

6. Abiturvorbereitung

6.2 Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgaben zur Analysis

Seite 198 | Aufgabe 1

- a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$ $x_{1/2} = \frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - 32}$, also $x_1 = 8$ und $x_2 = 4$
 b) Skizze individuell: Tiefpunkt an der Stelle $x = 4$ und Hochpunkt an der Stelle $x = 8$.
 c) Der Graph der Funktion g besitzt keinen lokalen Extrempunkt, da die Ableitungsfunktion unterhalb der x -Achse verläuft und somit keine Nullstellen hat. An lokalen Extrempunkten müsste $g'(x) = 0$ gelten.

Seite 198 | Aufgabe 2

- a) $f'(x) = -2e^x$; $f'(x) < 0$ für alle x f ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$.
 b) $f'(0) = -2$ und $f(0) = -2$ Tangente: $t(x) = -2x - 2$ mit Nullstelle $x = -1$ $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

Seite 198 | Aufgabe 3

- a) $F'(x) = (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x - 15) \cdot e^x = (x^2 - 17) \cdot e^x = f(x)$
 b) $\int_0^u f(x) dx = 15 \Leftrightarrow F(u) - F(0) = 15 \Leftrightarrow (u^2 - 2u - 15) \cdot e^u - (-15) = 15 \Leftrightarrow (u^2 - 2u - 15) = 0 \Leftrightarrow u = 5$ oder $u = -3$

Seite 198 | Aufgabe 4

- a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$; $f''(x) = x + 1$ $f'(x) = 0$ für $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$.
 $f''(1) = 2 > 0$; $f(1) = -\frac{5}{6}$, also $T\left(1 \mid -\frac{5}{6}\right)$ $f''(-3) = -2 < 0$; $f(-3) = \frac{9}{2}$, also $H\left(-3 \mid \frac{9}{2}\right)$
 b) allgemeine Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; $f'''(x) = 6a$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$
 Wegen $a \neq 0$ gilt $f'''(-\frac{b}{3a}) \neq 0$, also befindet sich der einzige Wendepunkt bei $x = -\frac{b}{3a}$.
 c) Da f bei $x = 0$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ hat, hat die Stammfunktion von F bei $x = 0$ ein lokales Maximum. Dies ist nur bei Graph ② der Fall. Die Graphen ① und ③ können nicht die Graphen einer Stammfunktion von f sein.

Seite 199 | Aufgabe 5

- a) Der Graph von f ist eine nach unten geöffnete Parabel, die nur zwischen ihren Nullstellen 2 und 4 positive Werte hat, also findet nur in diesem Intervall Zufluss statt.
 b) Das abfließende Volumen entspricht der Fläche $A = \left| \int_0^2 f(t) dt \right|$ und diese ist kleiner als das Dreieck mit den Eckpunkten $(0|0)$, $(0|-8)$ und $(2|0)$. Dieses Dreieck hat den Flächeninhalt 8.
 c) ① falsch, dort ist ein Maximum des Zuflusses.
 ② wahr, denn bis $t = 2$ fließt Wasser ab, danach wieder zu.
 d) $20 + \int_0^3 f(t) dt$

Seite 199 | Aufgabe 6

- a) allgemeine Form: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $b = d = 0$ (Punktsymmetrie)
 $f'(x) = 3ax^2 + c$ Bedingungen: $f(1) = 0$ und $f'(1) = 2$ Gleichungen: $a + c = 0$ und $3a + c = 2$
 Lösungen: $a = 1$ und $c = -1$. $f(x) = x^3 - x$
 b) $f'(x) = 3x^2 - 1$; $f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$ $f''(x) = 0$ für $x = 0$; $f'''(0) \neq 0$, also Wendepunkt $W(0|0)$
 $f'(0) = -1$ Gleichung der Wendetangente: $t(x) = -x$

Seite 199 | Aufgabe 7

- a) $3x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ oder $x = -\sqrt{3}$
 b) Stammfunktion zu f : $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$ $A = F(\sqrt{3}) - F(0) = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = 2,25$.
 A beschreibt den Inhalt der vom Graphen von f und der x -Achse eingeschlossenen Fläche über dem Intervall $[0, \sqrt{3}]$.
 c) Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung des Graphen von f gilt: $\left| \int_{-\sqrt{3}}^0 f(x) dx \right| = \int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = A$
 Der Flächeninhalt der vom Graphen von f und der x -Achse eingeschlossenen Fläche beträgt $2A$.

Seite 199 | Aufgabe 8

- a) $F'(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x} + (x^2 + x + 1) \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (2x + 1 - x^2 - x - 1) \cdot e^{-x} = (x - x^2) \cdot e^{-x} = f(x)$
 b) Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ Flächeninhalt: $A = F(1) - F(0) = 3e^{-1} - 1$
 c) F hat in $x = 0$ ein lokales Minimum, da dort ein Vorzeichenwechsel von f von $-$ nach $+$ vorliegt.
 F hat in $x = 1$ ein lokales Maximum, da dort ein Vorzeichenwechsel von f von $+$ nach $-$ vorliegt.

Seite 199 | Aufgabe 9

- a) Nullstelle: $x = 5 \cdot \ln\left(\frac{2}{5}\right)$ $f'(x) = e^{\frac{x}{5}}$ Steigung der Tangente im Punkt $P(0|3)$: $f'(0) = 1$
 b) Tangentengleichung: $t(x) = x + 3$ Die Tangente schneidet die x -Achse an der Stelle $x = -3$.
 Die Strecken zwischen den Punkten $(0|0)$ und $P(0|3)$ sowie zwischen $(0|0)$ und $(-3|0)$ sind gleich lang (3 LE).

- c) $f'(x) = e^{\frac{x}{5}} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also hat der Graph von f keine lokalen Extrempunkte.
 $f''(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{x}{5}} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also hat der Graph von f keine Wendepunkte.

Aufgaben zur analytischen Geometrie

Seite 200 | Aufgabe 10

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{vmatrix}$ $x_3 = 1, x_2 = -1, x_1 = 2$
 b) Für $a = 10$ sind die Koeffizienten der 3. Zeile doppelt so groß wie die der 2. Zeile, aber die Konstante ist nicht auch verdoppelt. Somit erhält man eine Widerspruchszeile.

Seite 200 | Aufgabe 11

- a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3+0 \\ 0+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
 b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$
 c) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 2,5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 2 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ $S(-1,5|2|4,5)$
 d) Quader: $V_Q = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; Pyramide: $V_P = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2,5 = 10$; Haus: $V = 34$

Seite 200 | Aufgabe 12

- a) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird erfüllt für $r = -1$ und $s = 0$; Schnittpunkt: $S(3|2|-3)$
 c) Für den Winkel α zwischen den Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ von g und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ von h gilt: $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{6}{3\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 Es folgt $\alpha = 45^\circ$.

Seite 200 | Aufgabe 13

- a) Flugbahn: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Position nach 2 Minuten: $P(10|7|5)$; Position nach 10 Minuten: $P(34|39|5)$
 b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung. Q liegt nicht unter der Flugbahn.
 $\begin{pmatrix} -0,5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $t = -\frac{3}{2}$. R liegt unter der Flugbahn.
 c) Der Richtungsvektor liegt in der x_1x_2 -Ebene. Die Gerade verläuft demnach parallel zur x_1x_2 -Ebene und berührt diese nie.
 d) $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (km/min). Also bewegt sich das Flugzeug mit $60 \cdot 5 = 300$ km/h.

Seite 200 | Aufgabe 14

- a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ ergibt $y = -3$.
 b) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ und $|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = 9$; Die Seiten sind gleich lang.
 c) $\frac{81}{2} = 40,5$ FE
 d) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ $D(7|2|12)$

Seite 201 | Aufgabe 15

- a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird erfüllt für $s = r = -1$.
 b) g hat mit E den Ursprung gemeinsam und einen Richtungsvektor.
 c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6 + a = 0$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6 + a = 0$, also $a = -6$
 d) Die Gerade h verläuft parallel zur Ebene E , weil der Richtungsvektor von h auch Richtungsvektor von E ist. Der Stützpunkt von h ist Q_{-6} , also ist sein Ortsvektor senkrecht zu E . Dann ist sein Betrag gleich dem Abstand von h und E :
 $|\overrightarrow{OQ_{-6}}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$
 e) Da der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E ist und der Punkt $P(0|0|0)$ in E liegt, lautet eine Koordinatengleichung:
 $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0$

Seite 201 | Aufgabe 16

- a) $S(9|2|5)$; Strahl durch S : $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Für $r = 5$ erhält man $S'(4|7|0)$.
 b) $|\overrightarrow{PS'}| = \left| \begin{pmatrix} -9+4 \\ -2+7 \\ 0+0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{50}$

c) $g_{PS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittbedingung: $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

In den ersten beiden Koordinaten muss $t = 1$ gelten. Dann erhält man in der x_3 -Koordinate: $5 - 3 = r$, also $r = 2$.

Wegen $0 \leq r \leq 5$ schneidet g die Antenne.

Seite 201 | Aufgabe 17

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1+t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird erfüllt für $r = t$.

c) $|\overrightarrow{PQ_t}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25 + t^2} \geq \sqrt{25} = 5$

d) Der Abstand von Q_t und Q_0 beträgt $|t|$.

$10 = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ_0}| \cdot |t| = \frac{1}{2} \cdot 5 |t| \Leftrightarrow |t| = 4$

Man erhält $A_1(3|5|2)$ oder $A_2(3|-3|2)$.

Seite 201 | Aufgabe 18

a) Grundfläche: $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$; $V = 32 = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot x_3 \Leftrightarrow x_3 = 8$

$S(0|0|8)$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ wird erfüllt für $r = s = \frac{1}{2}$.

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ für alle a . $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -12 + 8a = 0 \Leftrightarrow a = 1,5$

$\vec{n} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Seite 201 | Aufgabe 19

a) $E: 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12$

b) F hat denselben Normalenvektor wie E . $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 73$, also $F: 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 73$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; Schnittbedingung: $4(4 + 4r) + 3(5 + 3r) + 6(7 + 6r) = 12 \Leftrightarrow 61 + 73 = 12 \Leftrightarrow r = -1$; $Q(0|2|1)$

Aufgaben zur Stochastik

Seite 202 | Aufgabe 20

a) $\bar{A}$: Nach zweimaligem Ziehen wurde kein Joker gezogen.

$\bar{B}$: Unter den drei gezogenen Karten befinden sich genau 2 Buben.

b) $P(A) = 1 - \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{17}{22}$

$P(\bar{B}) = P(\text{Bube, Bube, Bube}) + P(\text{Bube, Bube, Bube}) + P(\text{Bube, Bube}) = 3 \cdot \frac{1}{66} = \frac{1}{22}$

c) $P(\text{genau 4 Asse}) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{12}{6}} = \frac{1}{33}$

Seite 202 | Aufgabe 21

a) Es gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{20}$.

Daraus folgt $P_A(B) = \frac{1}{20} : \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$. Weiter gilt $P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$, $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{2}{3}$.

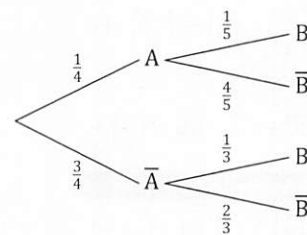
b) ① $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{4}$

② $P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3}$

③ $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{3}{10}$

④ $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{20} : \frac{3}{10} = \frac{1}{6}$

c) Die Ereignisse A und B sind nicht statistisch unabhängig, da z.B. $\frac{1}{4} = P(A) \neq P_B(A) = \frac{1}{6}$ gilt. Außerdem sind im Baumdiagramm die Teilbäume der 2. Stufe verschieden.



Seite 202 | Aufgabe 22

a) $q = 0,8$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Angestellter keine Leitung benötigt.

Unter der Voraussetzung, dass die Angestellten unabhängig voneinander keine Leitung benötigen, gibt der Term an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 Angestellten niemand eine Leitung benötigt, etwa 0,01 ist.

b) Auf lange Sicht wird bei 20 Angestellten durchschnittlich $480 \cdot 0,01 = 4,8 \approx 5$ Minuten am Tag keine Leitung benötigt.

c) X : Anzahl der benötigten Leitungen

Anzahl durchschnittlich benötigter Leitungen bei 20 Angestellten: $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,2 = 4$

d) Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit für bis zu 3 Treffer an, also dafür, dass bei 20 Angestellten maximal 3 Leitungen benötigt werden und somit 3 Leitungen ausreichend sind.

Seite 202 | Aufgabe 23

- a) ① beschreibt die Wahrscheinlichkeit für $P(X = 0)$ für $n = 3$.
 ② beschreibt die Wahrscheinlichkeit für $P(X = 5)$.
 ③ beschreibt die Wahrscheinlichkeit für $P(X \geq 2)$, da
 $P(X = 0) = (1 - p)^n$ und $P(X = 1) = n \cdot p \cdot (1 - p)^{n-1}$ und $P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$.
 b) $\mu = n \cdot p = 20$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 2$. Es gilt $n \cdot p \cdot (1 - p) = 4$.
 Aus $\mu = n \cdot p = 20$ folgt: $20 \cdot (1 - p) = 4 \Leftrightarrow 1 - p = \frac{1}{5} \Leftrightarrow p = \frac{4}{5}$. Damit ist $n = 25$.

Seite 202 | Aufgabe 24

- a) $P(\text{Gewinn}) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,16$
 b) $P_{\text{Gewinn}}(\text{blaue Trommel}) = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,16} = 0,75$
 c) $P(\text{Gewinn}) = \frac{4}{12} \cdot 0,1 + \frac{6}{12} \cdot 0,2 + \frac{2}{12} \cdot p = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{p}{6} = \frac{4+5p}{30} = \frac{1}{6} \Rightarrow 4 + 5p = 5$, also $p = \frac{1}{5} = 0,2$

Seite 203 | Aufgabe 25

- a) Bei jedem der 10 Kunden interessiert man sich nur dafür, ob der gekaufte Pfannkuchen Senf oder Marmelade enthält. Wenn man von einer großen Anzahl von produzierten Pfannkuchen ausgeht, bekommt jeder der 10 Kunden unabhängig von den anderen einen Pfannkuchen mit Senf mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 5 %. X ist also eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0,05$.
 b) Ereignis A: $(1 - 0,05)^2 = 0,95^2$
 Ereignis B: $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^8$
 Ereignis C: $P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0,95^{10} + 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95^9) = 1 - 1,45 \cdot 0,95^9$
 c) Die erste Abbildung stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X dar.
 Die dritte Abbildung stellt die Verteilung die Anzahl der Kunden mit einem Marmeladen-Pfannkuchen dar ($n = 10$ und $p = 0,95$), da diese symmetrisch bezüglich der Vertikalen bei $k = 5$ zur 1. Abbildung ist.

Seite 203 | Aufgabe 26

- a) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$
 b) Lottomodell (3 Kugeln mit geraden Ziffern, 4 Kugeln mit ungeraden Ziffern):
 $P(\text{keine gerade Ziffer}) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{4}{4}}{\binom{7}{4}} = \frac{1 \cdot 1}{35} = \frac{1}{35}$
 $P(\text{genau eine gerade Ziffer}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{7}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{35} = \frac{12}{35}$
 $P(\text{höchstens eine gerade Ziffer}) = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} = \frac{13}{35} > \frac{13}{36} = \frac{1}{3}$
 c) Der Term $\frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{4}}$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den vier gezogenen Kugeln zwei gerade und zwei ungerade und damit genauso viele gerade wie ungerade Ziffern befinden.
 Mit dem Term $1 - \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{4}}$ kann also die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses berechnet werden:
 Unter den gezogenen 4 Kugeln befinden sich unterschiedlich viele gerade und ungerade Ziffern.

Seite 203 | Aufgabe 27

- a) ① $P(B) = \frac{64}{200} = \frac{8}{25} = 0,32$ ② $P(A \cap B) = \frac{16}{200} = \frac{4}{25} = 0,08$
 b) Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von A und B gilt $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, also $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,08}{0,32} = 0,25 = \frac{50}{200}$.

	B	$\bar{B}$	gesamt
A	16	34	50
$\bar{A}$	48	102	150
gesamt	64	136	200

- c) Da A und B stochastisch unabhängig sind, gilt: $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,32 = 0,68$

Seite 203 | Aufgabe 28

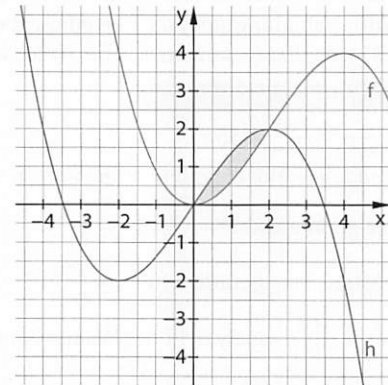
- a) Das Glücksspiel wird durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{2}$ beschrieben.
 Daher ist $\mu = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$. Das Spiel ist also bei einem Einsatz von 50 € fair.
 b) Es ist $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 5$. Da die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ -Regeln. Die 2σ -Umgebung ist $[40; 60]$.
 Danach liegt die Trefferanzahl von X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95,5% nur in den Intervallen ③ und ⑤.
 c) Bei 10 000 Würfeln ist der Erwartungswert $\mu = 5000$ und die Standardabweichung $\sigma = 50$. Der Wert 5200 liegt außerhalb der 3σ -Umgebung. Die Fairness der Münze kann also angezweifelt werden.

6.3 Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgaben zur Analysis

Seite 204 | Aufgabe 1

- a) Nullstellen: $t_1 = 0$; $t_2 = 6$; Gesamtdauer: 6 Sekunden
 Downloadgeschwindigkeit: $f(2) = 2 \left(\frac{\text{MB}}{\text{s}}\right)$
 $f'(t) = -\frac{3}{8}t^2 + \frac{3}{2}t$; $f''(t) = -\frac{3}{4}t + \frac{3}{2}$
 $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8}t^2 + \frac{3}{2}t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ oder $t = 4$.
 $f''(4) = -1,5 < 0$. An der Stelle $t = 4$ liegt ein lokales Maximum. Die Übertragungsrate ist nach 4 Sekunden am höchsten.
 Es ist $f'(2) = 0$ und $f'''(t) = -\frac{3}{4} < 0$;
 f hat also bei $t = 2$ eine Wendestelle.
 Nach 2 Sekunden steigt die Übertragungsrate am stärksten an.
- b) $F(t) = -\frac{1}{32}t^4 + \frac{1}{4}t^3$ ist eine Stammfunktion zu f .
 Insgesamt heruntergeladen: $F(6) - F(0) = 13,5$ (MB)
 Nach 2 s sind es $F(2) - F(0) = F(2) = 1,5$ (MB). Dies entspricht einem Anteil von ca. 11,1 %, also weniger als 12,5 %.
 Nach 5 s sind es $F(5) - F(0) = \frac{375}{32} \approx 11,72$ (MB). Dies entspricht einem Anteil von ca. 86,8 %, also mehr als 85 %.
 Anmerkung: Zur Bestimmung des Zeitpunkts, zu dem 50 % der Datei heruntergeladen sind, ist ein CAS nötig.
 Gesucht ist ein $a > 0$ mit $F(a) = -\frac{1}{32}a^4 + \frac{1}{4}a^3 = 6,75$. Mit einem CAS ergeben sich die Näherungslösungen $a_1 \approx 3,69$ und $a_2 \approx 7,48$. Nur die Lösung a_1 liegt zwischen den Nullstellen von f . Nach ca. 3,69 Sekunden wurden 50 % heruntergeladen.
- c) Das Dreieck unter der Geraden mit den Eckpunkten $W(2|2)$, $P(6|0)$ und $(2|0)$ hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.
 $\int_0^2 f(t) dt = 1,5$ nach b). Der gesamte Download beträgt $4 \text{ MB} + 1,5 \text{ MB} = 5,5 \text{ MB}$, das sind $\frac{5,5}{13,5} \approx 40,7$ % des normalen Downloads, also ist der Gesamtdownload um rund 59,3 % verringert.
- d) Fehler im 1. Druck des Schülerbuchs: Korrekt ist die Abbildung rechts:
 $f(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{2}x$, also $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.
 $A = \int_0^2 (h(x) - f(x)) dx = \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right]_0^2 = 1$
 Differenzfunktion: $d(x) = h(x) - f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 \geq 0$ für $0 \leq x \leq 2$.
 $d'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$; $d''(x) = -\frac{3}{2}$
 $d'(x) = 0$ ergibt $x = 1$; $d''(1) < 0$, also lokales Maximum bei $x = 1$
 Da der Graph von d eine Parabel ist, ist das lokale auch globales Maximum.
 Die maximale vertikale Ausdehnung befindet sich an der Stelle $x = 1$ und beträgt $d(1) = \frac{3}{4} = 0,75$ (LE).



- e) $f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$; $f'(6) = -4,5$
 Tangentengleichung: $t(x) = -4,5x + 27$
 Fläche zwischen dem Graphen von f und Tangente t :
 $A = \left| \int_0^6 (f(x) - t(x)) dx \right| = \left| \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 4,5x - 27\right) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 27x\right]_0^6 \right| = 67,5$
 Gerade g durch $(0|0)$ und $(2|2)$: $g(x) = x$
 Schnittpunkt von Tangente t und Gerade g : $S\left(\frac{54}{11} \mid \frac{54}{11}\right)$
 Flächeninhalt der dreieckigen Teilfläche an der x -Achse: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{54}{11}$
 Flächeninhalt der dreieckigen Teilfläche an der y -Achse: $\frac{1}{2} \cdot 27 \cdot \frac{54}{11}$
 Teilungsverhältnis: $27 : 6 = 4,5 : 1$

Seite 205 | Aufgabe 2

- a) ① $\frac{f(5)-f(3)}{5-3}$ bestimmt die durchschnittliche Geschwindigkeit des Krans in der Zeit zwischen 3 und 5 Sekunden.
 ② $\frac{f(t)-f(3)}{t-3}$; $t \geq 3$ bestimmt die durchschnittliche Geschwindigkeit des Krans im Zeitintervall $[3, t]$.
 ③ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ gibt die Geschwindigkeit an, die der Kran zum Zeitpunkt $t = 3$ hat.
 $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$
 $f'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
 $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
 $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
 $f(6) = 9 \Rightarrow 216a + 36b + 6c + d = 9$
 $f'(6) = 1,5 \Rightarrow 108a + 12b + c = 1,5$
 Lösung: $a = -\frac{1}{24}$; $b = \frac{1}{2}$; $c = 0$; $d = 0$
 $f(t) = -\frac{1}{24}t^3 + \frac{1}{2}t^2$
- b) $f'(t) = -\frac{1}{8}t^2 + t$; $f''(t) = -\frac{1}{4}t + 1$; $f'''(t) = -\frac{1}{4}$
 $f'(t) = 0$ gilt für $t = 0$ (Ausgangspunkt mit $f(0) = 0$) und für $t = 8$
 Bei $t = 8$ befindet sich ein lokales Maximum, welches für $t \geq 0$ auch global ist.
 Nach 8 Sekunden ist die Entfernung vom Ausgangspunkt am größten.
 $f(t) = 0$ gilt für $t = 0$ (Ausgangspunkt) und für $t = 12$.
 Der Kran kehrt nach 12 Sekunden zum Ausgangspunkt zurück.
 $f''(4) = 0$ und $f'''(4) = -\frac{1}{4} < 0$, also Wendestelle bei $t = 4$
 Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$: $f'(4) = 2$
 Bei der Wendestelle hat f' ein lokales Maximum und somit die Geschwindigkeit lokal einen maximalen Wert.
 $f''(8) = -2 < 0$; $f(8) = \frac{32}{3}$

f' hat keine weiteren lokalen Extremstellen

Randwerte: $f'(0) = 0$ und $f'(12) = -6$

Der Kran bewegt sich nach 12 Sekunden am schnellsten (in negativer Richtung).

- c) Die Entfernung vom Startpunkt ist eine Stammfunktion der Geschwindigkeit: $G(t) = -\frac{1}{48}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + C$

Wegen $G(0) = 0$ ist $C = 0$ und $G(t) = -\frac{1}{48}t^3 + \frac{1}{4}t^2$.

Die Funktion G hat ebenso wie die Funktion f die Nullstellen $t = 0$ und $t = 12$. Beide Kräne benötigen also 12 Sekunden für einen Ladevorgang

Wegen $G(t) = \frac{1}{2} \cdot f(t)$ kann der zweite Kran nur eine halb so große maximale Entfernung vom Ausgangspunkt erreichen wie der erste Kran.

- d) Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$A(u) = \frac{1}{2} h(u) \cdot (u + 1) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6}u^4 + u^3 - \frac{1}{6}u^3 + u^2 \right) = -\frac{1}{12}u^4 + \frac{5}{12}u^3 + \frac{1}{2}u^2$$

$$A'(u) = -\frac{1}{3}u^3 + \frac{5}{4}u^2 + u = -\frac{1}{3}u(u^2 - \frac{15}{4}u - 3)$$

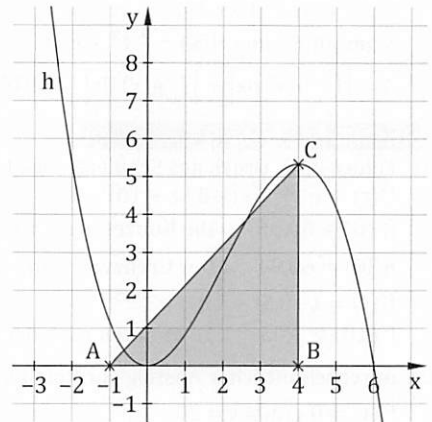
$$A'(u) = 0 \text{ gilt für } u = 0, \text{ für } u = \frac{15 + \sqrt{417}}{8} \approx 4,428 \text{ und für}$$

$$u = \frac{15 - \sqrt{417}}{8} \approx -0,678 \text{ (nicht in } [0; 6]).$$

$$A''(u) = -u^2 + \frac{5}{2}u + 1 \quad A''\left(\frac{15 + \sqrt{417}}{8}\right) \approx -7,53 < 0; A\left(\frac{15 + \sqrt{417}}{8}\right) \approx 13,94$$

Bei $u = \frac{15 + \sqrt{417}}{8}$ befindet sich ein lokales Maximum, welches im Intervall $[0; 6]$ auch global ist ($A(0) = A(6) = 0$).

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist für $u = \frac{15 + \sqrt{417}}{8} \approx 4,428$ mit rund 13,94 FE maximal.



Seite 206 | Aufgabe 3

- a) Gleichung der Geraden durch B und C: $h(x) = 2x - 6$

$$g(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$$

$$\text{Es gilt } g'(x) = 2x - 4 \text{ und } g'(3) = 2$$

$g'(1) = -2$; Der Vorzeichenwechsel gegenüber der Steigung im Punkt B lässt sich auch dadurch erklären, die Parabel g achsensymmetrisch ist zur Vertikalen durch den Scheitelpunkt bei $x = 2$.

- b) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Bedingungen:

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d + e = 0$$

$$f'(1) = g'(1) = -2 \Rightarrow 4a + 3b + 2c + d = -2$$

weitere Bedingungen z.B.:

$$f(0) = 2 \Rightarrow e = 2$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c - d + e = 0$$

$$\text{Lösung: } a = 1; b = 0; c = -3; d = 0; e = 2$$

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

- c) blaue Fläche:

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 (f(x) - h(x)) dx + 2 \int_1^3 (g(x) - h(x)) dx = 2 \int_0^1 (x^4 - 3x^2 - 2x + 8) dx + 2 \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 - x^2 + 8x \right]_0^1 + 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_1^3 = 2 \left(\frac{31}{5} - 0 \right) + 2 \left(9 - \frac{19}{3} \right) = \frac{266}{15} \approx 17,733 \end{aligned}$$

Es werden 6 Liter Farbe gebraucht. Da $6 \cdot 199 \text{ €} = 1194 \text{ €}$ knapp unter 1200 € ist, reicht das Budget aus.

- d) $f'(x) = 4x^3 - 6x$; $f''(x) = 12x^2 - 6$; $f'''(x) = 24x$

$$f''(x) = 0 \text{ ergibt } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x_1) \neq 0 \text{ und } f'''(x_2) \neq 0; f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Wendepunkte: } W_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{3}{4}\right); W_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{3}{4}\right)$$

Fehler im 1. Druck des Schülerbuchs: Die linke Wendetangente t_1 hat die Gleichung $t_1(x) = 2\sqrt{2}x + \frac{11}{4}$.

$$m = 2\sqrt{2} = f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ und } t_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ also ist } t_1 \text{ die linke Wendetangente.}$$

$$\text{Rechte Wendetangente: } t_2(x) = -2\sqrt{2}x + \frac{11}{4}$$

- e) Fläche zwischen den beiden Wendetangenten und dem Graphen von f :

$$2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (t_2(x) - f(x)) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-x^4 + 3x^2 - 2\sqrt{2}x + \frac{3}{4} \right) dx = 2 \left[-\frac{1}{5}x^5 + x^3 - \sqrt{2}x^2 + \frac{3}{4}x \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{5}\sqrt{2} \approx 0,283$$

Der Flächeninhalt des Logos beträgt beim 2. Entwurf ca. $17,733 \text{ m}^2 + 0,283 \text{ m}^2 = 18,016 \text{ m}^2$

Dies entspricht einem Größenzuwachs von ca. 1,6 %.

Da nun 7 Liter Farbe benötigt werden, übersteigen die Kosten von $7 \cdot 199 \text{ €} = 1393 \text{ €}$ das Budget von 1200 €.

Seite 207 | Aufgabe 4

- a) $f(t) - S = (a - S) \cdot e^{-kt}$; $a = 85$ ist die Anfangstemperatur des Wassers in °C, $S = 30$ die Umgebungstemperatur in °C.

Wegen $f(30) = 48$ gilt $48 - 30 = 55 \cdot e^{-k \cdot 30}$. Diese Gleichung wird nach k aufgelöst: $k = \frac{\ln\left(\frac{18}{55}\right)}{-30} \approx 0,037$

Also gilt: $f(t) = 30 + 55e^{-0,037t}$

$$f(60) \approx 35,9735$$

Nach einer Stunde beträgt die Temperatur rund 35,97 °C.

$$f(t) = 40 \text{ gilt für } t = -\frac{1}{0,037} \ln\left(\frac{10}{55}\right) \approx 46,07.$$

Nach rund 46,1 min beträgt die Temperatur 40 °C.

Die prozentuale Abweichung von 36 °C von 35,9735 °C ist rund 0,074 %.

b) $f'(t) = -2,035 \cdot e^{-0,037t}$; $f'(45) \approx -0,385$

Nach 45 min nimmt die Temperatur mit der Geschwindigkeit von ca. $0,385 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$ ab.

$$f'(t) = -1 \text{ gilt für } t = -\frac{1}{0,037} \ln\left(\frac{1}{2,035}\right) \approx 19,2.$$

Nach etwa 19,2 min nimmt die Temperatur mit der Geschwindigkeit von $1 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$ ab.

c) $G'(x) = -(2(x+1) \cdot e^{-x} + (x+1)^2 \cdot (-e^{-x})) = (-2(x+1) + (x+1)^2) \cdot e^{-x} = (x+1)(x-1) \cdot e^{-x} = (x^2-1) \cdot e^{-x} = g(x)$

Eine weitere Stammfunktion G_2 von g hat die Gleichung $G(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig, also z.B. $G_2(x) = (x^2-1) \cdot e^{-x} + 1$.

Nullstellen von g : $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ Fläche: $A = \left| \int_{-1}^1 g(x) dx \right| = |G(1) - G(-1)| = \left| -\frac{4}{e} - 0 \right| = \frac{4}{e}$

d) $h(x) = a(x-1)(x+1) = ax^2 - a$ Mit $h'(x) = 2ax$ und $h'(1) = 2a = 2$ folgt $a = 1$ und $h(x) = x^2 - 1$

Stammfunktion: $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

$$A = \left| \int_{-1}^0 h(x) dx \right| + \left| \int_0^1 g(x) dx \right| = |H(0) - H(-1)| + |G(1) - G(0)| = \left| 0 - \frac{2}{3} \right| + \left| -\frac{4}{e} - (-1) \right| = \frac{4}{e} - \frac{1}{3} \approx 1,138$$

Seite 208 | Aufgabe 5

a) Fehler im 1. Druck des Schülerbuchs: Es soll $f'(10)$ berechnet und interpretiert werden. Kontrollergebnis:

$$f'(t) = e^{-0,05t} \cdot (-0,5t + 10)$$

$$f(10) \approx 60,65 \quad \text{Die Konzentration 10 Minuten nach der Sprengung beträgt ca. } 60,65 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}.$$

$$f(30) \approx 60,94 \quad \text{Der Grenzwert von } 50 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3} \text{ wird eine halbe Stunde nach der Sprengung überschritten.}$$

$$f'(t) = (-0,5t + 10) \cdot e^{-0,05t}$$

$$f'(10) \approx 3,03 \quad 10 \text{ Minuten nach der Zündung nimmt die Feinstaubkonzentration pro Minute um ca. } 3 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3} \text{ zu.}$$

b) durchschnittlicher Anstieg der Konzentration in den ersten 10 Minuten in $\frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$ pro Minute: $\frac{f(10)-f(0)}{10-0} \approx 6,065$

$$f'(t) = 0 \text{ ergibt } t = 20.$$

Untersuchung auf Vorzeichenwechsel: $f'(10) \approx 3$ und $f'(30) \approx -1,1$ also bei $t = 20$ lokales Maximum; $f(20) \approx 73,58$

Wegen $f(0) = 0 < f(20)$ und $f(120) \approx 2,97 < f(20)$ ist dies auch das globale Maximum von f auf $[0; 120]$.

Nach 20 Minuten ist die Konzentration mit ca. $73,58 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$ am höchsten.

$$f''(t) = (0,025t - 1) \cdot e^{-0,05t} \quad f''(t) = 0 \text{ ergibt } t = 40.$$

Untersuchung auf Vorzeichenwechsel: $f''(0) = -1$ und $f''(50) \approx 0,02$, also bei $t = 40$ lokales Minimum von f'

$$f'(40) \approx -1,353$$

Wegen $f'(0) = 10 > f'(40)$ und $f'(120) \approx -0,12 > f'(40)$ ist dies auch das globale Minimum von f' auf $[0; 120]$.

Nach 40 Minuten wird die Feinstaubkonzentration mit ca. $1,353 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$ pro Minute am stärksten reduziert.

Da f' keine lokalen Maxima hat, ist $f'(0) = 10$ das globale Maximum von f' auf $[0; 120]$.

Die Feinstaubkonzentration nimmt im Moment der Zündung ($t = 0$) am stärksten zu.

c) $F'(t) = -200 \cdot e^{-0,05t} + (-200t - 4000) \cdot e^{-0,05t} \cdot (-0,05) = (-200 + 10t + 200) \cdot e^{-0,05t} = f(t)$

$$\int_0^{120} f(t) dt = F(120) - F(0) \approx 3930,6$$

$$\frac{1}{120} \int_0^{120} f(t) dt \approx 32,75 \text{ gibt die mittlere Feinstaubkonzentration in den ersten 120 Minuten in } \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3} \text{ an.}$$

d) Mit $f(40) = 400e^{-2}$ und $m = f'(40) = -10e^{-2}$ ergibt sich die Tangente $g(t) = -10e^{-2} \cdot (t - 80)$.

Nach diesem Modell ist der Feinstaub nach 80 Minuten abgebaut.

Gesucht ist nun ein Punkt $(t | f(t))$ auf dem Graphen von f , für den die Verbindungsstrecke zum Punkt $(125 | 0)$ die Steigung

$f'(t)$ hat:

$$\frac{0-f(t)}{125-t} = f'(t) \Leftrightarrow (125-t) \cdot f'(t) = -f(t) \Leftrightarrow (125-t)(-0,5t+10) \cdot e^{-0,05t} = -10t \cdot e^{-0,05t} \Leftrightarrow t^2 - 125t + 2500 = 0$$

Es folgt $t = 25$ oder $t = 100$.

Setzt sich der Konzentrationsabbau nach 25 oder 100 Minuten linear fort, liegt nach 125 Minuten keine Belastung mehr vor.

Aufgaben zur analytischen Geometrie

Seite 209 | Aufgabe 6

a) $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F(1|9|0)$

Rechter Winkel bei A: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Also ist AEFB ein Rechteck.

Trapez: $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$; Mit einem Paar paralleler Seiten ist ABCD ein Trapez, und da die gegenüberliegenden Seiten $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AB}$ nicht gleich lang sind, ist es kein Parallelogramm.

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{Das Trapez ABCD ist gleichschenkelig, denn } |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{36 + 49 + 25} = \sqrt{110} = \sqrt{4 + 81 + 25} = |\overrightarrow{BC}|.$$

b) $E_{ABD}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; A und B liegen auf E_{ABD} und auf der x_1x_2 -Ebene, also ist $g = g_{AB}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$E_{ABD} \text{ hat den Normalenvektor } \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ -80 \end{pmatrix} = (-20) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die graue Dachfläche liegt in der x_1x_2 -Ebene und hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Für den Winkel } \alpha \text{ zwischen den Dachflächen gilt: } \cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{1}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \approx 0,873$$

$$\alpha \approx 29,2^\circ$$

- c) Schattengerade g_S durch S : $g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$; Der Schnitt mit E_{ABC} führt zu einem LGS mit der Matrix:

$$\begin{pmatrix} s & r & k \\ -8 & -6 & 1 \\ 4 & -7 & 2 \\ 0 & 5 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{vmatrix} \quad \text{Man erhält } k = 3, r = \frac{1}{2}, s = \frac{3}{8} \text{ und } S'(0|-3|2,5).$$

Wegen $0 \leq r, s \leq 1$ liegt S' im Parallelogramm, welches von A aus durch $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AB}$ aufgespannt wird. Es liegt dann im Trapez, wenn es außerdem in dem Parallelogramm liegt, welches von B aus durch $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ aufgespannt wird. Das ist der Fall, denn $\overrightarrow{OS'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $s = \frac{1}{2}$ und $r = \frac{3}{8}$, also $0 \leq r, s \leq 1$.

Insgesamt liegt S' damit im Trapez ABCD.

Punktprobe für T' und g : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird erfüllt für $k = \frac{1}{2}$.

Schattengerade für T : $g_T: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

Da T auf dem Mast liegt, muss gelten $T(3|3|z)$. Daraus ergibt sich $r = -1$ und somit $T(3|3|1,5)$.

$\overrightarrow{RT'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{T'S'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ Schattenlänge in Meter: $|\overrightarrow{RT'}| + |\overrightarrow{T'S'}| = \sqrt{5} + \sqrt{26,25} \approx 7,4$

- d) $g_{RT'}$ senkrecht zu g : $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $g_{T'S'}$ senkrecht zu g : $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Der Winkel zwischen den Dachflächen ist gleich dem Winkel zwischen $g_{RT'}$ und $g_{T'S'}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{26,25}} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{26,25}} \approx 0,873 \quad \alpha \approx 29,2^\circ$$

Nimmt man T' als Fußpunkt der Höhe des Trapezes, dann ist der Endpunkt der Höhe auf g_{DC} der Punkt von $g_{T'S'}$, dessen x_3 -Koordinate gleich 5 ist.

Man sieht, dass dazu $k = 2$ bei $g_{T'S'}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ gelten muss. Demnach ist die Höhe $h = \left| 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{26,25}$.

Die Parallelen des Trapezes haben die Längen $a = |\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{5}$ und $c = |\overrightarrow{DC}| = 2\sqrt{5}$.

Fläche: $A = \frac{1}{2}(4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{26,25} \approx 68,74$

Seite 210 | Aufgabe 7

- a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -33 \\ -18 \\ 118 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -18 \\ 118 \end{pmatrix} + 9t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
 $|\overrightarrow{MN}| = \left| 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 9\sqrt{21} \approx 41,24$

Der Meteorit bewegt sich also mit etwa 41,24 km/s = 148 464 km/h.

- b) Ebene $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

S auf g : $\begin{pmatrix} 23 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -18 \\ 118 \end{pmatrix} + 9t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 56 \\ 28 \\ -112 \end{pmatrix} = 9t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ Man erhält $t = \frac{28}{9}$, S liegt auf g .

S auf F : $\begin{pmatrix} 23 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die mittlere Zeile ergibt $s = 2$ und dann ist $r = 1$. S liegt auf F , ist also Schnittpunkt von g und F .

Der Meteorit schlägt zum Zeitpunkt $t = \frac{28}{9}$ auf, also nach $3\frac{1}{9}$ Sekunden.

- c) Probe für Q : $\begin{pmatrix} -93 \\ -48 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -18 \\ 118 \end{pmatrix} + 9t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -60 \\ -30 \\ z_1 - 118 \end{pmatrix} = 9t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die ersten beiden Zeilen werden für $9t = -30$, also für $t = -\frac{10}{3}$ erfüllt. In der 3. Zeile ist dann $z_1 - 118 = 120$, damit liegt $Q(-93|-48|238)$ auf der Flugbahn. Der Zeitpunkt der Beobachtung liegt ca. 3,33 s vor Erreichen des Punktes M (bei $t = 0$).

Probe für R : $\begin{pmatrix} -51 \\ -9 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -18 \\ 118 \end{pmatrix} + 9t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \\ z_2 - 118 \end{pmatrix} = 9t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die ersten beiden Zeilen sind unerfüllbar (Vorzeichen!), also kann – bei geradlinigem Flug – der Meteorit nicht in R beobachtet worden sein.

- d) $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Da jede Koordinate von $\overrightarrow{CS}$ kleiner ist als die entsprechenden Koordinaten von $\overrightarrow{AS}$ bzw. $\overrightarrow{BS}$, liegt der Punkt C am nächsten am Aufschlagpunkt S .

Normalenvektor von F : $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 14$ Koordinatengleichung von F : $-4x_1 + x_2 + 16x_3 = 14$

Lotgerade zu F durch Punkt M : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -33 \\ -18 \\ 118 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$ Einsetzen in die Koordinatengleichung von F ergibt $t = -\frac{284}{39}$

Abstand: $d(M, F) = \left| -\frac{284}{39} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \right| = \frac{284}{39} \cdot \sqrt{273} \approx 120,32$

Der Meteorit war zum Zeitpunkt seiner ersten Sichtung etwa 120,32 km von der Ebene F entfernt.

- e) Flugbahn des Flugzeuges: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t_m \begin{pmatrix} 16 \\ 4,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}$; t_m entspricht der Zeit in Minuten.

$$\text{Matrix zur Schnittbedingung: } \begin{pmatrix} 2 & -16 & 34 \\ 1 & -4,8 & 21 \\ -4 & -0,8 & -109 \end{pmatrix} \quad \text{Man erhält } t_m = \frac{1}{0,8} = 1,25 \text{ und } t = 3.$$

Der Meteorit ist nach 3 Sekunden am Schnittpunkt der Flugbahnen, das Flugzeug nach 75 Sekunden.

$$\text{Winkel: } \cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 4,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{279,68}} = \frac{33,6}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{279,68}} \approx 0,438 \quad \alpha \approx 64,0^\circ$$

$$f) \left[\begin{pmatrix} -34 \\ -21 \\ 109 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ -36 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -525 + 189t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{525}{189} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$$

$$\vec{u}_{\frac{25}{9}} = \begin{pmatrix} -34 \\ -21 \\ 109 \end{pmatrix} + \frac{25}{9} \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \left| \vec{u}_{\frac{25}{9}} \right| = \sqrt{256 + 16 + 81} = \sqrt{353} \approx 18,8$$

Der Betrag von $\vec{u}_{\frac{25}{9}}$ ist die Länge des Lotes von T auf g und entspricht dem Abstand von T zur Flugbahn g.

- g) Bis zum Aufschlag des Meteoriten bewegt sich das Flugzeug von T aus nur um $3\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 16 \\ 4,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}$, ist also maximal

$\frac{28}{540} \sqrt{279,68} \text{ km} \approx 0,87 \text{ km}$ von T entfernt. T selbst ist mindestens 18,8 km vom Meteoriten entfernt. Damit bleibt das Flugzeug mindestens 18,8 km – 0,87 km $\approx 18 \text{ km}$ vom Meteoriten entfernt. Der Meteorit stellt also keine Gefahr für das Flugzeug dar.

Seite 211 | Aufgabe 8

- a) $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$; $D(-8|-1|6)$ Rechter Winkel bei B: $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0$
 $A'(-2|-4|0)$ $B'(0|0|0)$ $C'(-6|3|0)$ $D'(-8|-1|0)$ $F(1|-3|0)$
 $|\vec{SF}| = 8 \text{ LE}$; Länge der Stange: $8 \cdot 0,3 \text{ m} = 2,4 \text{ m}$

- b) B ist Stützpunkt von E. Mit $r = 1$ und $s = 0$ erhält man die Koordinaten von A, mit $r = -\frac{1}{2}$ und $s = 5$ erhält man die Koordinaten von S.

$$E': \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind Richtungsvektoren der Ebene E_1 .

$$\text{Normalenvektor von } E_1: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 30 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 15$$

$$\text{Koordinatengleichung von } E_1: 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 15$$

$$\text{Einsetzen von E in } E_1: 2(-2r) - (-4r - s) + 5(3 + s) = 15 \Leftrightarrow 15 + 6s = 15 \Leftrightarrow s = 0$$

Also schneiden sich E und E_1 .

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{OB} + r \cdot \vec{BA} = g_{AB}$$

- d) $\vec{OM} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $M(-1|-2|3)$

$$\vec{MS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MS} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$\vec{MS} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -12 - 3 + 15 = 0$$

$$\text{Fläche des Dreiecks ABS: } A = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{MS}| = \frac{1}{2} \sqrt{20} \cdot \sqrt{30} = 5\sqrt{6} \approx 12,24 \text{ (LE}^2\text{)}$$

- e) $\vec{BS} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ Volumen: $V = G \cdot h = 5\sqrt{6} \cdot |\vec{BC}| = 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{54} = 90 \text{ LE}^3 = 90 \cdot (0,3 \text{ m})^3 = 2,43 \text{ m}^3$

$$f) \cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{6^2+3^2+3^2} \cdot \sqrt{6^2+3^2+0^2}} = \frac{45}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{45}} \approx 0,913 \quad \alpha \approx 24,1^\circ$$

- g) Schnitt von $g_{BC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt $k = \frac{2}{3}$ und $t = 5$. Damit ist $P(-4|2|5)$.

Wegen $0 \leq k \leq 1$ liegt P auf der Strecke $\vec{BC}$. Teilungsverhältnis: $|\vec{BP}| : |\vec{PC}| = 2 : 1$

- h) $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ h sei die Gerade, die parallel zu $\vec{AB}$ unter $\vec{AB}$ liegt und g schneidet: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Schnitt von h und g: } \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ergibt } s = \frac{2}{3}; t = \frac{5}{3} \text{ und } z = \frac{5}{3} \text{ mit dem Schnittpunkt } Q(-\frac{2}{3} | -\frac{4}{3} | \frac{5}{3}).$$

Die x_3 -Koordinate von Q ist $\frac{5}{3}$ und somit befindet sich der Punkt Q um $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$ Längeneinheiten, also $\frac{4}{3} \cdot 0,3 \text{ m} = 0,4 \text{ m}$ unterhalb der Strecke $\vec{AB}$. Das Kind müsste 40 cm nach unten reichen.

- i) Der Punkt der Stange mit der kürzesten Entfernung zu $\vec{AB}$ befindet sich in der Höhe $x_3 = 3$, also bei $S_1(1|-3|3)$.

$$\text{Lotgerade von } S_1 \text{ auf } \vec{AB}: g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnitt von } g_1 \text{ und } g_{AB}: \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ wird erfüllt für } r = 1 \text{ und } s = \frac{1}{2}, \text{ der Schnittpunkt ist } M(-1|-2|3).$$

$$\text{Distanz der Stange zu } \vec{AB}: \left| 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5} \text{ LE} = 0,3 \cdot \sqrt{5} \text{ m} \approx 0,67 \text{ m}$$

Seite 212 | Aufgabe 9

- a) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -42 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -18 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
 Man sieht sofort $|\overrightarrow{CF}| = |\overrightarrow{AF}|$. Weiter gilt $|\overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{50} = |\overrightarrow{CF}|$, also sind alle drei Seiten gleich lang.
 $E_{ACF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit E_{ACF} schneiden, ergibt: $\begin{pmatrix} -7 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -23 \\ -11 \\ 25 \end{vmatrix}$ Man erhält $k = 3$; $s = r = 2$; $S(0|6|0)$.
 rechtwinkliges Schneiden: $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$
- c) $\overrightarrow{AP_k} = \begin{pmatrix} -23+k \\ -11+7k \\ 25-5k \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CP_k} = \begin{pmatrix} 19+k \\ -17+7k \\ 25-5k \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{AP_k}|^2 = 1275 - 450k + 75k^2 = 75(17 - 6k + k^2) = |\overrightarrow{CP_k}|^2$
- d) Es muss gelten $|\overrightarrow{AP_k}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = (6\sqrt{50})^2 = 1800$, also:
 $75(17 - 6k + k^2) = 1800 \Leftrightarrow k^2 - 6k + 17 = 24 \Leftrightarrow k^2 - 6k - 7 = 0 \Leftrightarrow (k-7)(k+1) = 0$
 Man erhält $P_7(4|34|-20)$ und $P_{-1}(-4|-22|20)$.
- e) Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck ACF mit Seitenlänge $a = |\overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{50} = 30\sqrt{2}$
 Mit der Formel für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks gilt: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1800}{4}\sqrt{3}$
 Die Lotgerade g durch $H(-4|-22|20)$ schneidet E_{ACF} in $S(0|6|0)$.
 Für die Höhe h der Pyramide gilt dann $h = |\overrightarrow{HS}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ -20 \end{pmatrix} \right| = \left| 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = 4\sqrt{75} = 20\sqrt{3}$.
 Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1800}{4}\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} = 9000$
- f) $M_{AF}(11|8|5)$; $M_{FC}(-10|11|5)$; $M_{CH}(-13|-10|5)$; $M_{HA}(8|-13|5)$
 $\overrightarrow{M_{AF}M_{HA}} = \overrightarrow{M_{FC}M_{CH}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -21 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_{AF}M_{FC}} = \overrightarrow{M_{HA}M_{CH}} = \begin{pmatrix} -21 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
 Die Mittelpunkte bilden eine Raute und wegen $\begin{pmatrix} -3 \\ -21 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ein Quadrat.
- g) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -42 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 42 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}$ $B(2|20|-10)$

Aufgaben zur Stochastik

Seite 213 | Aufgabe 10

- a) $P(\text{Gewinn}) = \frac{1}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10} = 0,1$
 $P(A) = P(\text{genau 2 Richtige}) + P(\text{Gewinn}) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} + 0,1 = \frac{6}{10} + 0,1 = 0,7$ $P(B) = 1 - P(\text{Gewinn}) = 1 - 0,1 = 0,9$
- b) Fehler im 1. Druck des Schülerbuchs: Der Preis beträgt 3,60 € pro Wettschein.
 $P(\text{genau 2 Richtige}) = 0,6$; $P(\text{genau 1 Richtiger}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10} = 0,3$
 langfristig zu erwartende durchschnittliche Auszahlung:
 $P(\text{Gewinn}) \cdot 9 \text{ €} + P(\text{genau 2 Richtige}) \cdot 3,60 \text{ €} + P(\text{genau 1 Richtiger}) \cdot 1,20 \text{ €}$
 $= 0,1 \cdot 9 \text{ €} + 0,6 \cdot 3,60 \text{ €} + 0,3 \cdot 1,20 \text{ €} = 3,42 \text{ €} < 3,60 \text{ €}$
 Für ein faires Spiel mit Einsatz E muss gelten: $0,1 \cdot 9 \text{ €} + 0,6 \cdot E + 0,3 \cdot \frac{1}{3}E = E$
 Es folgt $0,9 \text{ €} = 0,3 \cdot E$ und für den Einsatz eines fairen Spiels $E = 3 \text{ €}$.
- c) Damit die Verteilungen Y und Z binomialverteilt sind, wird bei jedem Spiel nur zwischen „Treffer“ (hier „drei Richtige“) und „kein Treffer“ unterschieden und die Spielwiederholungen müssen unabhängig voneinander sein. Ein Treffer tritt bei jedem Spiel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit (hier 0,1) auf.
 Es gilt $Y \sim B_{100;0,1}$ und $Z \sim B_{10.000;0,1}$. Der Term $\binom{100}{8} \cdot 0,1^8 \cdot 0,9^{92}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 8)$, dass bei Anbieter A genau 8 von 100 Spielern 3 Richtige haben.
- d) ① $P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) \approx 0,417$
 ② $P(950 \leq Z \leq 1050) = P(Z \leq 1050) - P(Z \leq 949) \approx 0,908$
 ③ $P(Z < 1000) = P(Z \leq 999) \approx 0,495$
 ④ $P(Y = 10) \cdot P(Y < 10) = P(Y = 10) \cdot P(Y \leq 9) \approx 0,132 \cdot 0,451 \approx 0,060$
 Gesucht ist der kleinste Wert c mit $P(1000 - c \leq Z \leq 1000 + c) \geq 0,75$. Man erhält $c = 35$.
 Es gilt $P(965 \leq Z \leq 1035) \approx 0,763$ und $P(966 \leq Z \leq 1034) \approx 0,7499$.
 Anmerkung: Als Anhaltspunkt für c kann man zunächst die 1σ -Umgebung
- e) Bei Anbieter A liegt die Anzahl an Spielern mit drei Richtigen unter 5 oder über 15.
- f) $n = 10\,000$ und $p = 0,1$, also $\mu = n \cdot p = 1000$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 30 > 3$ (Laplace-Bedingung)
 Die Anzahl der Spieler mit 3 Richtigen liegt mit etwa 99,7 % Wahrscheinlichkeit in der 3σ -Umgebung
 $[1000 - 3 \cdot 30; 1000 + 3 \cdot 30] = [910; 1090]$.

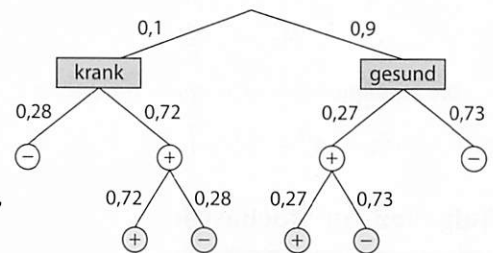
Seite 214 | Aufgabe 11

- a) X ist binomialverteilt mit $n = 60$ und $p = 0,9$.
- ① $P(X = 58) \approx 0,039$
 - ② $P(X > 58) = 1 - P(X \leq 58) \approx 0,014$
 - ③ $P(55 < X \leq 58) = P(X \leq 58) - P(X \leq 55) \approx 0,257$
- b) Es sind $60 \cdot 350 - 19\,000$ die Einnahmen abzüglich der Kosten. Davon werden die langfristig zu erwartenden durchschnittlichen Entschädigungen abgezogen. Darin ist jeder Summand das Produkt aus dem k -Fachen von 500 und der Wahrscheinlichkeit für k Entschädigungen. Es sind eine (59 Personen wollen die Reise antreten) oder zwei (alle 60 Personen wollen die Reise antreten) Überbuchungen möglich. Man erhält mit dem Term als zu erwartender Gewinn bei 60 Buchungen 1992,21 €.
- Gewinn bei 58 Buchungen in €: $58 \cdot 350 - 19\,000 = 1300$
- Nun sei X binomialverteilt mit $n = 61$ und $p = 0,9$.
- zu erwartender Gewinn bei 61 Buchungen in €:
- $$61 \cdot 350 - 19000 - 1 \cdot 500 \cdot P(X = 59) - 2 \cdot 500 \cdot P(X = 60) - 3 \cdot 500 \cdot P(X = 61)$$
- $$= 2350 - 500 \cdot (0,0365 + 0,022 + 0,0048) = 2318,35$$
- Bei 61 angenommenen Buchungen ist der zu erwartende Gewinn pro Reise am höchsten.
- c) ① X sei binomialverteilt mit $n = 61$ und $p = 0,9$, dann gilt: $P(X \geq 59) = 1 - P(X \leq 58) \approx 0,049$
- ② Der Schnittpunkt der beiden Graphen ist die Lösung der Gleichung $P_{61;p}(X \geq 59) = 0,014$, die x -Koordinate ist p . Für $p < 0,875$ ist die Wahrscheinlichkeit von Abweisungen kleiner als 1,4 %.
- d) Y : Anzahl der Verspätungen; $p = 0,12$ Gesucht ist das kleinste n mit $P(Y \geq 1) \geq 0,96$
- $$P(Y \geq 1) \geq 0,96 \Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0,96 \Leftrightarrow P(Y = 0) \leq 0,04 \Leftrightarrow 0,88^n \leq 0,04, \text{ also } n \geq \log_{0,88}(0,04) \approx 25,18$$
- Die Person muss mindestens 26 Reisen mit dem Unternehmen antreten.

Seite 215 | Aufgabe 12

- a) ① $P(\text{krank} \cap \text{positiv}) = 0,1 \cdot 0,72 = 0,072$
- ② $P(\text{gesund} \cap \text{negativ}) = 0,9 \cdot 0,73 = 0,657$
- ③ $P_{\text{positiv}}(\text{krank}) = \frac{P(\text{krank} \cap \text{positiv})}{P(\text{positiv})} = \frac{0,1 \cdot 0,72}{0,1 \cdot 0,72 + 0,9 \cdot 0,27} \approx 0,229$
- ④ $P_{\text{negativ}}(\text{gesund}) = \frac{P(\text{gesund} \cap \text{negativ})}{P(\text{negativ})} = \frac{0,9 \cdot 0,73}{0,1 \cdot 0,28 + 0,9 \cdot 0,73} \approx 0,959$
- b) $P_{2\text{-mal positiv}}(\text{krank}) = \frac{P(\text{krank} \cap 2\text{-mal positiv})}{P(2\text{-mal positiv})} = \frac{0,1 \cdot 0,72^2}{0,1 \cdot 0,72^2 + 0,9 \cdot 0,27^2} \approx 0,441$

Die Wahrscheinlichkeit, nach zwei positiven Tests wirklich erkrankt zu sein, hat sich gegenüber der nach einem positiven Test verdoppelt.



$$P_{\text{positiv; negativ}}(\text{gesund}) = \frac{P(\text{gesund} \cap \text{positiv; negativ})}{P(\text{positiv; negativ})} = \frac{0,9 \cdot 0,27 \cdot 0,73}{0,1 \cdot 0,72 \cdot 0,28 + 0,9 \cdot 0,27 \cdot 0,73} \approx 0,898$$

- c) ① Da der Stichprobenumfang $n = 5000$ gegenüber der Grundgesamtheit sehr klein ist, wirkt sich das Ziehen ohne Zurücklegen so gut wie nicht auf die Wahrscheinlichkeit aus, einen Erkrankten anzutreffen. Damit kann auf allen Stufen des Zufallsversuchs mit gleichem $p = 0,1$ gerechnet werden. Es handelt sich also um eine Bernoulli-Kette.
- ② $E(X) = 5000 \cdot 0,1 = 500$; $\sigma = \sqrt{5000 \cdot 0,1 \cdot (1 - 0,1)} = \sqrt{450} \approx 21,2 > 3$ (Laplace-Bedingung)
- 2σ -Umgebung: $[500 - 2 \cdot 21,2; 500 + 2 \cdot 21,2] = [457,6; 542,4]$
- $P(458 \leq X \leq 542) \approx 0,9549 < 0,955$ und $P(457 \leq X \leq 543) \approx 0,960 > 0,955$, das gesuchte Intervall lautet $[457; 543]$.
- ③ $2 \cdot 2\sigma = 84 \Leftrightarrow \sqrt{n \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 21 \Leftrightarrow 0,09n = 441 \Leftrightarrow n = 4900$
- d) $F_{5000; 0,1}(464) = P(X \leq 464) = 4,6\%$ gibt das Risiko an, dass man anhand der Stichprobe auch dann mediterrane Ernährung für vorteilhaft in Bezug auf Diabetes hält, wenn dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist.

Seite 216 | Aufgabe 13

- a) Wäre die Reihenfolge der Buchstaben egal, gäbe es keinen Anlass das Spiel vorzeitig abubrechen, denn es wäre dann selbst bei der 3. Drehung noch stets ein Gewinn möglich.
- Anzahl der möglichen Ergebnisse: $3^3 = 27$
- Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Gewinn erzielt wird: $P(\text{TOR}) + P(\text{ROT}) + P(\text{TTT}) + P(\text{OOO}) + P(\text{RRR})$
- $P(\text{TOR}) = P(\text{ROT}) = 0,5 \cdot 0,25^2$ und $P(\text{OOO}) = P(\text{RRR}) = 0,25^3$ und $P(\text{TTT}) = 0,5^3$
- Damit ist die Wahrscheinlichkeit für einen beliebigen Gewinn $2 \cdot 0,5 \cdot 0,25^2 + 0,5^3 + 2 \cdot 0,25^3$.

Ergebnis	TOR	ROT	TTT	OOO	RRR	sonstige
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{50}{64}$

- b) langfristig zu erwartende durchschnittliche Auszahlung: $20 \text{ €} \cdot \frac{2}{32} + 5 \text{ €} \cdot \frac{1}{8} + 50 \text{ €} \cdot \frac{2}{64} = 3,4375$

Bei einem Einsatz von 3,50 € pro Spiel entsteht langfristig ein Verlust von $3,50 \text{ €} - 3,4375 \text{ €} = 0,0625 \text{ €} = 6,25 \text{ Cent}$.

Gesucht ist ein Auszahlungsbetrag x für das Ergebnis (TTT) mit $20 \text{ €} \cdot \frac{2}{32} + x \cdot \frac{1}{8} + 50 \text{ €} \cdot \frac{2}{64} = 3,50 \text{ €}$. Es folgt $x = 5,50 \text{ €}$.

Bei einer Auszahlung von 5,50 € beim Ergebnis (TTT) und sonst unveränderten Auszahlungen ist das Spiel fair.

c) $p = P(TR) + P(RT) \therefore P(OT) + P(OR) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$

X ist binomialverteilt, weil die einzelnen Drehs unabhängig voneinander sind und weil es genau zwei mögliche Ausgänge gibt: „Treffer: Spiel endet nach 2 Drehs“, „kein Treffer: Spiel endet nicht“. Die Parameter sind $n = 2000$ und $p = \frac{7}{16}$.

$$E(X) = 2000 \cdot \frac{7}{16} = 875; \sigma = \sqrt{2000 \cdot \frac{7}{16} \cdot \left(1 - \frac{7}{16}\right)} = \sqrt{\frac{7875}{16}} \approx 22,2 > 3 \text{ (Laplace-Bedingung)}$$

$$2\sigma\text{-Umgebung: } [875 - 2 \cdot 22,2; 875 + 2 \cdot 22,2] = [830,6; 919,4]$$

$P(831 \leq X \leq 919) \approx 0,9552 > 0,955$ und $P(832 \leq X \leq 918) \approx 0,950 < 0,955$, das kleinste um den Erwartungswert symmetrische Intervall mit mindestens 95,5 % Wahrscheinlichkeit lautet $[831; 919]$.

Gesucht ist nun das kleinste n mit $P(X \geq 1) \geq 0,95$

$$P(X \geq 1) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0,05 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{16}\right)^n \leq 0,05, \text{ also } n \geq \log_{\frac{9}{16}}(0,05) \approx 5,21$$

Der Spieler müsste das Spiel also mindestens sechsmal spielen, damit das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens einmal vorzeitig endet.

- d) ① Wahrscheinlichkeit, dass der erste erdrehende Buchstabe R oder O ist und der Spieler gewinnt.

$$P(\bar{T} \cap G) = P(ROT) + P(RRR) + P(OOO) = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{1}{16}$$

- ② Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler nicht gewinnt, unter der Bedingung, dass der erste erdrehende Buchstabe T ist.

$$P_T(\bar{G}) = 1 - P_T(G) = 1 - \frac{P(T \cap G)}{P(T)} = 1 - \frac{P(TOR) + P(TTT)}{P(T)} = 1 - \frac{\frac{1}{32} + \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{5}{16}$$

- ③ Wahrscheinlichkeit, dass der erste erdrehende Buchstabe R oder O ist, unter der Bedingung, dass der Spieler gewinnt.

$$P_G(\bar{T}) = \frac{P(\bar{T} \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{15}{64}} = \frac{2}{7}$$

Die Ereignisse T und G sind stochastisch abhängig, da z.B. gilt: $P_G(\bar{T}) = \frac{2}{7} \neq \frac{1}{2} = P(\bar{T})$