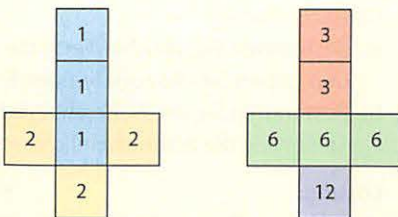


Zufallsgrößen und ihre Parameter

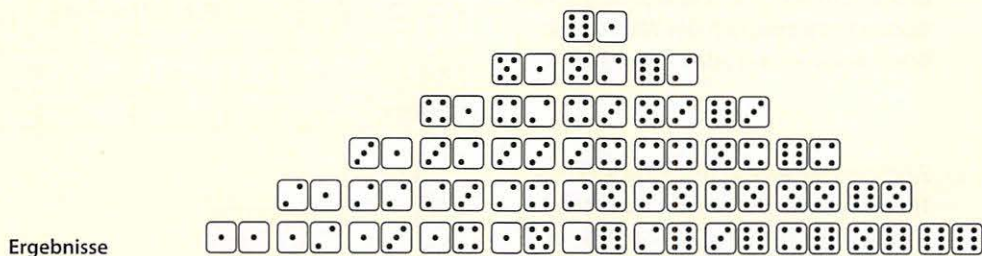
■ Die beiden Würfel werden geworfen und es wird das Produkt der beiden Augenzahlen gebildet.

- Nennen Sie die möglichen Produkte.
- Geben Sie zu jedem möglichen Produkt die zugehörigen Ergebnisse der Würfel an.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der auftretenden Produkte. ■



Häufig interessiert man sich bei einem Zufallsexperiment nicht für jedes einzelne Ergebnis, sondern für eine Größe, die vom Ausgang des Experiments abhängt, zum Beispiel für die Höhe eines Gewinns bei einem Glücksspiel oder für die Häufigkeit von Ereignissen.

Beim Werfen zweier normaler Spielwürfel gibt es 36 verschiedene Ergebnisse. Addiert man die beiden Augenzahlen, so ergibt sich eine Zahl zwischen 2 und 12. Die Augensumme ist eine **Zufallsgröße X**, die jedem Ergebnis einen Wert von 2 bis 12 zuordnet.



Wert x der Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Durch die Zufallsgröße werden meist mehrere Ergebnisse zusammengefasst.

Mit $X = 4$ bezeichnet man z. B. das Ereignis, dass die Augensumme 4 ist. Zu diesem Ereignis gehören die Ergebnisse $\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}$. Da dies 3 von 36 möglichen, gleich wahrscheinlichen Ergebnissen sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 4 ist:

$$P(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Hinweis:

$P(X = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X den Wert x annimmt.

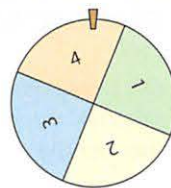
Definition: Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße X** ist eine Zuordnung, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl x zuordnet.

Die Zuordnung, die jedem Wert x, den eine Zufallsgröße X annehmen kann, die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X.

Alle Wahrscheinlichkeiten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung addieren sich zu 1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen können mit Tabellen dargestellt werden. Wenn die Zufallsgröße nur ganzzahlige Werte annimmt, verwendet man auch spezielle Säulendiagramme, sogenannte **Histogramme**. Die Säulen mit der Breite 1 werden im Koordinatensystem dargestellt. Die Höhe bzw. der Flächeninhalt einer Säule im Histogramm entspricht der Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Werts. Die Summe der Flächeninhalte aller Säulen ist gleich 1.

Beispiel 1: Das Glücksrad wird zweimal gedreht und der Betrag der Differenz der beiden Ergebnisse berechnet. Die Zufallsgröße X gibt diesen Betrag an.



- Bestimmen Sie, welche Werte die Zufallsgröße annehmen kann, und geben Sie die zugehörigen Ergebnisse an.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße.
- Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.

Lösung:

- Die blaue Zeile steht für das Ergebnis beim ersten Drehen, die blaue Spalte für das Ergebnis beim zweiten Drehen. Die weißen Zellen geben den Betrag x der Differenz an. Möglich sind die Werte 0, 1, 2, 3.

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

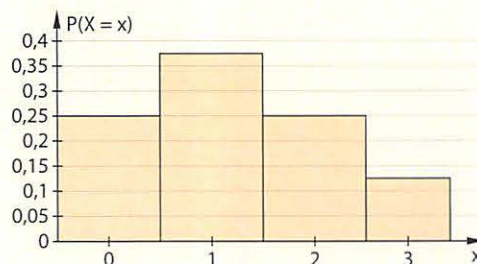
- Die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x)$ ergeben sich mithilfe der Laplace-Regel. Alle Wahrscheinlichkeiten der Wahrscheinlichkeitsverteilung addieren sich zu 1.

$$P(X = 0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad P(X = 1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad P(X = 3) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

- Zeichnen Sie eine x - und eine y -Achse. Tragen Sie auf der x -Achse für jeden möglichen Wert x der Zufallsgröße eine Säule ein. Es ist günstig, die Säule für $x = 0$ rechts neben der y -Achse zu zeichnen. Wählen Sie als Säulenbreite 1 und als Höhe die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$.



Erinnerung:

Bei einem **Laplace-Experiment** ergibt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem man die Anzahl der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, durch die Anzahl aller möglichen Ergebnisse teilt.

Basisaufgaben



- Ein Glücksrad mit 20 gleich großen Feldern von 1 bis 20 wird einmal gedreht. Ist die gedrehte Zahl gerade, so bekommt man 1 €. Bei einer einstelligen ungeraden Zahl bekommt man 2 €, bei einer zweistelligen ungeraden Zahl bekommt man 3 €. Die Zufallsgröße X gibt den ausgezahlten Betrag in Euro an.

- Bestimmen Sie, welche Werte die Zufallsgröße X annehmen kann, und geben Sie die zugehörigen Ergebnisse an.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X .



- Die angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung ist unvollständig. Ergänzen Sie begründet die fehlende Wahrscheinlichkeit. Geben Sie ein passendes Zufallsexperiment an.

- | x | 0 | 1 | 2 |
|------------|------|---|------|
| $P(X = x)$ | 0,25 | | 0,25 |

- | x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|-----|------|------|---|------|
| $P(X = x)$ | 0,1 | 0,45 | 0,25 | | 0,05 |



- Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.

- | x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|------------|------|-----|------|-----|
| $P(X = x)$ | 0,25 | 0,2 | 0,15 | 0,4 |

- | x | 0 | 3 | 5 | 10 |
|------------|-----|-----|------|------|
| $P(X = x)$ | 0,3 | 0,2 | 0,45 | 0,05 |

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

In Analogie zum arithmetischen Mittel und der Standardabweichung aus der Statistik, werden auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Kenngrößen für Zufallsexperimente herangezogen.

Ein Spielwürfel wird geworfen. Ist die Augenzahl 2 oder 4, so bekommt man 2 €, ist die Augenzahl 6, so bekommt man 8 €, sonst 0 €. Die Zufallsgröße X beschreibt die Auszahlung.

Bei häufiger Wiederholung, kann man davon ausgehen, dass die relativen Häufigkeiten der Ergebnisse in der Nähe der theoretischen Wahrscheinlichkeiten liegen. Dass also die Hälfte der Würfe 1, 3 oder 5, ein Drittel der Würfe 2 oder 4 und ein Sechstel der Würfe 6 ergeben. Mit diesen Werten lässt sich ein (theoretisches) arithmetisches Mittel für die Auszahlung berechnen. Dieses wird als **Erwartungswert** der Zufallsgröße bezeichnet.

X : Höhe der Auszahlung in €

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X :

x	0	2	8
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

arithmetisches Mittel:

$$0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{1}{6} = 2$$

Langfristig ist mit einer Auszahlung von durchschnittlich 2 € pro Spiel zu rechnen.

Erinnerung:

Bei einem Merkmal mit Werten $x_1, x_2, \dots, x_n$ und relativen Häufigkeiten $h_1, h_2, \dots, h_n$ gilt für das arithmetische Mittel:
 $\bar{x} = h_1 x_1 + \dots + h_n x_n$

Definition: Erwartungswert einer Zufallsgröße

Für den **Erwartungswert** einer Zufallsgröße X , die die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annehmen kann, gilt: $E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + \dots + x_n \cdot P(X=x_n)$

Der Erwartungswert stellt eine Prognose für das arithmetische Mittel der Zufallsgröße dar. Das tatsächliche arithmetische Mittel kann vom Erwartungswert abweichen. Es wird sich aber dem Erwartungswert annähern, wenn das Experiment sehr häufig durchgeführt wird.

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße allein ist aber oft nicht sehr aussagekräftig. Es werden die einfachen Würfe eines normalen Spielwürfels und eines Quader-Würfels verglichen.

Spielwürfel

X : Augenzahl

$$E(X) = 3,5$$



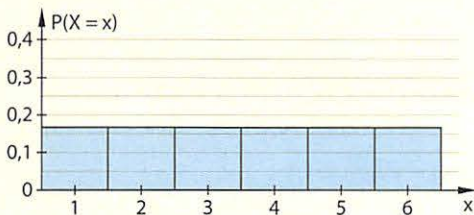
Quader-Würfel

Y : Augenzahl

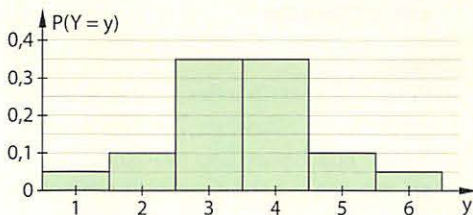
$$E(Y) = 3,5$$



x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



y	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y)$	0,05	0,1	0,35	0,35	0,1	0,05



Die Zufallsgrößen haben beide einen Erwartungswert von 3,5. Anhand der Histogramme sieht man, dass Werte, die deutlich vom Erwartungswert abweichen, beim Spielwürfel wahrscheinlicher sind als beim Quader-Würfel: Die Werte von X streuen stärker als die Werte von Y .

Um die Streuung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X um den Erwartungswert zu beschreiben, definiert man eine (theoretische) **Varianz** bzw. **Standardabweichung**. Sie stellt eine Prognose für die empirische Varianz bzw. Standardabweichung s der Werte dar, die X bei vielen Versuchsdurchführungen annimmt.

Hinweis:

Den Erwartungswert $E(X)$ bezeichnet man auch mit μ („mü“), wenn klar ist, welche Zufallsgröße X gemeint ist.

Hinweis:

empirisch = statistisch

Hinweis:

Die Abweichungen $(x_i - \mu)$ werden quadriert, damit sich positive und negative Abweichungen nicht gegenseitig aufheben.

Definition: Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße

Für eine Zufallsgröße X , die die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annehmen kann und den Erwartungswert $\mu = E(X)$ hat, heißt

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n) \quad \text{Varianz von } X$$

und $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ **Standardabweichung** von X .

Beispiel 2: Erwartungswert

Bei einem Glücksspiel würfelt man einmal mit einem normalen Spielwürfel.

Ist die Augenzahl gerade, so bekommt man den gewürfelten Betrag in Euro ausgezahlt.

Ist die Augenzahl ungerade, so bekommt man nichts.

- Berechnen Sie den Erwartungswert der Auszahlung.
- Geben Sie einen Einsatz für das Spiel an, sodass das Spiel fair ist.

Lösung:

- Die Zufallsgröße X beschreibt die Höhe der Auszahlung. Sie kann die Werte 0, 2, 4 und 6 annehmen. Drei Ergebnisse führen zu $X = 0$ und je ein Ergebnis zu $X = 2$, $X = 4$ und $X = 6$. Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten.

Multiplizieren Sie die Auszahlungen mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und addieren Sie diese Produkte.

- Das Spiel ist fair, wenn die langfristig zu erwartende durchschnittliche Auszahlung dem Einsatz entspricht.

X : Höhe der Auszahlung in €

$$P(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{6} \quad P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

x	0	2	4	6
P(X = x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 2$$

Langfristig erwartet man eine durchschnittliche Auszahlung von 2 € pro Spiel. Das Spiel ist also bei einem Einsatz von 2 € fair.

Hinweis:

Ein Spiel ist fair, wenn weder Spieler noch Anbieter langfristig einen Vorteil erwarten können.

Beispiel 3: Varianz und Standardabweichung

Gegeben sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen X und Y .

x	1	2	3	4
P(X = x)	0,3	0,3	0,2	0,2

y	1	2	3	4
P(Y = y)	0,5	0,1	0	0,4

X und Y haben beide den gleichen Erwartungswert $E(X) = E(Y) = 2,3$.

- Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von X und Y .
- Vergleichen Sie die Ergebnisse und erklären Sie ihre Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Lösung:

- Berechnen Sie für jedes x (bzw. y) die Differenz $x - 2,3$ (bzw. $y - 2,3$), quadrieren Sie die Ergebnisse und multiplizieren Sie sie mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Die Summe dieser Produkte ergibt die Varianz von X (bzw. Y). Durch Ziehen der Wurzel erhalten Sie die Standardabweichung.

- Die Ergebnisse aus a) geben einen Eindruck, welche Verteilung stärker streut.

$$V(X) = (1 - 2,3)^2 \cdot 0,3 + (2 - 2,3)^2 \cdot 0,3 + (3 - 2,3)^2 \cdot 0,2 + (4 - 2,3)^2 \cdot 0,2 = 1,21$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1,1$$

$$V(Y) = (1 - 2,3)^2 \cdot 0,5 + (2 - 2,3)^2 \cdot 0,1 + (3 - 2,3)^2 \cdot 0 + (4 - 2,3)^2 \cdot 0,4 = 2,01$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 1,418$$

Es gilt $V(Y) > V(X)$ und $\sigma(Y) > \sigma(X)$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y streut stärker um den Erwartungswert 2,3 als die von X .

Basisaufgaben



4. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße X .

a)

x	1	2	4	5	6
$P(X=x)$	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2

b)

x	5	10	15	20	25
$P(X=x)$	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

c)

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1

d)

x	1	2	3	4	8
$P(X=x)$	0,5	0,3	0,1	0,05	0,05



5. Bei einem Glücksspiel würfelt man einmal mit einem Oktaeder-Würfel mit den Zahlen von 1 bis 8. Bei einer 1, 2 und 3 bekommt man 1 €, bei einer 4, 5 und 6 bekommt man 2 €, bei einer 7 gibt es 5 € und bei einer 8 gibt es 10 €.
- a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Auszahlung.
b) Geben Sie einen Einsatz für das Spiel an, sodass das Spiel fair ist.

6. Die angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen haben den gleichen Erwartungswert.

①

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

②

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0	0	0,5	0,5	0	0

③

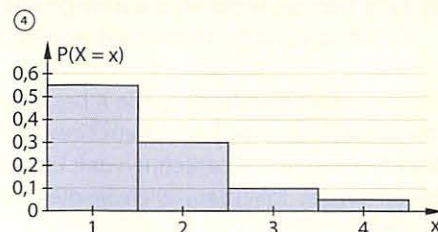
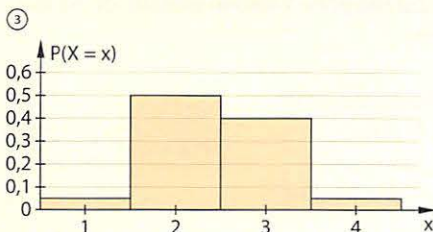
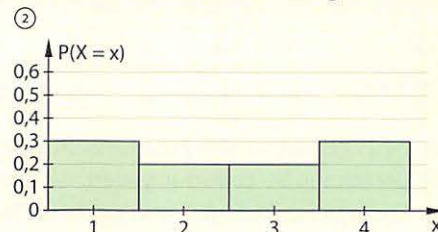
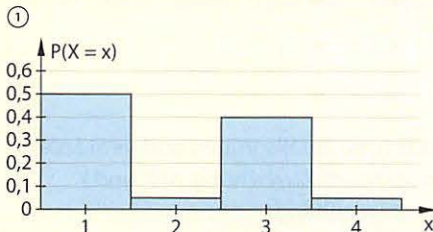
x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,5	0	0	0	0	0,5

④

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,05	0,15	0,3	0,3	0,15	0,05

- a) Ordnen Sie die Verteilungen ① bis ④ ohne weitere Berechnungen nach der Größe ihrer Standardabweichung. Begründen Sie ihre Einteilung.
b) Berechnen Sie die Standardabweichungen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus a).

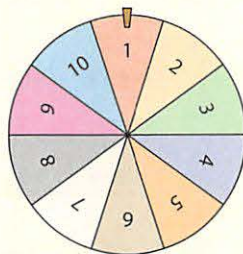
7. Die Histogramme stellen vier unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen dar.



- a) Schätzen Sie den Erwartungswert von ① bis ④ und berechnen Sie ihn zur Kontrolle.
b) Ordnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen ① bis ④ ohne konkrete Berechnungen nach dem Wert ihrer Standardabweichung von groß nach klein.
c) Lesen Sie aus den Histogrammen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen ab und bestimmen Sie die Standardabweichungen. Überprüfen Sie damit Ihre Einschätzung aus b).

Weiterführende Aufgaben

8. Ein Glücksrad mit 10 Feldern von 1 bis 10 wird einmal gedreht. Ist die gedrehte Zahl durch 2, 3 bzw. 5 teilbar, so bekommt man 2 €, 3 € bzw. 5 €. Ist die Zahl durch zwei dieser Zahlen teilbar, so bekommt man die Summe dieser Beträge ausgezahlt. Die Zufallsgröße X beschreibt den ausgezahlten Betrag in Euro.
- Bestimmen Sie, welche Werte die Zufallsgröße X annehmen kann, und geben Sie die zugehörigen Ergebnisse an.
 - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .
 - Berechnen Sie den langfristig zu erwartenden durchschnittlichen Auszahlungsbetrag,



9. Bei einem Anbieter stehen zwei Arten von Glücksspielen zur Auswahl. Die Tabellen zeigen den Einsatz und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Auszahlungen.

Spiel 1: Einsatz 0,60 €, X : Auszahlung in €			
x	0	1	2
$P(X=x)$	0,3	0,6	0,1

Spiel 2: Einsatz 2 €, Y : Auszahlung in €					
y	0	1	2	5	8
$P(Y=y)$	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1

- Untersuchen Sie für beide Glücksspiele, ob sie fair sind.
 - Untersuchen Sie, welches der beiden Glücksspiele riskanter ist.
 - Formulieren Sie konkrete Spielregeln für Glücksspiele, die zu den beiden gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen passen.
10. Für einen Einsatz von 4 € werden zwei Spielwürfel geworfen. Ist die Augensumme ungerade, so werden 0 € ausgezahlt. Ist die Augensumme gerade, so bekommt man die Augensumme ausgezahlt. Betrachten Sie die Zufallsgrößen X und Y .
- | | | | | | | | |
|----------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| x | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
- | | | | | | | | |
|----------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| y | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| $P(Y=y)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
- Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den Zufallsgrößen und dem Spiel.
 - Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung zu X und Y .
 - Erklären Sie die Ergebnisse aus b) im Sachzusammenhang.
 - Erläutern Sie, welchen Erwartungswert die Zufallsgröße Y haben müsste, damit das Glücksspiel als fair bezeichnet werden könnte.



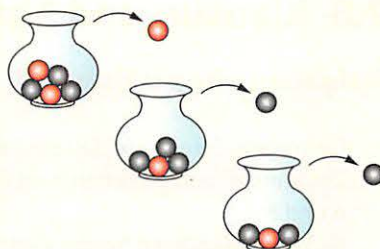
11. **Stolperstelle:** Die Zufallsgröße X beschreibt die Auszahlung bei einem Glücksspiel mit einem Einsatz von 2 €. Timo, Michelle und André berechnen den Erwartungswert und bewerten das Spiel. Beurteilen Sie die Lösungen der Schüler.

x	0	4	10
$P(X=x)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

- Timo: $E(X) = \frac{0 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 10 \cdot \frac{1}{10}}{3} \approx 0,733 < 2$ Der Spieler wird benachteiligt.
- Michelle: $E(X) = 0 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 10 \cdot \frac{1}{10} = \frac{22}{10} = 2,2$ Durchschnittlich gewinnt man 2,20 € bei dem Spiel.
- André: $E(X) = -2 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10} = 0,20 < 2$ Das Spiel ist zum Nachteil des Spielers.

12. In einer Urne sind 2 rote und 3 schwarze Kugeln. Aus der Urne wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen.

- a) Stellen Sie das Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm dar.
b) Es werden die Zufallsgrößen X und Y mit den angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen betrachtet. Untersuchen Sie, was die jeweilige Zufallsgröße beschreibt.



x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,1	0,6	0,3	0

y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	0	0,3	0,6	0,1

- c) Die Größe W beschreibt die Anzahl der Ziehungen bis zur ersten roten Kugel. Die Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle addieren sich nicht zu 1. Erläutern Sie dies und beschreiben Sie die Problematik.

w	1	2	3
$P(W=w)$	0,4	0,3	0,2

13. Beurteilen Sie die Aussage. Geben Sie bei einer falschen Aussage ein Gegenbeispiel an.

- a) Wenn eine Zufallsgröße nur ganze Zahlen als Werte annimmt, dann ist auch der Erwartungswert der Zufallsgröße ganzzahlig.
b) Der Erwartungswert liegt in der Nähe des Werts, den die Zufallsgröße mit der größten Wahrscheinlichkeit annimmt.
c) Je kleiner die Standardabweichung ist, desto wahrscheinlicher ist es, dass der Wert einer Zufallsgröße in der Nähe des Erwartungswerts liegt.

14. In einer Urne sind zwei gelbe und eine unbekannte Anzahl roter Kugeln. Es wird zweimal aus der Urne gezogen. Sind beide Kugeln gelb, so gewinnt man 5 €.

- a) Legt man die erste gezogene Kugel wieder zurück, so ist das Spiel bei einem Einsatz von 0,80 € fair. Bestimmen Sie die Anzahl der roten Kugeln in der Urne.
b) Wird das Spiel ohne Zurücklegen der ersten gezogenen Kugel gespielt, so ist es bei einem Einsatz von 0,50 € fair. Bestimmen Sie die Anzahl der roten Kugeln in der Urne.
c) Untersuchen Sie, welche der beiden Varianten risikoreicher ist.

15. Ein Glücksrad besteht aus fünf unterschiedlich großen Sektoren, die mit 0 €, 4 €, 8 €, 12 € und 16 € beschriftet sind. Für das einmalige Drehen des Glücksrades beschreibt die Zufallsgröße X die Auszahlung in €. Das einmalige Drehen des Glücksrades ist bei einem Einsatz von 7 € fair.

x	0	4	8	12	16
$P(X=x)$	c	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	d

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X=0)$ und $P(X=16)$.
b) Beim zweimaligen Drehen wird der höhere der beiden gedrehten Beträge ausgezahlt. Bestimmen Sie einen fairen Einsatz für dieses Glücksspiel.

16. **Ausblick:** Die Tschebyscheff-Ungleichung besagt, dass bei einer Zufallsgröße X für jede Zahl $k > 0$ gilt:

$$P(|X - E(X)| > k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

- a) Begründen Sie, dass die Tschebyscheff-Ungleichung äquivalent ist zu

$$P(|X - E(X)| \leq k) \geq 1 - \frac{V(X)}{k^2}$$

- b) Ein Verlag lässt die Verkaufsaussichten eines neuen Buchs erforschen. Die Marktforschung liefert die Aussage, dass mit einem Verkauf von 75 000 Büchern bei einer zu erwartenden Standardabweichung von 2500 Büchern zu rechnen sei. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass der Verlag zwischen 70 000 und 80 000 Bücher verkauft.

