
Der **Gegenvektor** zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ist $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$.



Wissen: Subtraktion von Vektoren
Vektoren werden koordinatenweise subtrahiert:

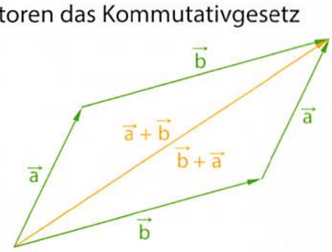
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Die Subtraktion eines Vektors entspricht der Addition des Gegenvektors: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Am Parallelogramm erkennt man, dass für die Addition von Vektoren das Kommutativgesetz gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
Dies kann man auch rechnerisch zeigen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$



Man führt das Kommutativgesetz für Vektoren also auf jenes für reelle Zahlen zurück. Ähnlich kann man auch bei anderen Rechengesetzen vorgehen.

Hinweis:
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
$\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$
$\vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}$
$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

Wissen: Rechenregeln
Für zwei- oder dreidimensionale Vektoren gelten die folgenden Regeln.
Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ **Assoziativgesetz:** $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Beispiel 1: Vektoren addieren und subtrahieren
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
a) Berechnen Sie $\vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
b) Stellen Sie $\vec{a} - \vec{b}$ zeichnerisch dar und vergleichen Sie mit der Rechnung.

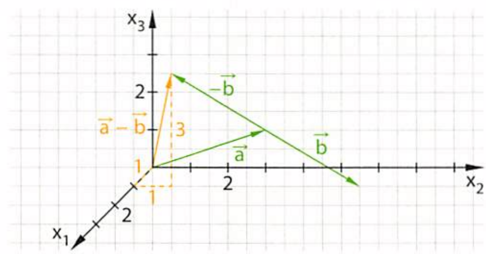
Lösung:
a) Subtrahieren Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{b}$ von denen des Vektors $\vec{a}$.

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

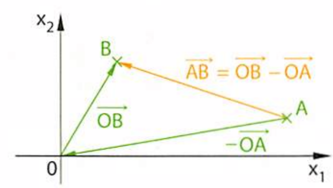
Rechnen Sie auch bei mehreren Vektoren koordinatenweise.

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2+1-(-2) \\ 4+3-0 \\ 2+(-1)-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Zeichnen Sie beginnend an der Spitze von $\vec{a}$ einen Vektorpfeil zu $(-\vec{b})$. Der Pfeil vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zur Spitze von $(-\vec{b})$ steht für den Differenzvektor $\vec{a} - \vec{b}$.

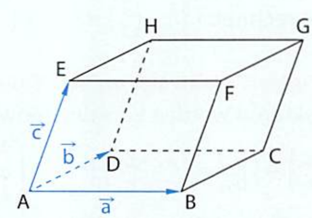


Bei der **Bestimmung eines Verbindungsvektors** $\overrightarrow{AB}$ muss man darauf achten, welcher Ortsvektor von welchem subtrahiert werden muss. Hier hilft die Vorstellung: Um von A nach B zu gelangen, geht man zuerst von A zum Ursprung, also $-\overrightarrow{OA}$ und anschließend vom Ursprung zu B:
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$



Hinweis:
Beim Bestimmen von Vektoren in geometrischen Figuren hilft die Vorstellung, dass man aus bekannten Vektoren einen **Weg** zusammensetzt. Der gesuchte Vektor ist dann die Summe dieser „Wegabschnitte".

Beispiel 2: Vektoren in geometrischen Figuren
Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen ausgehend vom Punkt A einen sogenannten Spat auf, der von Parallelogrammen begrenzt wird.
a) Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{HB}$ durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.
b) Drücken Sie $\vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$ als Verbindungsvektor zweier Eckpunkte aus.



Hinweis:
Wenn Sie gegen die Pfeilrichtung gehen, müssen Sie den Vektor subtrahieren.

Lösung:
a) Suchen Sie einen Weg von A bis C bzw. von H bis B entlang der Kanten des Spats. Berücksichtigen Sie, dass Sie die gekennzeichneten Pfeile von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zu den parallelen Kanten verschieben können.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$
$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB}$
$= \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{BF}$
$= \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

b) Der einzig geeignete Startpunkt ist D. Gehen Sie von dort aus nacheinander entlang der Vektoren $\vec{c}$, $-\vec{b}$ und $\vec{a}$. So gelangen Sie zu den Punkten H, E und F.

$\vec{c} - \vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}$
$= \overrightarrow{DF}$

Basisaufgaben

1. Berechnen Sie.

a) $\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3{,}7\\4\\-6{,}2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1{,}5\\0{,}3\\-12{,}1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-4\\-11\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8\\5\\-10\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}7\\3\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

Lösungen zu 1:
Koordinaten der Vektoren a)–c)

−1 4 13 −12 2,2 4,3 −18,3 −16 11

2. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

3. a) Geben Sie den Gegenvektor zu $\vec{v}$ an. ① $\vec{v}=\begin{pmatrix}10\\4\\-6\end{pmatrix}$ ② $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\-11\\0\end{pmatrix}$

b) Beschreiben Sie, wie sich Länge, Richtung und Orientierung von Vektor und Gegenvektor zueinander verhalten.

4. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ zu $P(2|-3|1)$ und $Q(-4|2|3)$ kann auf verschiedene Arten berechnet werden. Entscheiden Sie, welche Art Sie am besten finden.

a) Berechnen Sie $\overrightarrow{PQ}$ mit der Formel aus dem Wissen von Abschnitt 1.2 auf Seite 13.

b) Berechnen Sie $\overrightarrow{PQ}$ mit der Methode, die unter Beispiel 1 vorgeschlagen wird. Verdeutlichen Sie den Rechenweg durch eine Skizze.

c) Berechnen Sie $\overrightarrow{PQ}$, indem Sie die Gleichung $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$ lösen. Drücken Sie diese Gleichung in einem Satz aus und veranschaulichen Sie sie an einer Skizze.

5. Bestimmen Sie zu den Punkten $P(6|-3|9)$ und $Q(-1|-2|3)$ die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QP}$. Geben Sie an, welche Beziehung zwischen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QP}$ besteht.

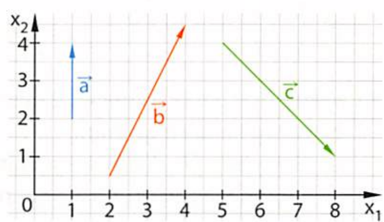
6. Vereinfachen Sie so, dass das Ergebnis aus einem einzigen Vektor besteht.
Beispiel: $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{RQ}$ c) $\overrightarrow{TS}+\overrightarrow{ST}$ d) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$
e) $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{GH}$ f) $-\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{PS}$ g) $\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{LM}$ h) $\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{WU}+\overrightarrow{VW}$

Hinweis zu 6:
Für alle Punkte P gilt:
$\overrightarrow{PP}=\vec{0}$ und $-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP}$

7. Führen Sie die Rechnung geometrisch im Heft aus und zeichnen Sie einen Vektorpfeil des Ergebnisvektors. Überprüfen Sie die Koordinaten des Ergebnisvektors rechnerisch.

a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $\vec{b}+\vec{a}$
c) $\vec{a}+\vec{a}-\vec{b}$ d) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
e) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ f) $\vec{b}-(\vec{c}+\vec{a})$



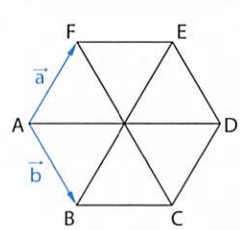
8. Ordnen Sie jeder Rechnung das richtige Ergebnis auf den Kärtchen zu.

a) $\vec{a}+\vec{0}$ b) $\vec{0}+\vec{a}$ c) $\vec{a}-\vec{0}$
d) $\vec{0}-\vec{a}$ e) $\vec{a}+(-\vec{a})$ f) $\vec{a}-\vec{a}$
g) $|\vec{0}|$ h) $|-\vec{a}+\vec{a}|$ i) $\vec{0}-(-\vec{a})$

9. Gegeben ist das regelmäßige Sechseck ABCDEF.

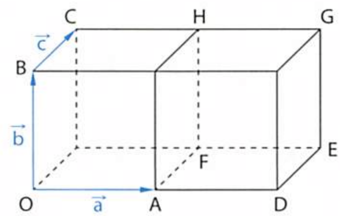
a) Drücken Sie die Summe $\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}$ als Verbindungsvektor zweier Eckpunkte aus.

b) Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ und $\overrightarrow{AD}$ mithilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus. Verwenden Sie hierzu auch Summen und Gegenvektoren.



Weiterführende Aufgaben

10. Die Zeichnung zeigt einen aus zwei Würfeln zusammengesetzten Quader.
Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{EB}$ und $\overrightarrow{BD}$ durch die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus. Verwenden Sie hierzu auch Summen und Gegenvektoren.



11. Berechnen Sie die Koordinaten des fehlenden Punktes, sodass ABCD ein Parallelogramm ist. Überprüfen Sie durch eine Skizze.

a) $A(0|-2|1)$, $B(1|2|4)$, $C(-2|-2|4)$ b) $A(2|-1|-2)$, $B(1|3|1)$, $D(-1|0|2)$

12. Stolperstelle: Nehmen Sie Stellung zu den Aussagen der Schüler. Erläutern Sie Fehler und Fehlvorstellungen.
Lea: *„Wenn $\vec{a}$ den Betrag 3 und $\vec{b}$ den Betrag 4 hat, dann hat $\vec{a}+\vec{b}$ den Betrag 7."*
Tim: *„Nein, $\vec{a}$ + b muss den Betrag 5 haben, wegen des Satzes des Pythagoras."*
Tatjana: *„Man weiß nicht, welchen Betrag $\vec{a}+\vec{b}$ hat, aber er kann nicht größer als 7 sein."*
Niels: *„Und er muss mindestens 1 sein."*

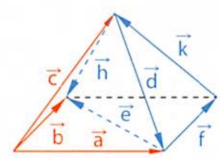
13. Dreiecksungleichung: Für Vektoren gilt die **Dreiecksungleichung:** $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

a) Überprüfen Sie die Ungleichung mit den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

b) Begründen Sie die Ungleichung anschaulich.

c) Geben Sie Beispiele für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an, für die gilt: $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$
Erklären Sie, was $\vec{a}$ und $\vec{b}$ allgemein erfüllen müssen, damit diese Gleichung gilt.

14. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ legen eine quadratische Pyramide fest. Schreiben Sie die Vektoren $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{k}$ und $\vec{h}$ als Summen oder Differenzen von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.



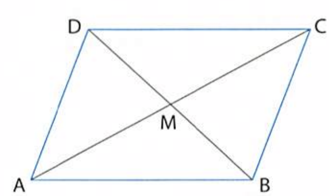
15. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$.

a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix} + \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} - \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$

16. Wenn sich die Diagonalen eines Vierecks halbieren, dann ist es ein Parallelogramm.

a) Beweisen Sie die Aussage mithilfe der Abbildung, indem Sie zeigen, dass gegenüberliegende Seiten durch den gleichen Vektor beschrieben werden.

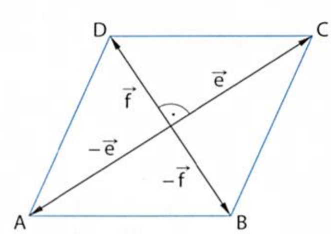
b) Zeigen Sie, dass die Bedingung $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ebenfalls hinreichend dafür ist, dass ein Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.



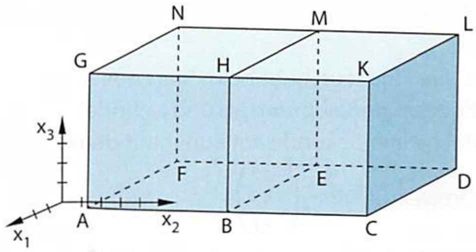
17. Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn seine Diagonalen sich gegenseitig halbieren und senkrecht aufeinander stehen.

a) Nutzen Sie dies, um zu zeigen, dass die Vektoren
$\vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen.

b) Beschreiben Sie allgemein, wie man prüfen kann, ob zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen.



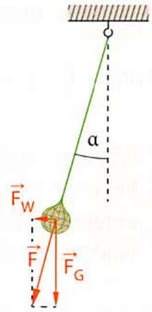
18. Der Körper besteht aus zwei gleich großen Würfeln. Es ist $A(1|2|0)$, $B(-5|5|-2)$, $F(3|8|3)$ und $G(-2|0|6)$.



a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Kanten $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{AG}$ gleich lang sind.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C, L und M.
c) Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{CH}$ und $\overrightarrow{DG}$ durch $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{AG}$ aus und berechnen Sie ihre Koordinaten.
d) Prüfen Sie rechnerisch, ob $\overrightarrow{CN}$ doppelt so lang ist wie $\overrightarrow{BN}$.
e) Begründen Sie: $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AK}$

19. Der Schiffsarzt schlendert über das Deck eines Kreuzfahrtschiffes. Seine Bewegung entspricht den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ gefolgt von $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.
a) Drücken Sie die Bewegung des Arztes durch einen einzigen Vektor aus.
b) Im gleichen Zeitraum legt das Schiff einen Weg gemäß $\vec{s} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$ zurück. Berechnen Sie die Positionsänderung des Arztes relativ zum Heimathafen.

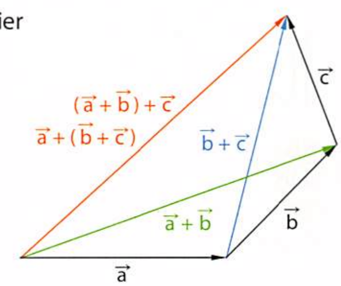
● **20.** Eine Kraft wird durch ihren Betrag und ihre Richtung festgelegt. Daher werden Kräfte durch Vektoren dargestellt. Wirken zwei Kräfte auf einen Körper in unterschiedliche Richtungen, so ist die auf den Körper wirkende Gesamtkraft gleich der Summe der einzelnen Kraftvektoren. Ein aufgehängter Meisenknödel erfährt eine Schwerkraft $\vec{F}_G$ von 1 N. Durch einen anhaltenden Wind wird auf ihn eine Kraft $\vec{F}_W$ von 0,28 N in waagerechte Richtung ausgeübt.



a) Berechnen Sie die Größe der Gesamtkraft $\vec{F}$.
b) Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α des Fadens, an dem der Knödel aufgehängt ist.

● **21.** Ein Flugzeug wird so gesteuert, dass es bei Windstille pro Stunde den durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ beschriebenen Weg zurücklegen würde. Es bewegt sich in einer konstanten Luftströmung, die durch den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ausgedrückt wird.
a) Berechnen Sie den effektiven Weg des Flugzeugs in einer Stunde.
b) Prüfen Sie, ob der Betrag seiner Geschwindigkeit über dem Erdboden durch die Luftströmung vergrößert wird.
c) Bestimmen Sie, wie das Flugzeug gesteuert werden muss, wenn es bei gleicher Luftströmung $\vec{w}$ pro Stunde über dem Erdboden den Weg $\vec{s} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ zurücklegen soll.

● **22.** **Ausblick:** Die Zeichnung veranschaulicht die Addition dreier Vektoren.

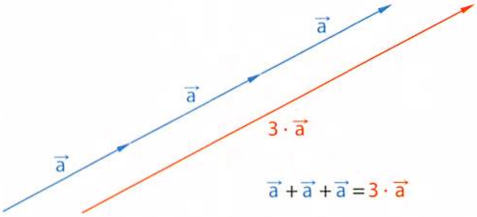


a) Formulieren Sie das Assoziativgesetz mit den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$. Kontrollieren Sie die Gültigkeit durch eine Rechnung.
b) Erläutern Sie die allgemeine Gültigkeit des Assoziativgesetzes anhand der Zeichnung.
c) Begründen Sie das Gesetz rechnerisch, indem Sie die Vektoren mit allgemeinen Koordinaten schreiben.

1.4 Vielfache von Vektoren

■ Ein Flugzeug hebt beim Start genau am Koordinatenursprung ab und befindet sich nach einer Sekunde am Punkt mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 35 \\ -45 \\ 21 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie, welchen Ortsvektor das Flugzeug bei gleichbleibender Bewegung nach jeweils 2, 3, 5 und 10 Sekunden hat. ■

Die mehrfache Addition desselben Vektors lässt sich (wie bei reellen Zahlen) einfacher durch eine Multiplikation beschreiben.
Für $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ schreibt man beispielsweise $3 \cdot \vec{a}$.
Der Vektor $3 \cdot \vec{a}$ hat die dreifache Länge von $\vec{a}$ und die gleiche Richtung.

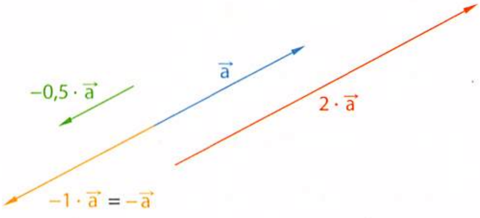


Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_1 + a_1 \\ a_2 + a_2 + a_2 \\ a_3 + a_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 \\ 3a_2 \\ 3a_3 \end{pmatrix}$

Hinweis:
Der Malpunkt hat hier zwei verschiedene Bedeutungen:
$r \cdot a_1$: Multiplikation zweier Zahlen.
$r \cdot \vec{a}$: Multiplikation einer Zahl (Skalar) mit einem Vektor. Man spricht auch von **skalarer Multiplikation**.

Wissen: Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl
Bei der Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl r wird jede Koordinate des Vektors mit der Zahl r multipliziert:
$r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$, $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$

Bei der Multiplikation eines Vektors $\vec{a} \neq \vec{0}$ mit einer Zahl r ergibt sich ein Vektor mit $|r|$-facher Länge. $r \cdot \vec{a}$ hat für $r > 0$ die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ und für $r < 0$ die entgegengesetzte Richtung.
In beiden Fällen liegen die Vektorpfeile von $\vec{a}$ und $r \cdot \vec{a}$ parallel zueinander. Man nennt solche Vektoren **kollinear**.



$(-1) \cdot \vec{a}$ ergibt den Gegenvektor $-\vec{a}$.

Definition: Kollineare Vektoren
Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ heißen **kollinear**, wenn es eine reelle Zahl r gibt mit $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$. Die Vektorpfeile kollinearer Vektoren sind parallel zueinander.

Beim Rechnen mit reellen Zahlen gilt unter anderem das Distributivgesetz $a(b + c) = ab + ac$.
Dieses gilt entsprechend auch bei der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen:

$$r \cdot \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(a_1 + b_1) \\ r(a_2 + b_2) \\ r(a_3 + b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + rb_1 \\ ra_2 + rb_2 \\ ra_3 + rb_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rb_1 \\ rb_2 \\ rb_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Wissen: Rechenregeln
Sind $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren und r, s reelle Zahlen, so gelten die Rechenregeln:
① $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$, $r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ (Distributivgesetze)
② $r \cdot (s \cdot \vec{a}) = s \cdot (r \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$
③ $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, $r \cdot \vec{0} = \vec{0}$
④ $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$

Beispiel 1: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4{,}5 \\ -9 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $(-2) \cdot \vec{a}$.

b) Prüfen Sie, ob $\vec{b}$ und $\vec{c}$ kollinear zu $\vec{a}$ sind.

Lösung:

a) Multiplizieren Sie jede Koordinate des Vektors mit dem Faktor –2.

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 \\ -2 \cdot 1{,}5 \\ -2 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

b) Setzen Sie den einen Vektor mit dem r-Fachen des anderen Vektors gleich. Sie erhalten dann für jede Koordinate eine Gleichung. Hat jede Gleichung für r dieselbe Lösung, so ist die Vektorgleichung mit diesem Wert lösbar und die Vektoren sind kollinear.
Sind die Lösungen unterschiedlich, so ist die Vektorgleichung nicht lösbar und die Vektoren sind nicht kollinear.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -2 = 3r \\ -1 = 1{,}5r \\ 4 = -6r \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -\frac{2}{3} = r \\ -\frac{2}{3} = r \\ -\frac{2}{3} = r \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} = r$$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 4{,}5 \\ -9 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 9 = 3r \\ 4{,}5 = 1{,}5r \\ -9 = -6r \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3 = r \\ 3 = r \\ 1{,}5 = r \end{array} \right|$$

$\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind nicht kollinear.

Basisaufgaben

1. Es ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie zu jedem der Vektoren $\vec{a}, \ldots, \vec{e}$ einen Vektorpfeil in ein Koordinatensystem. Geben Sie auch die Koordinaten der Vektoren an.
$\vec{a}$ $\quad \vec{b} = 2 \cdot \vec{a}$ $\quad \vec{c} = 1{,}5 \cdot \vec{a}$ $\quad \vec{d} = (-1) \cdot \vec{a}$ $\quad \vec{e} = (-3) \cdot \vec{a}$

2. Berechnen Sie.
a) $5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $(-4) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $0 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3{,}4 \\ -14 \end{pmatrix}$ e) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Schreiben Sie den Vektor als Produkt aus einer reellen Zahl und einem Vektor mit ganzzahligen Koordinaten.
a) $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2{,}3 \\ 6{,}1 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0{,}75 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$

Hinweis zu 3:
Beispiel:
$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. Schreiben Sie den Vektor als Produkt aus einer reellen Zahl und einem Vektor mit ganzzahligen Koordinaten von möglichst kleinem Betrag.
a) $\begin{pmatrix} 26 \\ 13 \\ -39 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 45 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 36 \\ -24 \\ 48 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ -63 \end{pmatrix}$

5. Geben Sie an, welcher der Vektoren kollinear zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist.
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -4{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

6. Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}$ f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

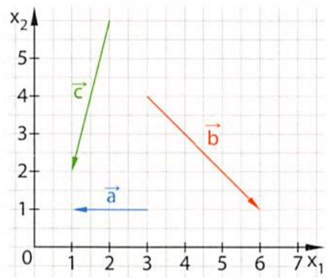
Lösungen zu 7:

20 −5 50 10 0 −8

7. Bestimmen Sie, für welche Werte der Variablen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ a \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 125 \\ 75 \\ v \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 10 \end{pmatrix}$

8. Führen Sie die Rechnung geometrisch im Heft aus und zeichnen Sie einen Vektorpfeil des Ergebnisvektors. Überprüfen Sie die Koordinaten des Ergebnisvektors rechnerisch.



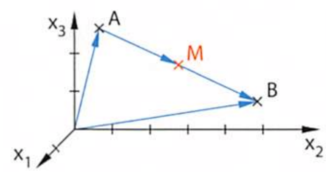
a) $4 \cdot \vec{a}$
b) $3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$
c) $2 \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{a}$
d) $\frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$
e) $2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{a} - \vec{c}$
f) $2 \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$
g) $2 \cdot (\vec{b} - \vec{c})$
h) $\vec{c} - 2 \cdot \vec{a} - \vec{b}$

9. Vereinfachen Sie die Terme nach den Rechengesetzen.

a) $5 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{a}$
b) $4 \cdot \vec{v} + 2 \cdot \vec{v} - 6 \cdot \vec{u} - \vec{v}$
c) $\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$
d) $\vec{c} + \frac{2}{3} \cdot [-\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot (-\vec{a} + \vec{b})]$
e) $\vec{v} - 1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}$
f) $3 \cdot (5 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v})$

Linearkombinationen von Vektoren

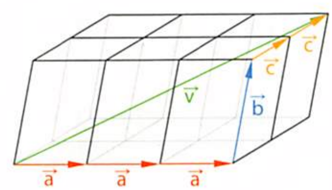
Der Ortsvektor des **Mittelpunktes M einer Strecke $\overline{AB}$** kann durch die Ortsvektoren von A und B ausgedrückt werden:



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$
$$= \overrightarrow{OA} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

Hinweis:
Der Malpunkt zwischen Zahl und Vektor kann weggelassen werden.

Wird ein Vektor durch andere Vektoren und deren Vielfache ausgedrückt, so nennt man ihn eine **Linearkombination** dieser Vektoren.
In der Abbildung gilt: $\vec{v} = 3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$
$\vec{v}$ ist eine Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.



Beispiel 2:
Prüfen Sie, ob $\vec{v}$ Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Setzen Sie $\vec{v}$ mit der Summe des r-Fachen von $\vec{a}$ und dem s-Fachen von $\vec{b}$ gleich. Sie erhalten damit für jede Koordinate eine Gleichung. Ist dieses Gleichungssystem lösbar, so ist $\vec{v}$ eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} 3r + s = 3 \\ 2r + 4s = -8 \\ -r + s = -5 \end{array} \right|$$

Lösung: $r = 2$, $s = -3$

Also gilt: $\vec{v} = 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$

b) Setzen Sie $\vec{v}$ mit $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ gleich und stellen Sie damit ein lineares Gleichungssystem auf. Es ergibt sich ein Widerspruch. Das Gleichungssystem hat keine Lösung.
Somit ist v keine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} 3r + s = 4 \\ 2r + 4s = 6 \\ -r + s = 3 \end{array} \right|$$

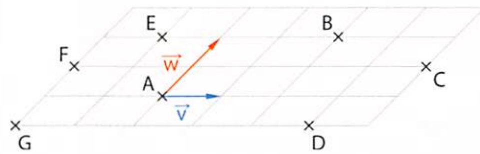
Lösung von (I) und (III):
$r = \frac{1}{4}$, $s = \frac{13}{4}$
Widerspruch in (II): $\frac{27}{2} = 6$
Also keine Darstellung als Linearkombination

Basisaufgaben

10. Berechnen Sie die Koordinaten der angegebenen Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Stellen Sie $\vec{a}$, $\vec{b}$ und den Ergebnisvektor in einem Koordinatensystem dar.

a) $\vec{a} + 4 \cdot \vec{b}$ b) $\frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{3}{2} \cdot \vec{b}$ c) $-2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$ d) $2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$

11. Die Vektorpfeile von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ verlaufen vom Punkt A aus entlang der Linien des Rasters. Schreiben Sie die folgenden Verbindungsvektoren als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

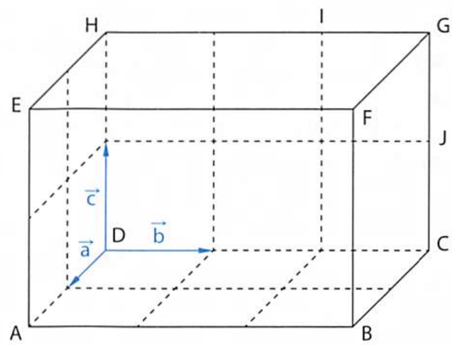


① $\overrightarrow{AB}$ ② $\overrightarrow{AC}$ ③ $\overrightarrow{AD}$ ④ $\overrightarrow{AE}$ ⑤ $\overrightarrow{AF}$ ⑥ $\overrightarrow{AG}$

12. a) Geben Sie folgende Verbindungsvektoren als Linearkombinationen von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an: $\overrightarrow{DF}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{DI}$; $\overrightarrow{DJ}$; $\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{HB}$; $\overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{JE}$.

b) Geben Sie einen Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten an, der durch die angegebene Linearkombination dargestellt wird.

① $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ② $2\vec{a} - 3\vec{b}$
③ $3\vec{b} - 2\vec{a}$ ④ $2\vec{c}$
⑤ $2\vec{b} + 2\vec{c}$ ⑥ $2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$



13. Prüfen Sie, ob $\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

14. Untersuchen Sie, ob $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der angegebenen Vektoren ist.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Weiterführende Aufgaben

15. Gegeben sind die Punkte A(3 | −7 | 2), B(5 | −11 | 8), C(5 | 1 | −2), D(0 | 1 | −7) sowie die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$. Prüfen Sie, welche der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ die gleiche Richtung haben.

16. Stolperstelle: Diskutieren Sie die folgenden Aussagen. Korrigieren Sie Fehlvorstellungen.

a) Maja: *„Das Produkt einer Zahl r und eines Vektors $\vec{a}$ hat immer den r-fachen Betrag von $\vec{a}$."*

b) Tom: *„Ein Vektor und sein Gegenvektor sind nicht kollinear, da sie in entgegengesetzte Richtungen zeigen."*

c) Lena: *„Der Vektor $2 \cdot \vec{v}$ ist doppelt so lang wie $\vec{v}$. Also lässt sich jeder Vektor, der doppelt so lang ist wie $\vec{v}$, als Vielfaches $2 \cdot \vec{v}$ oder $(-2) \cdot \vec{v}$ schreiben."*

17. Für den Betrag des Vielfachen eines Vektors gilt: $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$

a) Überprüfen Sie die Formel rechnerisch an diesen Beispielen:

① $r = 3; \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ② $r = 2; \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ③ $r = -4; \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ④ $r = 0; \vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Nutzen Sie diese Formel, um mit geringem Rechenaufwand $|\vec{v}|$ zu berechnen.

① $\vec{v} = \begin{pmatrix} 27 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix}$ ② $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ③ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 33 \\ 11 \\ -55 \end{pmatrix}$ ④ $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

Hinweis zu 18:
Zu beliebigem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ ein Einheitsvektor.

18. Einheitsvektor: Einen Vektor mit dem Betrag 1 nennt man **Einheitsvektor**. Geben Sie zum gegebenen Vektor alle kollinearen Einheitsvektoren an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Hinweis zu 19:
Die Wahl der Verbindungsvektoren spielt bei der Untersuchung keine Rolle.

19. Punkte auf einer Geraden: Es wird untersucht, ob die Punkte $P(5|1|-2)$, $Q(15|9|6)$ und $R(0|-3|-6)$ auf einer Geraden liegen.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ kollinear sind. Erklären Sie, warum daraus folgt, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

b) Prüfen Sie, ob die Punkte $A(6|-7|4)$, $B(7|-13|5)$ und $C(-1|3{,}5|-2)$ auf einer Geraden liegen.

20. Mittelpunkt einer Strecke: Gegeben sind die Punkte $P(0|5|-1)$ und $Q(4|-7|5)$.

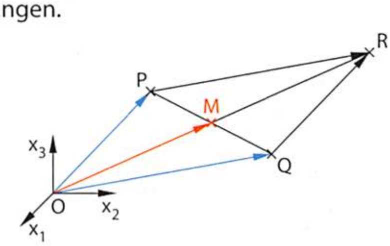
a) Berechnen Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ mithilfe der beiden Formeln $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$ und vergleichen Sie das Ergebnis.

b) Beschreiben Sie mit Worten, wie die Koordinaten des Mittelpunktes M mit den Koordinaten der Endpunkte P und Q zusammenhängen.

c) Die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren sich. Leiten Sie so die Formel $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$ her.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{PQ}$.

① $P(2|6)$, $Q(1|8)$ ② $P(-3|5|4)$, $Q(2|-3|4)$
③ $P(18|25|-7)$, $Q(0|-15|17)$



21. Gegeben ist das Viereck $A(4|-4|0)$, $B(2|2|-2)$, $C(0|6|0)$, $D(-4|-2|2)$.

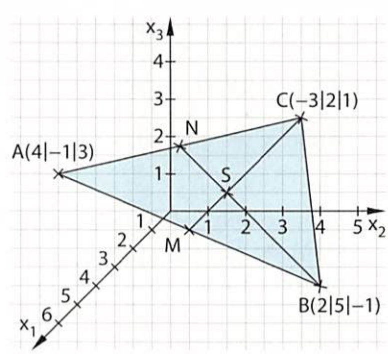
a) Berechnen Sie die Koordinaten der Seitenmitten des Vierecks.

b) Zeigen Sie, dass diese Seitenmitten ein Parallelogramm bilden.

c) Prüfen Sie, ob dieses Parallelogramm eine Raute ist.

22. a) Zeigen Sie, dass $M(3|2|1)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes N der Strecke $\overline{AC}$.

b) Der Schwerpunkt S eines Dreiecks teilt dessen Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1. Das heißt: Die Länge der Strecke $\overline{CS}$ beträgt $\frac{2}{3}$ der Länge der Strecke $\overline{CM}$. Die Länge der Strecke $\overline{BS}$ beträgt ebenso $\frac{2}{3}$ der Länge der Strecke $\overline{BN}$. Nutzen Sie dies, um die Koordinaten von S als Punkt der Strecke $\overline{CM}$ zu berechnen. Berechnen Sie S auch als Punkt der Strecke $\overline{BN}$.

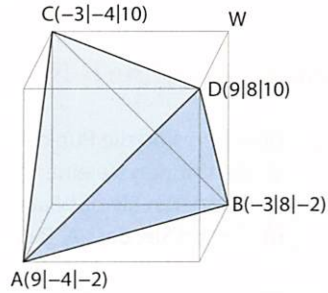


c) Zeigen Sie, dass für den Ortsvektor des Schwerpunktes gilt: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

23. a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

b) Zeigen Sie, dass $S(1\,|\,0\,|\,2)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.

c) Das Dreieck ABC bildet zusammen mit dem Punkt $D(9\,|\,8\,|\,10)$ einen regelmäßigen Tetraeder, welcher wie in der Skizze zu sehen, einem Würfel einbeschrieben ist. Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunktes W des in der Abbildung dargestellten Würfels. [Zur Kontrolle: $W(-3\,|\,8\,|\,10)$]

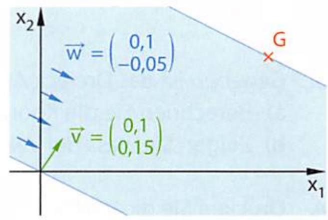


Hinweis zu 23b:
Eine Formel für den Schwerpunkt eines Dreiecks finden Sie in Aufgabe 22c.

d) Geben Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} und M_{DA} der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ an.

e) Untersuchen Sie, welche speziellen Eigenschaften das Viereck $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ hat.

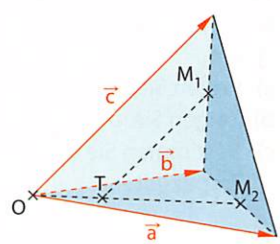
24. Im Ursprung des Koordinatensystems, am rechten Rand eines Kanals, schwimmt ein Frosch los. Bei stehendem Wasser würde er in 1 Sekunde einen Weg von $\vec{v}$ zurücklegen. Das Wasser fließt pro Sekunde um $\vec{w}$ (Längen in m).



a) Geben Sie den Vektor für den tatsächlichen Weg pro Sekunde an. Bestimmen Sie, wie viele Meter der Frosch in einer Stunde zurücklegt.

b) Wenn der Frosch Tempo und Richtung beibehält, wird er in $G(38\,|\,19)$ am anderen Ufer ankommen. Bestimmen Sie, nach wie vielen Sekunden das der Fall sein wird.

25. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beschreiben eine dreiseitige Pyramide. Die Punkte M_1 und M_2 sind Kantenmittelpunkte. Ferner ist $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OM_2}$.
Beweisen Sie, dass $\overrightarrow{TM_1}$ nicht parallel zu $\vec{c}$ ist.



26. Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schreiben lässt.
Begründen Sie, dass dies auch für beliebige vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gilt, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind.

27. Ausblick: Man kann mit Vektoren auch in höheren Dimensionen rechnen. Ein Hamburger enthält 20 g Fett, 36 g Kohlenhydrate, 26 g Eiweiß und 428 Kilokalorien (kcal). Man könnte diese Zahlen in einem Vektor zusammenfassen: $\vec{h} = \begin{pmatrix} 20 \\ 36 \\ 26 \\ 428 \end{pmatrix}$.

Eine Portion Pommes Frites enthält 15 g Fett, 38 g Kohlenhydrate, 3 g Eiweiß und 306 kcal, ein Becher Cola 60 g Kohlenhydrate und 240 kcal.

a) Berechnen Sie mithilfe von Addition und Vervielfachung von Vektoren, wie viel Fett/Kohlenhydrate/Eiweiß/Kalorien in drei Hamburgern, einer Portion Pommes und zwei Bechern Cola insgesamt enthalten sind.

b) Ermitteln Sie, wie viele Hamburger, Portionen Pommes und Becher Cola man zu sich nehmen muss, um genau 50 g Fett, 412 g Kohlenhydrate und 32 g Eiweiß zu erhalten. Stellen Sie zuerst eine Gleichung mit Vektoren auf. Berechnen sie auch, wie viele Kilokalorien man dann verzehrt hat.

1.5 Klausur- und Abiturtraining

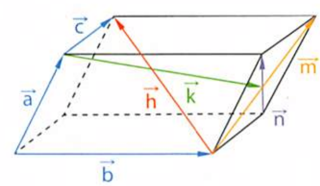
Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,0\,|\,3)$, $B(-1\,|\,3\,|\,-4)$ und $C(2\,|\,6\,|\,2)$.
   a) Bestimmen Sie einen Punkt D, sodass A, B, C, D die Ecken eines Parallelogramms bilden. Skizzieren Sie das Parallelogramm in ein Koordinatensystem.
   b) Zeigen Sie, dass A, B und C nicht drei Ecken einer Raute sein können.

2. Gegeben sind die Punkte $A(-2\,|\,5\,|\,3)$ und $B(-4\,|\,6\,|\,0)$.
   a) Geben Sie einen Vektor $\vec{v}$ an, der denselben Betrag wie der Vektor $\overrightarrow{AB}$ hat, aber zu diesem nicht kollinear ist.
   b) Sei $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 4-b \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Werte für a und b, sodass $\vec{w}$ kollinear zu $\overrightarrow{AB}$ ist.

3. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(-1\,|\,0\,|\,1)$, $B(3\,|\,8\,|\,-3)$ und $C(-5\,|\,6\,|\,5)$.
   a) Berechnen Sie die Koordinaten der Seitenmitten M_a, M_b und M_c des Dreiecks ABC.
   b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\overrightarrow{M_a M_b}$ kollinear zu $\overrightarrow{AB}$ ist und halb so lang wie dieser.

4. Drücken Sie die Vektoren $\vec{h}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$ und $\vec{n}$ in der Abbildung mithilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



5. Zeichnen Sie die Punkte $A(2\,|\,-1\,|\,0)$, $B(6\,|\,7\,|\,4)$, $C_1(-2\,|\,3\,|\,4)$, $C_2(2\,|\,5\,|\,6)$, $D(0\,|\,1\,|\,4)$ in ein Koordinatensystem.
   a) Prüfen Sie, welches der Vierecke ABC_1D und ABC_2D ein Trapez ist.
   b) Zeigen Sie, dass es sich um ein gleichschenkliges Trapez handelt.
   c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Seitenmitten M_a und M_c der beiden parallelen Trapezseiten.

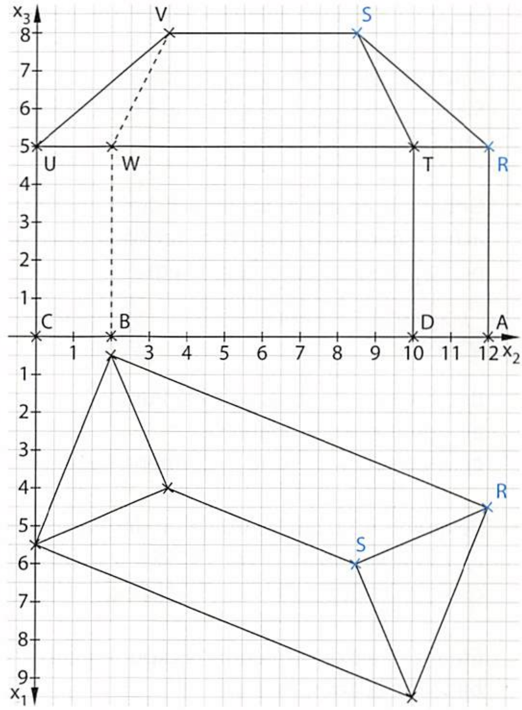
6. Ein Parallelogramm ist ein Rechteck, wenn seine Diagonalen gleich lang sind.
   a) Gegeben sind $A(2\,|\,2\,|\,5)$, $B(3\,|\,-2\,|\,8)$ und $D(0\,|\,0\,|\,3)$. Bestimmen Sie einen Punkt C so, dass ABCD ein Parallelogramm ist. Prüfen Sie, ob ABCD sogar ein Rechteck ist.
   b) Gegeben ist das Dreieck $A(6\,|\,7\,|\,-4)$, $B(1\,|\,6\,|\,-2)$, $C(5\,|\,0\,|\,5)$. Zeigen Sie, dass es bei B einen rechten Winkel hat, indem Sie zuerst einen Punkt D bestimmen, so dass ABCD ein Parallelogramm ist, und dann prüfen, ob dieses Parallelogramm ein Rechteck ist.
   c) Begründen Sie allgemein: Sind Punkte A, B und D gegeben, und gilt $|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$, so stehen die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$ senkrecht aufeinander.

7. Die Verhältnisse beim Segeln können in einem zweidimensionalen Koordinatensystem beschrieben werden. Die x_1-Richtung entspreche Osten, die x_2-Richtung Norden. Der Wind laut Wetterbericht kann durch einen Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \end{pmatrix}$ dargestellt werden (Angaben in km pro Stunde).

   a) Berechnen Sie die Windgeschwindigkeit.
   b) Die Geschwindigkeit eines Segelboots wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \end{pmatrix}$ beschrieben. Der scheinbare Wind, den die Insassen wahrnehmen, lässt sich aus $\vec{v}$ und dem Wind $\vec{w}$ bestimmen. Berechnen Sie den Vektor des scheinbaren Windes und seine Geschwindigkeit.

Aufgaben mit Hilfsmitteln

8. Die Skizze zeigt ein Haus mit Walmdach im Grundriss und im Aufriss. Eine Längeneinheit entspricht 1 m.
   a) Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte an und zeichnen Sie das Haus in ein dreidimensionales Koordinatensystem.
   b) Zeigen Sie, dass das Dreieck RTS gleichschenklig mit der Basis RT ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
   c) Stellen Sie $\overrightarrow{SV}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{TS}$, $\overrightarrow{VU}$ und $\overrightarrow{UT}$ dar. Begründen Sie, dass man $\overrightarrow{SV}$ nicht als Linearkombination von $\overrightarrow{TS}$, $\overrightarrow{TR}$ und $\overrightarrow{SR}$ darstellen kann.
   d) Bestimmen Sie die Mittelpunkte der Strecken $\overline{TU}$ und $\overline{SV}$. Berechnen Sie damit und mit dem Ergebnis aus b) den Flächeninhalt der gesamten Dachfläche.



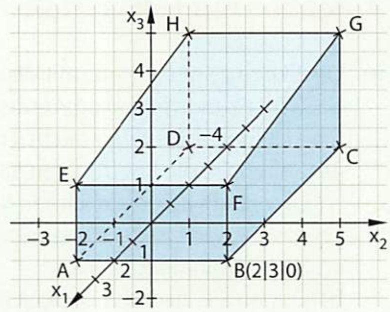
9. An der Mittelmeerküste wird ein unbekanntes Flugobjekt gesichtet, das im Punkt A(4 | 10 | 0) aus dem Meer aufsteigt. Es fliegt zunächst 6 Sekunden lang mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bis zur Position B(−5 | 7 | 6). Dort vollzieht es einen abrupten Kurswechsel und bewegt sich geradlinig weiter bis zur Position C(−2 | 2 | 8). Nach einem weiteren Kurswechsel in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, taucht es schließlich am Punkt D wieder ins Meer ein. Das Meer befindet sich in der x_1x_2-Ebene. (Alle Angaben in km)

   a) Skizzieren Sie die Flugbahn des UFOs in einem geeigneten Koordinatensystem für den Fall $\overrightarrow{CD} = 4\vec{v}$ und lesen Sie die (ganzzahligen) Koordinaten des Eintauchpunktes D ab.
   b) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten von D und vergleichen Sie sie mit dem Ergebnis aus a). Bestimmen Sie die Länge der Strecke, die das unbekannte Flugobjekt insgesamt zurückgelegt hat.
   c) Der Geschwindigkeitsrekord für ein Flugzeug (Turbojet) liegt bei 3529 km/h. Weisen Sie nach, dass das unbekannte Flugobjekt kein Flugzeug sein kann.
   d) Auf der Hälfte der Strecke von B nach C verlässt eine schwarze Kugel das UFO und schießt mit einer Geschwindigkeit von 5400 km/h senkrecht nach oben in den Himmel. Bestimmen Sie die Position der Kugel 4 Sekunden, nachdem sie das UFO verlassen hat.
   e) Weisen Sie nach, dass die abrupte Kursänderung an der Position B in einem rechten Winkel stattgefunden hat. Bestimmen Sie hierzu einen Punkt E, so dass ABCE ein Parallelogramm ist und zeigen Sie anschließend, dass es sich um ein Rechteck handelt.

Prüfen Sie Ihr neues Fundament

Lösungen ↗ S. 219

1. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A, C, D, E, F, G und H in der Zeichnung. Alle Kanten außer $\overline{FG}$ und $\overline{EH}$ sind parallel zu Koordinatenachsen.



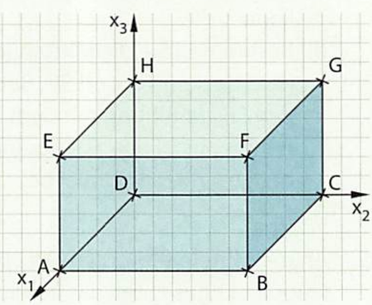
2. Zeichnen Sie ein Koordinatensystem und tragen Sie die Punkte A(3|5|4), B(−2|5|4), C(5|−4|−6) und D(−3|−3|−3) ein.

3. Geben Sie an, auf welchen der drei Koordinatenachsen und in welchen der drei Koordinatenebenen der angegebene Punkt liegt.

A(4|0|0) B(0|−2|0) C(0|0|10) D(0|0|0) E(0|0|−3) F(−7|0|0)

4. Beschreiben Sie die Lage aller Punkte,
   a) deren x_2-Koordinate 0 ist,
   b) deren x_1- und x_3-Koordinaten 0 sind,
   c) die in der x_1x_2- und x_1x_3-Ebene liegen,
   d) deren x_1-Koordinate −4 ist.

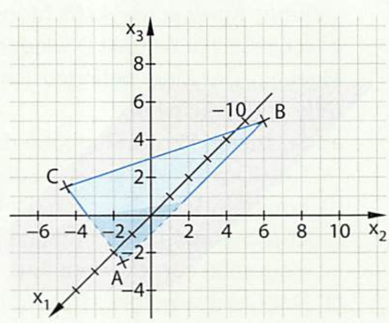
5. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{PQ}$.
   a) P(1|2); Q(0|0)
   b) P(1|2|−2); Q(3|4|5)
   c) P(0|0); Q(5|−2)
   d) P(1|k|2k); Q(k|2|0)



6. Ergänzen Sie die fehlenden Eckpunkte des abgebildeten Quaders im Heft.
   a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{C\blacksquare}$
   b) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{\blacksquare F}$
   c) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{\blacksquare\blacksquare}$
   d) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{\blacksquare\blacksquare}$

7. Berechnen Sie den Betrag des Vektors.
   a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
   c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
   d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$
   e) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$
   f) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

8. Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und Q.
   a) P(−3|2); Q(2|−1)
   b) P(1|2|−1); Q(2|3|4)
   c) P(0|2|−1); Q(2|0|−4)



9. Die Punkte A(−1|−2|−3), B(−2|5|4) und C(1|−4|2) bilden das Dreieck ABC.
   a) Prüfen Sie für diese Punkte die Gültigkeit der Gleichung $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
   b) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC.

10. Berechnen Sie.
   a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}2 \\ 0{,}03 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}07 \\ -0{,}8 \\ -2 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$
   d) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
   e) $-4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
   f) $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -3{,}6 \\ -2{,}1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1{,}1 \\ 3{,}2 \\ -1{,}7 \end{pmatrix}$

Lösungen
↗ S. 219/220

11. Vereinfachen Sie den Term nach den Rechengesetzen für Vektoren.

a) $2\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})+3\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})-4\cdot(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})$

b) $t\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})+(1-t)\cdot(2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})$

12. Berechnen Sie auf geschickte Weise den Betrag des Vektors, indem Sie zuerst einen gemeinsamen Faktor der Koordinaten bestimmen.

a) $\vec{v}=\begin{pmatrix}49\\-42\\42\end{pmatrix}$ b) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-0{,}2\\0{,}2\\0{,}1\end{pmatrix}$ c) $\vec{v}=\begin{pmatrix}24\\-36\\72\end{pmatrix}$ d) $\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{18}\\\frac{2}{9}\\\frac{4}{9}\end{pmatrix}$

13. Geben Sie an, welcher der Vektoren kollinear zum Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$ ist.

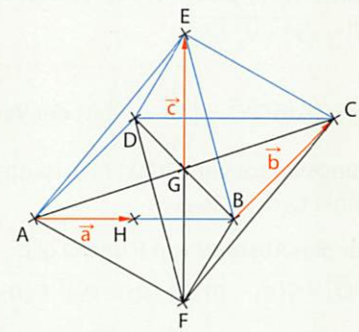
$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\10\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-10\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}\\\frac{5}{6}\end{pmatrix}$; $\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$

14. Die Abbildung zeigt einen regelmäßigen Oktaeder. Der Punkt H ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Geben Sie an, welchen Verbindungsvektor zweier Punkte die Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellt.

① $-2\vec{c}$ ② $2\vec{a}+\vec{b}$

③ $\vec{c}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ ④ $-\vec{c}-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

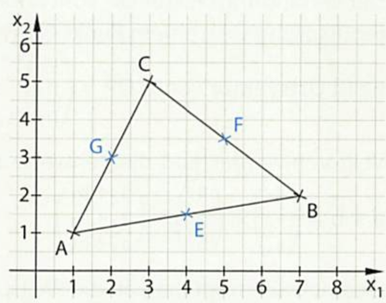
⑤ $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$ ⑥ $2\vec{a}-\vec{b}$



15. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(7 | 2) und C(3 | 5).

a) Beschreiben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Differenz von Ortsvektoren der Eckpunkte A, B und C.

b) Beschreiben Sie die Ortsvektoren der Mittelpunkte E, F und G der Dreiecksseiten als Linearkombination von Ortsvektoren oder Verbindungsvektoren der Eckpunkte des Dreiecks.



16. Gegeben sind die Punkte A(−1 | −2 | 1), B(7 | 2 | 2) und C(11 | 9 | 6).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

b) Prüfen Sie, ob ABCD eine Raute ist.

17. Durch A(−1 | −2 | 1), $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$ ist ein Viereck ABCD gegeben.

a) Bestimmen Sie die Variable a so, dass ABCD ein Trapez ist.

b) Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte an.

18. Eine Fähre legt im Punkt A(−100 | 500) am Ufer eines Flusses ab. Bei stehendem Gewässer würde sie sich pro Minute um den Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}150\\-100\end{pmatrix}$ bewegen (1 LE = 1 m). Die Fließgeschwindigkeit des Wassers pro Minute ist durch $\vec{w}=\begin{pmatrix}-100\\-50\end{pmatrix}$ gegeben.

a) Geben Sie den Vektor der tatsächlichen Bewegung der Fähre pro Minute an.

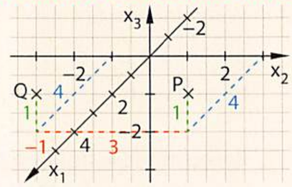
b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Fähre in m/min und km/h.

c) Ermitteln Sie, wie viele Minuten die Fähre zum Punkt B(100 | −100) benötigt.

Punkte im Raum

Die Lage eines Punktes im Raum gibt man in der Form $P(x_1|x_2|x_3)$ mit **drei Koordinaten** an. Diese geben an, wo in Bezug auf die Richtung der jeweiligen **Koordinatenachse** sich der Punkt im **dreidimensionalen Koordinatensystem** befindet.

Punkte $P(4|3|1)$ und $Q(4|-1|1)$ im dreidimensionalen Koordinatensystem



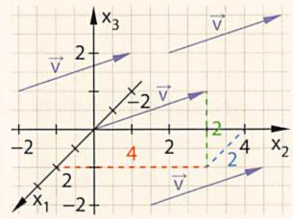
Vektoren

Ein **dreidimensionaler Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ beschreibt eine **Verschiebung im Raum.** Die zugehörigen **Vektorpfeile** sind durch ihre **Länge** und **Richtung** gekennzeichnet.

Der **Betrag** $|\vec{v}|$ eines Vektors ist die Länge seiner Vektorpfeile im Koordinatensystem.

$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ wird durch Pfeile im Koordinatensystem dargestellt.



Betrag: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} \approx 4{,}9$

Orts- und Verbindungsvektoren

Der Vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$ ist der **Verbindungsvektor** vom Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ zum Punkt $Q(q_1|q_2|q_3)$.

Für den **Abstand** von P und Q gilt:

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$

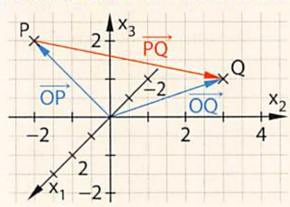
Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{OP}$ vom Koordinatenursprung O zu einem Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ heißt **Ortsvektor** von P: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$P(2|-1|3)$
$Q(2|4|2)$

Ortsvektoren:

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$



Verbindungsvektor: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-(-1) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Abstand von P und Q:

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}1$

Addition von Vektoren

Vektoren werden koordinatenweise addiert:

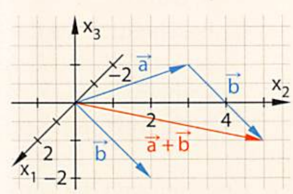
$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

Geometrisch trägt man an die Pfeilspitze von $\vec{a}$ das Pfeilende von $\vec{b}$ an.

Für drei Punkte P, Q und R gilt: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$



$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2+(-2) \\ 4+1 \\ 2+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vielfache von Vektoren

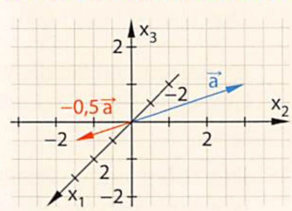
Bei der Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl r wird jede Koordinate des Vektors mit der Zahl r multipliziert:

$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(-0{,}5) \cdot \vec{a}$

$= \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot 2 \\ -0{,}5 \cdot 4 \\ -0{,}5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$



Kollinearität

Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ heißen **kollinear**, wenn es eine reelle Zahl r gibt mit $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$. Die Vektorpfeile kollinearer Vektoren sind **parallel** zueinander.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{a}$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear.