

Streifzug: Zufallsgrößen und ihre Parameter

Seite 249 | Einstieg

- a) Der linke Würfel kann die Zahlen 1 und 2 zeigen, der rechte Würfel die Zahlen 3, 6 und 12. Mögliche Produkte sind also:
 $1 \cdot 3 = 3; 1 \cdot 6 = 6; 1 \cdot 12 = 12; 2 \cdot 3 = 6; 2 \cdot 6 = 12; 2 \cdot 12 = 24$
- b) $3: 1 \cdot 3; 6: 1 \cdot 6 \text{ und } 2 \cdot 3; 12: 1 \cdot 12 \text{ und } 2 \cdot 6; 24: 2 \cdot 12$
- c) $P(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; P(6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}; P(12) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}; P(24) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Seite 250 | Aufgabe 1

- a) Möglich sind die Werte 1, 2 und 3.
 $x = 2$ für die Ergebnisse 1, 3, 5, 7 und 9;

- $x = 1$ für die Ergebnisse 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 und 20;
 $x = 3$ für die Ergebnisse 11, 13, 15, 17 und 19

b)

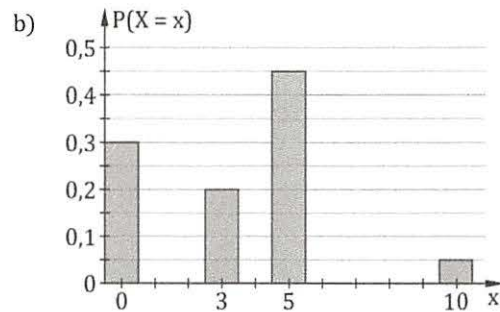
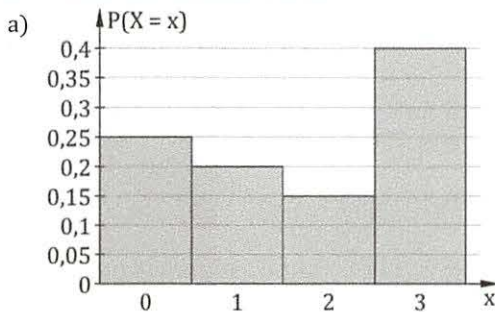
x	1	2	3
P(X = x)	0,5	0,25	0,25

Seite 250 | Aufgabe 2

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss jeweils 1 sein. Zufallsexperiment: individuelle Lösungen

- a) $P(X = 1) = 0,5$ b) $P(X = 3) = 0,15$

Seite 250 | Aufgabe 3



Seite 253 | Aufgabe 4

- a) $E(X) = 3$ $V(X) = (1-3)^2 \cdot 0,3 + (2-3)^2 \cdot 0,3 + (4-3)^2 \cdot 0,1 + (5-3)^2 \cdot 0,1 + (6-3)^2 \cdot 0,2 = 3,8$
- b) $E(X) = 15$ $V(X) = (5-15)^2 \cdot 0,1 + (10-15)^2 \cdot 0,3 + (15-15)^2 \cdot 0,2 + (20-15)^2 \cdot 0,3 + (25-15)^2 \cdot 0,1 = 35$
- c) $E(X) = -1$ $V(X) = (-2+1)^2 \cdot 0,6 + (-1+1)^2 \cdot 0,1 + (0+1)^2 \cdot 0,1 + (1+1)^2 \cdot 0,1 + (2+1)^2 \cdot 0,1 = 2$
- d) $E(X) = 2$ $V(X) = (1-2)^2 \cdot 0,5 + (2-2)^2 \cdot 0,3 + (3-2)^2 \cdot 0,1 + (4-2)^2 \cdot 0,05 + (8-2)^2 \cdot 0,05 = 2,6$

Seite 253 | Aufgabe 5

- a) $E(X) = 3 \text{ €}$ b) Das Spiel ist bei einem Einsatz von 3 € fair.

Seite 253 | Aufgabe 6

- a) Der Erwartungswert ist 3,5. Es gilt: $\sigma_2 < \sigma_4 < \sigma_1 < \sigma_3$; Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Wahrscheinlichkeitsverteilung um den Erwartungswert. Die Werte von ② streuen am geringsten, die von ③ am stärksten.
- b) ① $\sigma(X) \approx 1,71$ ② $\sigma(X) = 0,5$ ③ $\sigma(X) = 2,5$ ④ $\sigma(X) \approx 1,20$

Seite 253 | Aufgabe 7

- a) ① $E(X) = 2$ ② $E(X) = 2,5$ ③ $E(X) = 2,45$ ④ $E(X) = 1,65$
- b) $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_4 > \sigma_3$
- c) ① $V(X) = 1,1; \sigma \approx 1,05$ ② $V(X) = 1,45; \sigma \approx 1,20$
- ③ $V(X) = 0,4475; \sigma \approx 0,67$ ④ $V(X) = 0,7275; \sigma \approx 0,85$

Seite 254 | Aufgabe 8

- a) Die Zufallsgröße X kann die Werte 0, 2, 3, 5 und 7 annehmen.
- b)
- | | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | 2 | 3 | 5 | 7 |
| P(X = x) | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |
- c) $E(X) = 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,1 = 2,9$
 Langfristig kann eine durchschnittliche Auszahlung von 2,90 € erwartet werden.

Seite 254 | Aufgabe 9

- a) Spiel 1: $E(X) = 0,80$, das Glücksspiel ist nicht fair. Spiel 2: $E(X) = 2,20$, das Glücksspiel ist nicht fair.
- b) Die Varianz gibt an, wie riskant ein Spiel ist. Spiel 1: $V(X) = 0,36$ Spiel 2: $V(X) = 6,36$, das Spiel 2 ist riskanter.
- c) Beispiele:
 Spiel 1: Das Drehen eines Glücksrads mit drei unterschiedlich großen Feldern mit den Zahlen 0,1 und 2.
 Spiel 2: Ein Spielautomat, der eine Zufallszahl anzeigt. Die Zufallszahl kann die Werte 0,1, 2, 5 und 8 annehmen.

Seite 254 | Aufgabe 10

- a) Die Zufallsgröße X gibt die Höhe der Auszahlung an. Die Zufallsgröße Y gibt an, wie groß der Gewinn des Spielers ist.
 b) $E(X) = 3,5$; $V(X) = 15,42$; $\sigma(X) \approx 3,93$ $E(Y) = -0,5$; $V(Y) = 15,42$; $\sigma(Y) \approx 3,93$
 c) Der Erwartungswert des Gewinns ist um 4 € geringer als der Erwartungswert der Auszahlung, da der Einsatz 4 € beträgt. Standardabweichung und Varianz sind beim Gewinn genauso groß wie bei der Auszahlung, da die Verteilungen nur um 4 € verschoben sind.
 d) Der Erwartungswert von Y müsste bei einem fairen Spiel 0 sein.

Seite 254 | Aufgabe 11

- a) Timos Rechnung für den Erwartungswert ist falsch, da nicht durch 3 geteilt werden darf. Es gilt $E(X) = 2,2$, sodass der Spieler auch nicht benachteiligt wird.
 b) Michelles Berechnung des Erwartungswerts ist korrekt. Ihre Aussage, dass man beim Spiel durchschnittlich 2,20 € gewinnt ist jedoch falsch, sie hat den Einsatz von 2 € nicht berücksichtigt. Der durchschnittliche Gewinn beträgt 0,20 €.
 c) Andrés Berechnung bezieht den Einsatz mit ein und gibt dadurch an, wieviel der Spieler auf lange Sicht hin gewinnt. Deswegen ist seine Einschätzung falsch. Das Spiel ist zum Vorteil des Spielers.

Seite 255 | Aufgabe 12

- a)
-
- b) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der roten Kugeln an. Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der schwarzen Kugeln an.
 c) Die Wahrscheinlichkeiten addieren sich nicht zu 1, da es auch die Möglichkeit gibt, dass nach drei Ziehungen noch keine rote Kugel gezogen wurde. Die Größe W ist keine Zufallsgröße, da sie dem Ergebnis, dass drei schwarze Kugeln gezogen werden, keine Zahl zuordnet.

Seite 255 | Aufgabe 13

- a) falsch; Der Erwartungswert der Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Spielwürfels ist 3,5.
 b) falsch. Der Erwartungswert der Zufallsgröße X mit $P(X = 0) = 0,6$ und $P(X = 100) = 0,4$ ist 40.
 c) richtig

Seite 255 | Aufgabe 14

- a) n : Anzahl der gelben und roten Kugeln in der Urne X : Auszahlung in €
 $E(X) = 0,80 = 5 \cdot P(X = 5) = 5 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 \Rightarrow 0,16 = \frac{4}{n^2}$, also $n = 5$ In der Urne befinden sich drei rote Kugeln.
 b) $E(X) = 0,50 = 5 \cdot P(X = 5) = 5 \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \Rightarrow 1 = \frac{20}{n^2 - n} \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0$, also $n = 5$
 In der Urne befinden sich drei rote Kugeln.
 c) Variante 1: $V(X) = (0 - 0,8)^2 \cdot 0,84 + (5 - 0,8)^2 \cdot 0,16 = 3,36$
 Variante 2: $V(X) = (0 - 0,5)^2 \cdot 0,9 + (5 - 0,5)^2 \cdot 0,1 = 2,25$
 Variante 1 ist risikoreicher.

Seite 255 | Aufgabe 15

- a) $d + c = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ $E(X) = 7 \text{ €} = c \cdot 0 \text{ €} + \frac{1}{4} \cdot 4 \text{ €} + \frac{1}{8} \cdot 8 \text{ €} + \frac{1}{4} \cdot 12 \text{ €} + d \cdot 16 \text{ €}$, es folgt $d = \frac{1}{8}$ und $c = \frac{1}{4}$
 $P(X = 0) = \frac{1}{4}$ $P(X = 16) = \frac{1}{8}$
 b) $P(X = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $P(X = 4) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$ $P(X = 8) = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{64}$
 $P(X = 12) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ $P(X = 16) = 6 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{64}$

x	0	4	8	12	16
$P(X = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{64}$

$E(X) = 10,125$; Der faire Einsatz für dieses Glücksspiel müsste 10,125 € betragen. Bei einem Einsatz von 10,12 € oder 10,13 € ist das Glücksspiel näherungsweise fair.

Seite 255 | Aufgabe 16

- a) $P(|X - E(X)| > k) + P(|X - E(X)| \leq k) = 1$, also $P(|X - E(X)| > k) = 1 - P(|X - E(X)| \leq k)$
 Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 1 - P(|X - E(X)| \leq k) &\leq \frac{V(X)}{k^2} & | -1 \\
 -P(|X - E(X)| \leq k) &\leq -1 + \frac{V(X)}{k^2} & | \cdot (-1) \\
 P(|X - E(X)| \leq k) &\geq 1 - \frac{V(X)}{k^2}
 \end{aligned}$$

- b) $E(X) = 75\,000$; $V(X) = 2500^2$; $P(|X - 75\,000| \leq 5000) \geq 1 - \frac{2500^2}{5000^2} = \frac{3}{4}$
 Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % verkauft der Verlag zwischen 70 000 und 80 000 Bücher.