

4.4 Prognosen mithilfe der Sigma-Regeln

Seite 142 | Einstieg

- a) Unter der Annahme, dass die Anzahl X der Union-Wähler in Berlin-Mitte binomialverteilt ist mit $n = 152\,513$ und $p = 0,241$, gilt: $\mu = 152\,513 \cdot 0,241 \approx 36\,755,6$; $\sigma = \sqrt{152\,513 \cdot 0,241 \cdot 0,759} \approx 167,03$
 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(36\,422 \leq X \leq 37\,098) \approx 0,9572$
 Unter der Annahme, dass die Anzahl Y der SPD-Wähler in Berlin-Mitte binomialverteilt ist mit $n = 152\,513$ und $p = 0,257$, gilt: $\mu = 152\,513 \cdot 0,257 \approx 39\,195,8$; $\sigma = \sqrt{152\,513 \cdot 0,257 \cdot 0,743} \approx 170,65$
 $P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = P(38\,855 \leq Y \leq 39\,537) \approx 0,9546$
- b) Die Ergebnisse der Union und der SPD in Berlin-Mitte liegen weit außerhalb der 2σ -Umgebungen. Dies ist nicht verwunderlich, da die politischen Ansichten in Berlin-Mitte von denen in Deutschland abweichen können. Das Modell der Binomialverteilung mit den Prozentsätzen aus Deutschland ist ungeeignet, nicht alle Wähler in Berlin-Mitte wählen unabhängig voneinander eine Partei mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wie in Deutschland.

Seite 143 | Aufgabe 1

- a) ① $\mu = 200$; $\sigma \approx 6,32$ 1σ -Umgebung: [193,7; 206,3] 2σ -Umgebung: [187,4; 212,6] 3σ -Umg.: [181,03; 218,97]
 ② $\mu = 150$; $\sigma \approx 8,66$ 1σ -Umgebung: [141,3; 158,7] 2σ -Umgebung: [132,7; 167,3] 3σ -Umg.: [124,02; 175,98]
 ③ $\mu = 50$; $\sigma \approx 6,89$ 1σ -Umgebung: [43,1; 56,9] 2σ -Umgebung: [36,2; 63,8] 3σ -Umg.: [29,3; 70,7]
 ④ $\mu = 1875$; $\sigma \approx 21,65$ 1σ -Umg.: [1853,3; 1896,7] 2σ -Umg.: [1831,7; 1918,3] 3σ -Umg.: [1810,05; 1939,95]
- b) ① $P(194 \leq X \leq 206) \approx 0,696$ $P(188 \leq X \leq 212) \approx 0,952$ $P(182 \leq X \leq 218) \approx 0,997$
 ② $P(142 \leq X \leq 158) \approx 0,674$ $P(133 \leq X \leq 167) \approx 0,957$ $P(125 \leq X \leq 175) \approx 0,997$
 ③ $P(44 \leq X \leq 56) \approx 0,655$ $P(37 \leq X \leq 63) \approx 0,950$ $P(30 \leq X \leq 70) \approx 0,997$
 ④ $P(1854 \leq X \leq 1896) \approx 0,679$ $P(1832 \leq X \leq 1918) \approx 0,956$ $P(1811 \leq X \leq 1939) \approx 0,997$
- c) Bei ①, ②, ③ und ④ gilt jeweils $\sigma > 3$, sodass die Laplace-Bedingung ist erfüllt ist.
 Die Wahrscheinlichkeiten weichen bei den 3σ -Umgebungen nicht von denen der σ -Regeln ab, die bei den 2σ -Umgebungen weichen geringfügig ab und die bei den 1σ -Umgebungen weichen etwas von denen der σ -Regeln ab.

Seite 143 | Aufgabe 2

- a) $n = 300$; $p = 0,5$, $\mu = 150$; $\sigma \approx 8,66$ 68% -Intervall: [142; 158] $99,7\%$ -Intervall: [125; 175]
 $n = 400$; $p = 0,5$, $\mu = 200$; $\sigma = 10$ 68% -Intervall: [190; 210] $99,7\%$ -Intervall: [170; 230]
 $n = 500$; $p = 0,5$, $\mu = 250$; $\sigma \approx 11,18$ 68% -Intervall: [239; 261] $99,7\%$ -Intervall: [217; 283]
- b) $n = 300$; 2σ -Umgebung: [132,7; 167,3] $P(133 \leq X \leq 167) \approx 0,957$
 $n = 400$; 2σ -Umgebung: [180; 220] $P(180 \leq X \leq 220) \approx 0,960$
 $n = 500$; 2σ -Umgebung: [227,6; 272,4] $P(228 \leq X \leq 272) \approx 0,956$

Seite 143 | Aufgabe 3

- a) $n = 1000$, $p = 0,1$; $\mu = 100$, $\sigma \approx 9,49$
 1σ -Umgebung: [90,5; 109,5] Mit etwa 68 % Wahrscheinlichkeit werden an einem Tag 91 bis 109 Gewinne gezogen.
 3σ -Umgebung: [71,5; 128,5] Mit etwa 99,7% Wahrscheinlichkeit werden an einem Tag 72 bis 128 Gewinne gezogen.
- b) Hauptgewinne: $n = 5000$, $p = 0,02$; $\mu = 100$, $\sigma \approx 9,90$ 2σ -Umgebung: [80,2; 119,8] $\rightarrow$ [81; 119]
 Normale Gewinne: $n = 5000$, $p = 0,08$; $\mu = 400$, $\sigma \approx 19,18$ 2σ -Umgebung: [361,6; 438,4] $\rightarrow$ [362; 438]
- c) Im schlechtesten Fall beträgt die Anzahl der Hauptgewinne 119 und die Anzahl der normalen Gewinne 438.
 Ausgaben für Gewinne: $119 \cdot 15 \text{ €} + 438 \cdot 2 \text{ €} = 2661 \text{ €}$
 Im besten Fall beträgt die Anzahl der Hauptgewinne 81 und die Anzahl der normalen Gewinne 362.
 Ausgaben für Gewinne: $81 \cdot 15 \text{ €} + 362 \cdot 2 \text{ €} = 1939 \text{ €}$

Seite 143 | Aufgabe 4

- a) ① $\mu = 5$; $\sigma \approx 1,58$ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(2 \leq X \leq 8) \approx 0,979$
 ② $\mu = 20$; $\sigma \approx 3,16$ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(14 \leq X \leq 26) \approx 0,962$
 ③ $\mu = 200$; $\sigma \approx 10$ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(180 \leq X \leq 220) \approx 0,960$
 ④ $\mu = 2000$; $\sigma \approx 31,62$ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(1937 \leq X \leq 2063) \approx 0,955$
- b) Die Wahrscheinlichkeiten aus a) nähern sich dem Wert 0,955 der 2σ -Regel mit steigendem n besser an.
 ① $\sigma < 3$, die Laplace-Bedingung ist nicht erfüllt. Bei ②, ③ und ④ ist $\sigma > 3$ und somit die Laplace-Bedingung erfüllt.

Seite 144 | Aufgabe 5

- a) ① $\mu = 100$, $\sigma \approx 7,75 > 3$ ② $\mu = 250$, $\sigma \approx 13,69 > 3$ ③ $\mu = 80$, $\sigma = 4 > 3$
- b) ① 2σ -Umgebung: [84,5; 115,5] 3σ -Umgebung: [76,8; 123,2]
 ② 2σ -Umgebung: [222,6; 277,4] 3σ -Umgebung: [208,9; 291,1]
 ③ 2σ -Umgebung: [72; 88] 3σ -Umgebung: [68; 92]
- c) ① signifikant z.B. 84 oder 116 hochsignifikant z.B. $k \leq 76$ oder $k \geq 124$
 ② signifikant z.B. 222 oder 278 hochsignifikant z.B. $k \leq 208$ oder $k \geq 292$
 ③ signifikant z.B. 71 oder 89 hochsignifikant z.B. $k \leq 67$ oder $k \geq 93$

Seite 144 | Aufgabe 6

- a) $n = 255, p = 0,2; \mu = 51, \sigma \approx 6,39$ 2σ -Umgebung: $[38,2; 63,8]$
 b) 34 liegt nicht in der 2σ -Umgebung, der Wert für p kann angezweifelt werden.
 c) ① $n = 205, p = 0,2; \mu = 41, \sigma \approx 5,73$ 2σ -Umgebung: $[29,5; 52,5]$ 26 liegt nicht in der 2σ -Umgebung.
 ② $n = 310, p = 0,2; \mu = 62, \sigma \approx 7,04$ 2σ -Umgebung: $[47,9; 76,1]$ 42 liegt nicht in der 2σ -Umgebung.
 ③ $n = 280, p = 0,2; \mu = 56, \sigma \approx 6,69$ 2σ -Umgebung: $[42,6; 69,4]$ 71 liegt nicht in der 2σ -Umgebung.

Seite 145 | Aufgabe 7

- a) X: Anzahl der Erdbeerbonbons, $p = 0,5, n = 80$ $P(X = 40) \approx 0,0889$ $P(X \geq 40) \approx 0,5445$
 Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Erdbeerbonbons in den zwei Familienpackungen genau dem Erwartungswert 40 entspricht, ist sehr gering. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 40 Erdbeerbonbons enthalten sind, ist etwas größer als 50 %.
 b) $\mu = 40, \sigma \approx 4,47$ 2σ -Umgebung: $[31,1; 48,9]$
 Die Anzahl von 54 Erdbeerbonbons liegt nicht in der 2σ -Umgebung.
 c) 3σ -Umgebung: $[26,6; 53,4]$
 Die Anzahl von 54 Erdbeerbonbons liegt nicht in der 3σ -Umgebung, weicht also hochsignifikant vom Erwartungswert ab.

Seite 145 | Aufgabe 8

- a) Die Untersuchung hat genau zwei mögliche Ergebnisse, entweder jemand leidet an einer Allergie oder nicht. Man kann annehmen, dass jeder Befragte unabhängig von den anderen mit 30 % Wahrscheinlichkeit an einer Allergie leidet.
 b) $n = 1000, p = 0,3; \mu = 300, \sigma \approx 14,49$ 3σ -Umgebung: $[256,5; 343,5]$
 Nur die Ergebnisse in Berlin und Hamburg liegen außerhalb der 3σ -Umgebung.

Seite 145 | Aufgabe 9

- a) X: Anzahl der Rechtshänder im Handballverein $n = 250, p = 0,88, \mu = 220$
 Die Wahrscheinlichkeit, dass exakt der Erwartungswert eintrifft, ist mit $P(X = 220) \approx 0,077$ gering. Es ist nicht sinnvoll, als Prognose nur den Erwartungswert anzugeben.
 b) $\sigma \approx 5,14$ 2σ -Umgebung: $[209,7; 230,3]$
 $P(210 \leq X \leq 230) \approx 0,9598 > 95,5 \%$ und $P(211 \leq X \leq 229) \approx 0,9365 < 95,5 \%$, das kleinste um den Erwartungswert symmetrische Intervall mit mindestens 95,5 % Wahrscheinlichkeit lautet $[210; 230]$.
 3σ -Umgebung: $[204,6; 235,4]$
 $P(205 \leq X \leq 235) \approx 0,9973 > 99,7 \%$ und $P(206 \leq X \leq 234) \approx 0,995 < 99,7 \%$, das kleinste um den Erwartungswert symmetrische Intervall mit mindestens 99,7 % Wahrscheinlichkeit lautet $[205; 235]$.
 c) Die Anzahl von 205 Rechtshänder liegt nicht im 95,5 %-Intervall, aber im 99,7 %-Intervall. Daraus lässt sich schließen, dass der Wert 205 signifikant vom Erwartungswert abweicht. Da der Wert 205 außerhalb des Intervalls $[206; 234]$ liegt, in dem die Anzahl der Rechtshänder mit etwa 99,5 % Wahrscheinlichkeit liegt, ist die Abweichung sogar hochsignifikant.

Seite 145 | Aufgabe 10

- a) Die σ -Regel darf nicht verwendet werden, da die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ nicht erfüllt ist.
 b) $\sigma > 3$ ist bei $p = 0,05$ für $n \geq 190$ erfüllt.
 Für $n = 2000$ mit $\mu = 100$ und $\sigma \approx 9,75$ gilt zum Beispiel: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(91 \leq X \leq 109) \approx 0,670$
 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(81 \leq X \leq 119) \approx 0,955$ $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(71 \leq X \leq 129) \approx 0,997$

Seite 145 | Aufgabe 11

- a) $n = 800, p = \frac{1}{6}, \mu \approx 133,333, \sigma \approx 10,541$ 2σ -Umgebung: $[112,3; 154,4]$
 Das Ergebnis von 154 Sechsen liegt in der 2σ -Umgebung.
 b) $[\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma] \approx [112,7; 153,995]$ $P(113 \leq X \leq 153) \approx 0,948 \approx 95 \%$
 Das Ergebnis von 154 Sechsen liegt nicht im Intervall $[\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma]$, in dem die Anzahl der Sechsen mit etwa 95 % Wahrscheinlichkeit liegt.

Seite 146 | Aufgabe 12

- a) ① $n = 250; p = 0,05; 0,04 \cdot 250 = 10$ $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) \approx 0,709075 \approx 0,709$
 ② $n = 400; p = 0,05; 0,04 \cdot 400 = 16$ $P(X > 16) = 1 - P(X \leq 16) \approx 0,785548 \approx 0,786$
 b) langfristig zu erwartende durchschnittliche Kosten:
 ① $0,709075 \cdot 5000 \cdot 2,50 \text{ €} + 0,290925 \cdot 5000 \cdot 3 \text{ €} \approx 13\,227,31 \text{ €}$
 ② $0,785548 \cdot 5000 \cdot 2,50 \text{ €} + 0,214452 \cdot 5000 \cdot 3 \text{ €} \approx 13\,036,13 \text{ €}$
 c) $n = 300, p = 0,05; \mu = 15; \sigma \approx 3,77$ 2σ -Umgebung: $[7,5; 22,5]$
 Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95,5 % sind 8 bis 22 Lampen der Stichprobe defekt.
 d) Für $n \geq 190$ gilt die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$.

Seite 146 | Aufgabe 13

- a) $n = 750, p = 0,025; \mu = 18,75, \sigma \approx 4,28$ 2σ -Umgebung: $[10,2; 27,3]$
 Intervall, in dem die Anzahl der Schwarzfahrer mit etwa 95,5 % Wahrscheinlichkeit liegt: $[11; 27]$
 b) Mindestens: $11 \cdot 60 \text{ €} = 660 \text{ €}$ Maximal: $27 \cdot 60 \text{ €} = 1620 \text{ €}$
 c) Mindestens: $900 \text{ €} : 60 \text{ €} = 15$ Maximal: $1380 \text{ €} : 60 \text{ €} = 23$
 1σ -Umgebung: $[14,5; 23,03]$; nach innen gerundet: $[15; 23]$ Der Kontrolleur bezieht sich auf die 1σ -Umgebung.

Seite 146 | Aufgabe 14

- a) $E(X) = 300 \cdot 0,075 = 22,5$; In einer Stichprobe von 300 Exemplaren sind etwa 22 oder 23 fehlerhafte Chips zu erwarten.
- b) Simons Aussage ist nicht korrekt. Auch ohne Veränderung des Anteils ist die Wahrscheinlichkeit klein, dass genau 7,5 % der Chips fehlerhaft sind. Bei einer Stichprobe von 300 Exemplaren ist die Wahrscheinlichkeit sogar null, da 7,5 % von 300 den Wert 22,5 und somit keine ganze Zahl ergibt.
- c) $n = 300, p = 0,075; \mu = 22,5, \sigma \approx 4,56$ 2 σ -Umgebung: [13,4; 31,6]
 $P(14 \leq X \leq 31) \approx 0,953 < 95,5 \%$ $P(13 \leq X \leq 32) = 0,73 > 95 \%$
 kleinstmögliches Intervall mit Mittelpunkt 22,5 und mindestens 95,5 % Wahrscheinlichkeit: [13; 32]
- d) Eine Abweichung der Anzahl fehlerhafter Chips vom Erwartungswert lässt sich teilweise durch die Streuung der Werte erklären. Liegt die Anzahl der fehlerhaften Chips jedoch außerhalb des Intervalls [13; 32], weicht sie signifikant vom Erwartungswert ab und der Wert von 7,5 % für die Wahrscheinlichkeit fehlerhafter Chips kann angezweifelt werden. Liegt die Anzahl innerhalb des Intervalls [13; 32] (und innerhalb der 2 σ -Umgebung), sollte man den Wert von 7,5 % nicht anzweifeln.

Seite 147 | Aufgabe 15

- a) Die Aussage ist korrekt. Die 3 σ -Umgebung „lappt“ quasi über die Werte der 2 σ -Umgebung hinaus. Siehe Abbildung Seite 144 im Schülerbuch.
- b) Diese Aussage ist richtig. „Noch weiter vom Erwartungswert weg“, heißt, dass sich dieses Ergebnis nicht in dem um den Erwartungswert symmetrischen Intervall, in dem die Trefferzahl mit etwa 95 % Wahrscheinlichkeit liegt, befinden kann.
- c) Die Aussage ist falsch. Der Wert von p muss nicht falsch sein. Das Ergebnis der Stichprobe gibt aber einen Grund dafür, die Gültigkeit des Wertes anzuzweifeln.
- d) Die Aussage ist falsch. Den Wert von p kann man nicht durch das Ergebnis einer Stichprobe ermitteln.

Seite 147 | Aufgabe 16

- a) $n = 42, p = 0,32; \mu = 13,44, \sigma \approx 3,02$ 3 σ -Umgebung: [4,4; 22,5]
 Da der Wert 27 außerhalb der 3 σ -Umgebung liegt und somit hochsignifikant vom Erwartungswert abweicht, zweifelt Sarah den Wert p der Umfrage an.
- b) Sarah hat nicht bedacht, dass sie selbst in einem Sportverein ist und ihr Freundeskreis daher nicht repräsentativ ist. Zudem ist nicht bekannt, wie viele Schüler befragt wurden, die Stichprobe von $n = 42$ könnte zu klein sein, um das Umfrageergebnis abzubilden.

Seite 147 | Aufgabe 17

- a) Hospitalisierungsrate: $p = \frac{285\,019}{4\,046\,112} \approx 0,0704$
 Berkan: $n = 367; \mu \approx 25,85; \sigma \approx \sqrt{23,8917} \approx 4,90$ 3 σ -Umgebung: [11,1; 40,6]
 Der Wert 0 des Stichprobenergebnisses liegt außerhalb der 3 σ -Umgebung.
 Katrin: $n = 14; \mu \approx 0,986; \sigma \approx 0,96 < 3$ 3 σ -Umgebung: [-1,9; 3,9]
 Die Laplace-Bedingung ist nicht erfüllt, die σ -Regeln können also nicht angewendet werden.
 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stichprobenergebnis außerhalb der 3 σ -Umgebung liegt, beträgt $P(X \geq 4) \approx 0,014$.
 Für Stichprobenergebnisse von mindestens 5 gilt $P(X \geq 5) \approx 0,002$.
- b) Berkans Stichprobe ist nicht repräsentativ, da sie nur Kinder und Jugendliche umfasst. Katrins Stichprobe ist viel zu klein, um eine Aussage zu treffen. In beiden Fällen kann außerdem auch der Zufall eine Rolle spielen.

Seite 147 | Aufgabe 18

$n = 48, p = 0,5$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein Gewinn ein Gutschein ist); $\mu = 24, \sigma \approx 3,46$ 2 σ -Umgebung: [17,1; 30,9]
 Der Wert 15 liegt außerhalb der 2 σ -Umgebung und weicht somit signifikant vom Erwartungswert ab. Daher kann man die Behauptung des Supermarkts anzweifeln.

Seite 147 | Aufgabe 19

- a) $n = 200, p = 0,4; \mu = 80, \sigma \approx 6,93$ 2 σ -Umgebung: [66,1; 93,9]
 Der angenommene Wert $p = 0,4$ wird genau dann verworfen, wenn in der Stichprobe eine Reißzwecke höchstens 66-mal oder mindestens 94-mal mit der Spitze nach oben landet.
- b) 74-mal: $p = 0,4$ sollte nicht verworfen werden. 94-mal: $p = 0,4$ sollte verworfen werden.
- c) Es kann vorkommen, dass der Wert $p = 0,4$ verworfen wird (aufgrund eines Ergebnisses außerhalb der 2 σ -Umgebung), obwohl er gültig ist. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist aber gering (etwa 4,5 %).
 Außerdem kann es vorkommen, dass der Wert $p = 0,4$ nicht verworfen wird (aufgrund eines Ergebnisses innerhalb der 2 σ -Umgebung), obwohl er nicht gültig ist.
- d) Eine Möglichkeit ist, dass der wahre Wert von p vom vermuteten Wert ($p = 0,4$) abweicht. Ebenso ist es möglich, dass der vermutete Wert von p korrekt ist und das Ergebnis signifikant vom Erwartungswert abweicht. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt in diesem Fall etwa 4,5 %.

Streifzug: Geometrische Verteilung

Seite 148 | Einstieg

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{216} \approx 0,421$$