

6.2 Aufgaben ohne Hilfsmittel

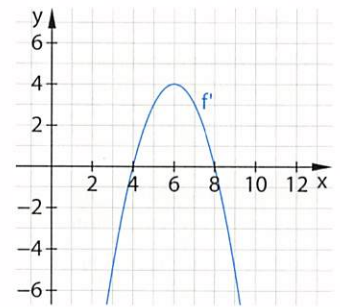
Die folgenden Aufgaben sollen ohne Taschenrechner sowie ohne Formelsammlung gelöst werden. Der hilfsmittelfreie Teil einer Abiturprüfung enthält Aufgaben aus den drei Bereichen Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik.

Aufgaben zur Analysis

1. Gegeben ist die **Ableitungsfunktion** f' mit

$$f'(x) = -x^2 + 12x - 32, x \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f' .
- Die Abbildung zeigt den Graphen von f' . Skizzieren Sie in Ihrem Heft den Graphen einer möglichen **Ausgangsfunktion** f .
- Gegeben ist die Ableitungsfunktion g' mit $g'(x) = f'(x) - 5$. Entscheiden Sie begründet, ob der Graph einer möglichen Ausgangsfunktion mindestens einen lokalen Extrempunkt besitzt.



2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$.

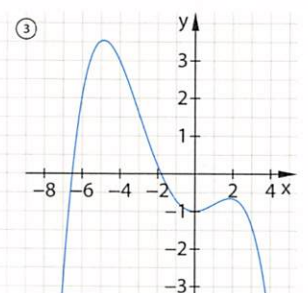
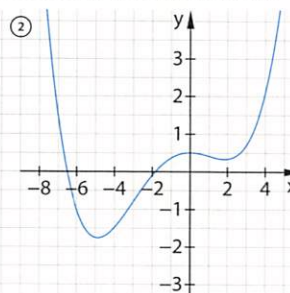
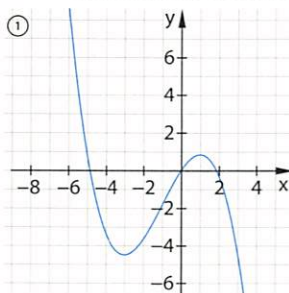
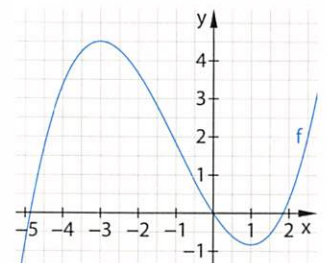
- Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f' und treffen Sie mit ihrer Hilfe eine Aussage über das Monotonieverhalten von f .
- Die Tangente an den Graphen von f im Schnittpunkt mit der y -Achse begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck einen Flächeninhalt von 1 FE hat.

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 17) \cdot e^x$.

- Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (x^2 - 2x - 15) \cdot e^x$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.
- Bestimmen Sie einen Wert für u , sodass gilt: $\int_0^u f(x) dx = 15$

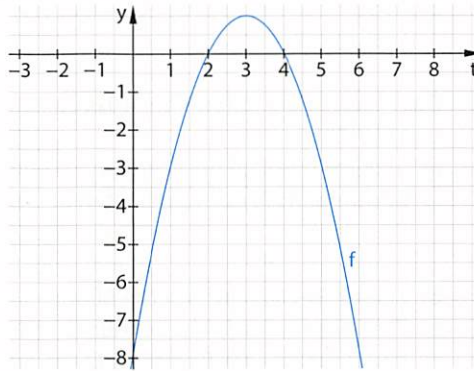
4. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$.

- Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f in $H\left(-3 \mid \frac{9}{2}\right)$ einen Hochpunkt und in $T\left(1 \mid -\frac{5}{6}\right)$ einen Tiefpunkt hat.
- Begründen Sie, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades stets genau einen Wendepunkt hat.
- Entscheiden Sie begründet, bei welchem der abgebildeten Graphen es sich nicht um den Graphen einer Stammfunktion von f handeln kann.



5. Ein Tank enthält zu Beginn der Beobachtung 20 m^3 Wasser. Für die anschließenden 6 Stunden gibt die Funktion f mit $f(t) = -(t-2)(t-4)$ die Zu-/Abflussrate in m^3/h an.

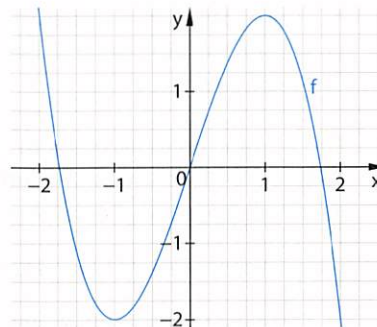
- Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f , dass im Zeitraum $[2; 4]$ ein Zufluss von Wasser stattfindet.
- Begründen Sie anhand der Abbildung des Graphen von f , dass in den ersten 2 Stunden weniger als 8 m^3 abfließen.
- Geben Sie an, welche der Aussagen wahr ist:
 - Bei $t = 3$ hat der Wasserstand im Tank ein Maximum.
 - Bei $t = 2$ hat der Wasserstand im Tank ein lokales Minimum.
- Geben Sie einen Term an, mit dem das Wasservolumen im Tank nach 3 Stunden berechnet werden kann.



6. Die ganzrationale Funktion f dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $B(1|0)$ hat die Gleichung $t(x) = 2x - 2$.
- Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f .
 - Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente des Graphen von f .

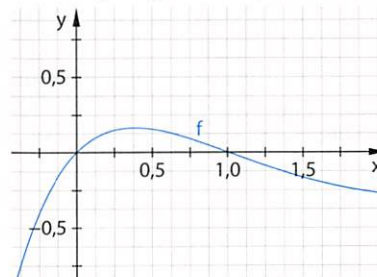
7. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 3x - x^3$.

- Leiten Sie her, dass die Funktion f die Nullstellen $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ und $x_3 = \sqrt{3}$ hat.
- Berechnen Sie $A = \int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx$ und erläutern Sie die geometrische Bedeutung der Zahl A .
- Erläutern Sie, dass der Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f mit der x -Achse eingeschlossen wird, $2 \cdot A$ beträgt.



8. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x - x^2) \cdot e^{-x}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f .

- Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (x^2 + x + 1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion zu f ist.
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f zwischen seinen Nullstellen mit der x -Achse einschließt.
- Geben Sie die Extremstellen von F an und erläutern Sie ohne weitere Berechnungen, um was für eine Art von Extremum es sich handelt.



9. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot e^{\frac{x}{5}} - 2$.

- Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f .
Ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(0|3)$.
- Zeigen Sie, dass diese Tangente mit den Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck einschließt.
- Zeigen Sie, dass der Graph von f weder Extrempunkte noch Wendepunkte hat.

Aufgaben zur Analytischen Geometrie

10. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem mit Parameter a .
- Lösen Sie das Gleichungssystem für $a = 6$.
 - Begründen Sie, dass das Gleichungssystem für $a = 10$ keine Lösung hat.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_2 + ax_3 = 4 \end{cases}$$

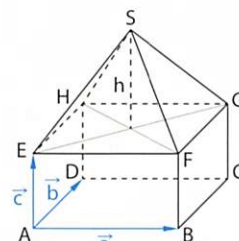
11. Das Haus hat die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(0|4|0)$, $D(-3|0|0)$ und $E(0|0|2)$.

- In der Skizze sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eingezeichnet. Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren.

$$\vec{v}_1 = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{v}_2 = \vec{a} - \vec{c};$$

$$\vec{v}_3 = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}; \quad \vec{v}_4 = \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$$

- Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{BD}$ eine Länge von 5 LE hat.
- Die Spitze S des Dachs befindet sich 2,5 LE oberhalb des Mittelpunktes des Rechtecks $EFGH$. Geben Sie die Koordinaten von S an.
- Berechnen Sie das Volumen des abgebildeten Körpers.



12. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Punkte $A(3|2|-3)$ und $B(1|2|-5)$ gegeben.

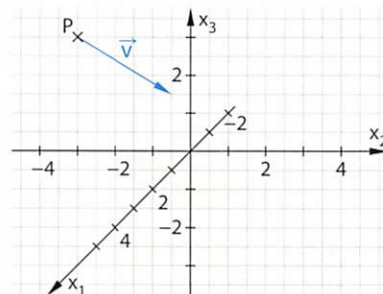
- Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B . Ermitteln Sie die Parameterdarstellung von h .
- Weisen Sie nach, dass sich die Geraden g und h in genau einem Punkt schneiden.
- Weisen Sie nach, dass die Geraden einen Winkel von 45° einschließen.

(Hilfe: $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

13. Ein Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $P(4|-1|5)$. Die Bewegung des Flugzeugs innerhalb einer Minute wird durch den Vektor

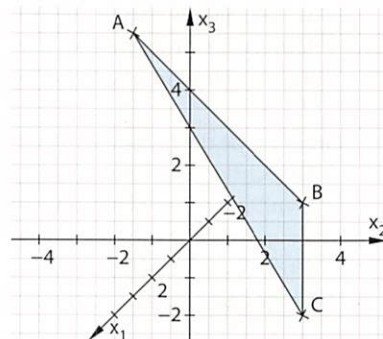
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ beschrieben. } 1 \text{ LE} = 1 \text{ km}$$

- Ermitteln Sie die Position des Flugzeugs nach 2 Minuten und nach 10 Minuten.
- Überprüfen Sie, welche der Punkte $Q(1|5|0)$ und $R(-0,5|-7|0)$ senkrecht unter der Flugbahn liegen.
- Begründen Sie, dass das Flugzeug auf diesem Kurs niemals den Erdboden in der x_1x_2 -Ebene berührt.
- Zeigen Sie, dass sich das Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von 300 km/h bewegt.



14. Gegeben sind die Punkte $A(1|-1|6)$, $B(10|8|6)$, $C(4|5|0)$ und $P(2|y|4)$ mit $y \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie y so, dass P auf der Geraden g durch A und C liegt.
- Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC im Punkt C einen rechten Winkel besitzt und gleichschenkelig ist.
- Berechnen Sie mithilfe des Ergebnisses aus b) den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
- Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Dreieck ABC zum Quadrat ergänzt wird.



15. Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$ und die Gerade $g: \vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

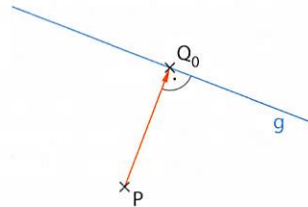
- Zeigen Sie, dass der Punkt $P(0|0|0)$ in der Ebene E liegt.
- Begründen Sie ohne weitere Berechnungen, dass alle Punkte der Geraden g in der Ebene E enthalten sind.
- Bestimmen Sie a so, dass der Ortsvektor von $Q_a(2|3|a)$ senkrecht auf E steht.
- Begründen Sie, dass die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zu E im Abstand $d = 7$ verläuft.
- Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von E .

16. In einem kartesischen Koordinatensystem modelliert die x_1x_2 -Ebene eine Dachfläche. Eine Längeneinheit entspricht 1 m. Im Punkt $P(9|2|0)$ ist eine 5 m lange Antenne senkrecht zur Dachfläche angebracht. Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung der Sonnenstrahlen an.

- Geben Sie die Koordinaten des Punktes S , der die Spitze des Mastes darstellt, an, und berechnen Sie die Koordinaten seines Schattens S' in der x_1x_2 -Ebene.
- Zeigen Sie, dass die Länge des Schattens, den die Antenne auf die Dachfläche wirft, $\sqrt{50} \text{ m} \approx 7,07 \text{ m}$ beträgt.
- Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, schneidet die Gerade g_{PS} durch P und S , in der die Antenne liegt. Weisen Sie nach, dass der Schnittpunkt auf der Strecke $\overline{PS}$ und somit auf der Antenne liegt.

17. Gegeben ist der Punkt $P(-1|1|-1)$ und für $t \in \mathbb{R}$ der Punkt $Q_t(3|1+t|2)$.

- Geben Sie eine Parameterform der Geraden g an, welche durch $S(3|1|2)$ parallel zur x_2 -Achse verläuft.
- Zeigen Sie, dass alle Punkte Q_t auf g liegen.
- Zeigen Sie rechnerisch, dass für den Abstand d von P zu Q_t gilt: $d \geq 5$.
- Der Vektor $\overrightarrow{PQ_0}$ für $t = 0$ steht senkrecht auf g . Geben Sie einen Punkt A auf g an, sodass das Dreieck AQ_0P einen Flächeninhalt von 10 FE hat.

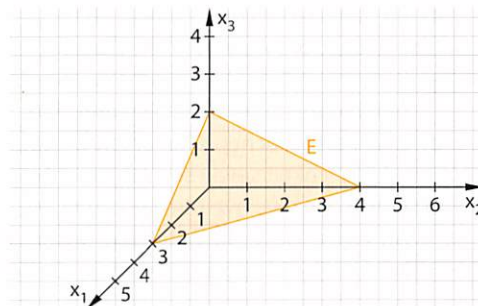


18. Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$ und $C(0|6|0)$.

- Der Punkt S liegt auf der positiven x_3 -Achse so, dass die Pyramide mit Grundfläche ABC und Spitze S ein Volumen von 32 VE hat. Bestimmen Sie die Koordinaten von S .
- Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene E durch die Punkte B, C und S an.
- Zeigen Sie, dass $P(0|3|4)$ auf E liegt.
- Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die durch P senkrecht zu E verläuft.

19. Gegeben ist die Ebene E laut Abbildung.

- Geben Sie für E eine Koordinatengleichung an.
- Geben Sie eine Koordinatengleichung der zu E parallelen Ebene F an, die den Punkt $P(4|5|7)$ enthält.
- Die Gerade g , die P enthält und senkrecht auf E steht, durchstößt E im Punkt Q . Bestimmen Sie die Koordinaten von Q .

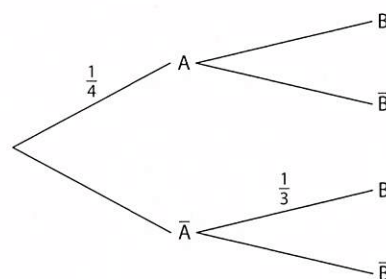


Aufgaben zur Stochastik

20. In einem Kartendeck befinden sich 12 Karten, darunter sechs Joker, vier Asse und zwei Buben. Es wird nacheinander je eine Karte ohne Zurücklegen gezogen. Es werden die folgenden Ereignisse betrachtet.
- A: Nach zweimaligem Ziehen wurde mindestens ein Joker gezogen.
 B: Unter drei gezogenen Karten befindet sich höchstens ein Bube.
- Formulieren Sie die Gegenereignisse $\bar{A}$ und $\bar{B}$.
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A und $\bar{B}$.
 - Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann, dass nach sechsmaligem Ziehen alle Asse gezogen wurden.

21. Von zwei Ereignissen A und B ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide eintreffen, gegeben durch $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$.

- Übertragen Sie das Baumdiagramm und ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass
 - ① B eintritt und A nicht eintritt
 - ② B eintritt, nachdem $\bar{A}$ eingetroffen ist
 - ③ B eintritt
 - ④ A eintritt, nachdem B eingetroffen ist



- Ermitteln Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

22. Die 20 Angestellten eines Unternehmens wenden etwa 20 % ihrer Arbeitszeit für Kunden-telefonate auf. Dafür stehen 10 Leitungen bereit.

- Erläutern Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung des Terms $0,8^{20} \approx 0,01$.
- Der Arbeitstag ist 480 Minuten lang. Geben Sie an, wie viele Minuten keine Leitung benötigt wird.
- Geben Sie an, wie viele Leitungen im Durchschnitt gleichzeitig benötigt werden.
- Die Anzahl der Leitungen soll auf 3 reduziert werden. Erläutern Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung des Terms

$$0,8^{20} + 20 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{18} + \binom{20}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{17}$$

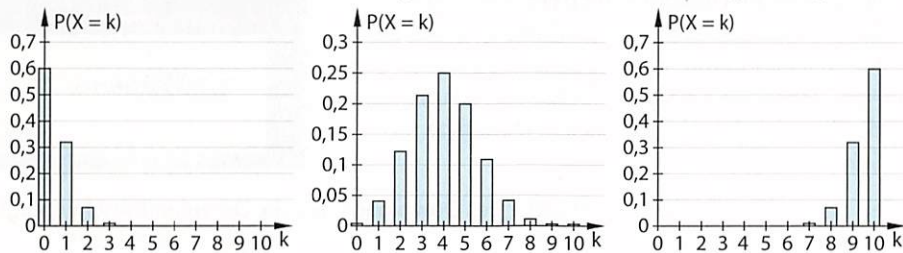
23. Es sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p.

- Erläutern Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung der Terme ①, ② und ③.
 ① $(1-p)^3$ ② $\binom{n}{5} \cdot p^5 \cdot (1-p)^{n-5}$ ③ $1 - ((1-p)^n + n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1})$
- Gegeben sind $\mu = 20$ und $\sigma = 2$. Bestimmen Sie n und p.

24. Durch die Menschenmenge eines Volksfestes bewegen sich zehn Losverkäufer. Vier von ihnen haben rote Lostrommeln, in denen der Anteil der Gewinne 0,1 beträgt. In den blauen Lostrommeln der restlichen sechs Verkäufer befinden sich 20 % Gewinne.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand bei einem zufällig angetroffenen Losverkäufer einen Gewinn zieht.
- Eine Festbesucherin hat einen Gewinn gezogen. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie diesen aus einer blauen Trommel gezogen hat.
- Es werden zwei weitere Verkäufer mit grünen Lostrommeln losgeschickt, in denen der Anteil der Gewinne p beträgt. Bestimmen Sie p so, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem zufällig ausgewählten Losverkäufer ein Gewinnlos zu ziehen $\frac{1}{6}$ ist.

25. Zum Karneval produziert ein Konditor Pfannkuchen. 5 % der Pfannkuchen enthalten Senf anstatt Marmelade. Nacheinander kaufen zehn Kunden je einen Pfannkuchen.
- Die Größe X zählt die Anzahl der Kunden, die einen Pfannkuchen mit Senf bekommen. Begründen Sie, dass X eine binomialverteilte Zufallsgröße ist, und geben Sie n und p an.
 - Geben Sie je einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A , B und C berechnet werden kann.
 A : Die ersten zwei Kunden bekommen einen Pfannkuchen mit Marmelade.
 B : Genau zwei der zehn Kunden erwischen einen Pfannkuchen mit Senf.
 C : Mindestens zwei Kunden bekommen einen Pfannkuchen mit Senf.
 - Entscheiden Sie, welche der Abbildung zur binomialverteilten Zufallsgröße X gehört.



Begründen Sie, dass eine der anderen Abbildungen die Verteilung der Anzahl der Kunden mit einem Marmeladen-Pfannkuchen beschreibt.

26. In einer Urne befinden sich sieben Kugeln, die mit den Ziffern 1 bis 7 beschriftet sind. Es werden nacheinander zufällig vier Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
- Berechnen Sie die Anzahl möglicher Ergebnisse, wenn die Reihenfolge der gezogenen Kugeln keine Rolle spielt.
 - Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den gezogenen Kugeln höchstens eine Kugel mit einer geraden Ziffer befindet, mehr als ein Drittel beträgt.
 - Formulieren Sie ein Ereignis im Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $1 - \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{4}}$ berechnet werden kann.

27. Die Vierfeldertafel zeigt die Ergebnisse einer Umfrage von 200 Personen, die nach den Merkmalen (A) und (B) befragt wurden.

	B	$\bar{B}$	gesamt
A	16		
$\bar{A}$			
gesamt	64		200

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf eine zufällig ausgewählte Person
 ① Merkmal (B) zutrifft. ② beide Merkmale zutreffen.
 - Übertragen Sie die Vierfeldertafel in Ihr Heft und vervollständigen Sie sie so, dass die Merkmale (A) und (B) stochastisch unabhängig sind.
 - Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit auf eine zufällig ausgewählte Person, auf die das Merkmal (A) nicht zutrifft, auch das Merkmal (B) nicht zutrifft.
28. Bei einem Glücksspiel wird 100-mal eine Münze geworfen. Für jeden Wurf mit „Zahl“ erhält der Spieler 1 €. Bei „Kopf“ erhält er nichts. Es wird angenommen, dass die Münze fair ist.
- Bestimmen Sie einen Einsatz, bei dem das Spiel fair ist.
 - Entscheiden Sie, in welchen Intervallen die Auszahlung nach 100 Würfeln mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95,5 % liegt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
 ① [45; 55] ② [47; 53] ③ [40; 60] ④ [42; 58] ⑤ [38; 62]
 - Bei einer Beobachtung von 10 000 Würfeln mit der Münze tritt „Kopf“ 5200-mal auf. Beurteilen Sie, ob die Fairness der Münze aufgrund dieser Beobachtung angezweifelt werden sollte.

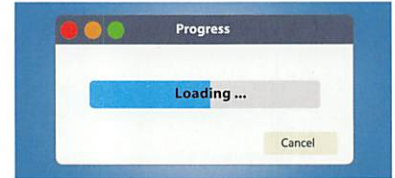
6.3 Aufgaben mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben können Taschenrechner sowie Formelsammlungen verwendet werden. Der Lösungsweg sollte vollständig nachvollziehbar dokumentiert werden. Die Dokumentation geht in die Bewertung ein.

Aufgaben zur Analysis

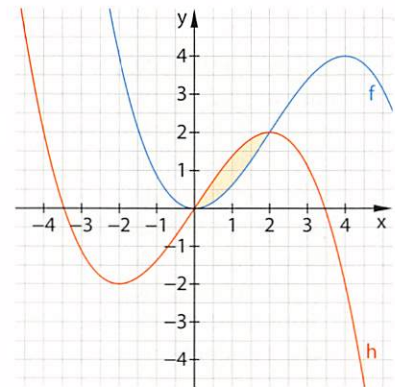
1. Download

Der Graph der Funktion f mit $f(t) = -\frac{1}{8}t^3 + \frac{3}{4}t^2$ beschreibt zwischen seinen Nullstellen die Übertragungsrate während eines Downloads einer App. Dabei gibt t die Zeit in Sekunden an und $f(t)$ die Downloadgeschwindigkeit in Megabyte pro Sekunde ($\frac{\text{MB}}{\text{s}}$).



- Bestimmen Sie die Gesamtdauer des Downloads und die Downloadgeschwindigkeit nach 2 Sekunden.
Berechnen Sie den Zeitpunkt mit der höchsten Übertragungsrate.
Zeigen Sie, dass f bei $t = 2$ eine Wendestelle hat, und erklären Sie ihre Bedeutung im Sachzusammenhang.
- Berechnen Sie, wie viele Megabyte insgesamt heruntergeladen werden.
Zeigen Sie, dass nach 2 Sekunden erst weniger als 12,5 % und nach 5 Sekunden bereits über 85 % der Daten heruntergeladen sind.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem 50 % der Daten heruntergeladen sind.
- Aufgrund eines technischen Fehlers wird die Übertragungsrate ab $t = 2$ angegeben durch die Gerade g_1 durch den Wendepunkt von f und $P(6|0)$. Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Gesamtdownload durch diesen Fehler verringert wird.

Unabhängig vom Sachzusammenhang werden nun die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und h mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$ und $h(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x$ betrachtet.



- Die Graphen von f und h schließen wie abgebildet eine Fläche ein. Berechnen Sie ihren Inhalt.
Bestimmen Sie mithilfe einer geeigneten Differenzfunktion die Stelle, an der die eingeschlossene Fläche die größtmögliche vertikale Ausdehnung hat. Geben Sie die maximale vertikale Ausdehnung an.
- Es sei t die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P(6|0)$.
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f , der Tangente t und der y -Achse eingeschlossen wird.
Die Tangente t begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Die Gerade g durch die Schnittpunkte der Graphen von f und h zerlegt das Dreieck in zwei Teile.
Geben Sie die Gleichung der Geraden g an. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem das Dreieck durch die Gerade g zerlegt wird.

2. Containerkran

Beim Be- und Entladen eines Containerschiffs bewegt sich ein Kran entlang einer Schiene hin und her. Zum Zeitpunkt $t = 0$ steht der Kran still im Ausgangspunkt und startet einen Ladevorgang. Nach 6 Sekunden hat der Kran 9 Meter zurückgelegt und entfernt sich weiter mit einer Geschwindigkeit von $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Entfernung zum Startpunkt soll während eines Ladevorgangs mit einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades beschrieben werden (t in s; $f(t)$ in m).



- a) Erklären Sie die Bedeutung der folgenden Terme im Sachzusammenhang:

① $\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3}$,

② $\frac{f(t) - f(3)}{t - 3}, t \geq 3$

③ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

Ermitteln Sie eine geeignete Funktionsgleichung von f .

[Kontrollergebnis: $f(t) = -\frac{1}{24}t^3 + \frac{1}{2}t^2$]

- b) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem der Abstand zum Ausgangspunkt am größten ist. Bestimmen Sie den Zeitpunkt der Rückkehr zum Ausgangspunkt.

Zeigen Sie, dass $t = 4$ eine Wendestelle von f ist, und geben Sie die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt an. Deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt t für $0 \leq t \leq 12$, an dem sich der Kran am schnellsten bewegt.

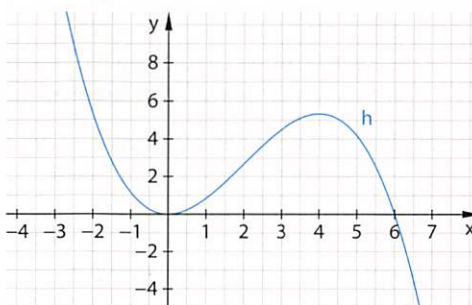
- c) Im Hafen steht ein weiterer Containerkran. Die Geschwindigkeit seiner Bewegung beim Ladevorgang wird durch die Funktion g mit $g(t) = -\frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{2}t$ (t in s; $g(t)$ in m/s) beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ steht der Kran im Ausgangspunkt.

Weisen Sie nach, dass beide Kräne dieselbe Zeit für einen Ladevorgang benötigen.

Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Containerschiffe, die dieser zweite Kran entladen kann, nur halb so breit sein dürfen wie beim ersten Kran.

Unabhängig vom Sachzusammenhang wird die Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2$ betrachtet. Die Abbildung zeigt den Graphen von h .

- d) Die Punkte $A(-1|0)$, $B(u|0)$ und $C(u|h(u))$ mit $0 \leq u \leq 6$ bilden die Eckpunkte eines Dreiecks ABC . Übertragen Sie die Abbildung in Ihr Heft und zeichnen Sie ein Dreieck ein, das diese Bedingungen erfüllt. Berechnen Sie u so, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird. Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an.

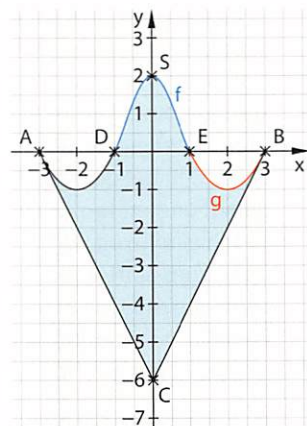


[Kontrollergebnis: $A(u) = -\frac{1}{12}u^4 + \frac{5}{12}u^3 + \frac{1}{2}u^2$]

3. Firmenlogo

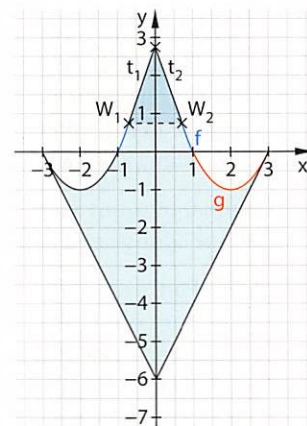
Die Grafikabteilung einer Firma entwirft ein neues Logo, das an die Hauswand der Firmenzentrale gemalt werden soll. Die gefärbte symmetrische Fläche in der Abbildung stellt einen ersten Entwurf dar. Das Budget, das für die Farbe zum Auftragen an die Hauswand benötigt wird, beträgt 1200 €.

Eine Längeneinheit entspricht 1 m.



- Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte $B(3|0)$ und $C(0|-6)$ verläuft. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung des Parabelbogens g , welcher durch die Punkte $E(1|0)$ und B verläuft und in B dieselbe Steigung hat wie die Gerade durch B und C .
Begründen Sie, dass der Graph von g im Punkt E die Steigung -2 hat.
[Kontrollergebnis: $g(x) = x^2 - 4x + 3$]
- Die in der Abbildung dargestellte blaue Randkurve ist der Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades, die am Punkt E dieselbe Steigung hat wie der Graph von g . Entnehmen Sie der Abbildung drei weitere Bedingungen an den Graphen von f und ermitteln Sie mithilfe derer die Funktionsgleichung von f .
[Kontrollergebnis: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$]
- Die für das Auftragen des Logos benötigte Spezialfarbe kostet pro Liter 199 € und reicht für eine Fläche von 3 m^2 . Untersuchen Sie, ob das Budget ausreicht, um genug Farbe für das Logo zu kaufen.

In einem zweiten Entwurf der Grafikabteilung wird der obere Teil der blauen Randkurve durch das abgebildete Dreieck ersetzt. Die beiden Wendetangenten t_1 und t_2 an den Graphen von f stellen die Seiten des gleichschenkligen Dreiecks dar.



- Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f .
Weisen Sie nach, dass die linke Wendetangente t_1 durch die Gleichung $t_1(x) = -2\sqrt{2}x + \frac{11}{4}$ gegeben ist. Geben Sie ohne zu rechnen die Gleichung der rechten Wendetangente t_2 an den Graphen von f an.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Logos im zweiten Entwurf unter Verwendung der Symmetrieeigenschaften des Graphen von f .
Geben Sie an, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Logos im zweiten Entwurf vom dem im ersten Entwurf abweicht.
Ermitteln Sie, ob das Budget auch für die Realisierung des zweiten Entwurfs ausreicht, wenn dieselbe Spezialfarbe wie in c) verwendet wird.

4. Abkühlung

Der Abkühlungsprozess von Flüssigkeiten kann mithilfe exponentieller Funktionen modelliert werden.

In einem Versuch wird heißes Wasser mit einer Temperatur von 85°C in eine Umgebung mit 30°C gebracht. Nach 30 Minuten wird im Wasser eine Temperatur von 48°C gemessen.



- a) Sie können davon ausgehen, dass die Temperaturdifferenz mit der Zeit exponentiell abnimmt. Ermitteln Sie mithilfe des Messwerts eine Funktion f , die den Verlauf der Wassertemperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) modellhaft beschreibt.

[Kontrollergebnis: $f(t) = 30 + 55e^{-0,037t}$]

Bestimmen Sie damit die Wassertemperatur nach einer Stunde und den Zeitpunkt, an dem eine Temperatur von 40°C erreicht wird.

Im Versuch wird nach einer Stunde eine Temperatur von 36°C gemessen. Geben Sie die prozentuale Abweichung dieses Messwerts vom mit f errechneten Wert an.

- b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der die Temperatur nach 45 Minuten abnimmt. Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Temperatur mit einer Geschwindigkeit von einem Grad pro Minute abnimmt.

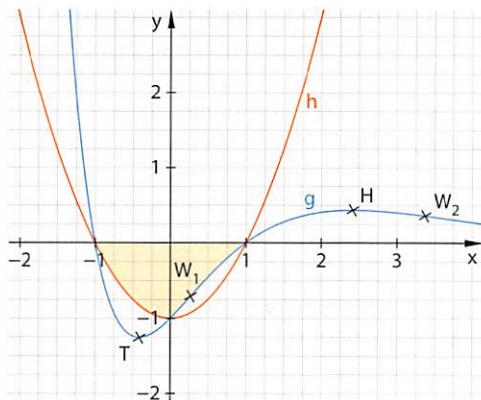
Unabhängig vom Sachzusammenhang wird nun die Funktion g mit $g(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$ betrachtet.

- c) Zeigen Sie, dass durch $G(x) = -(x+1)^2 \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von g gegeben ist. Geben Sie eine weitere Stammfunktion von g an. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von g und die x -Achse einschließen.

- d) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion h zweiten Grades, also $h(x) = ax^2 + bx + c$, welche die gleichen Nullstellen wie g hat und in der positiven Nullstelle die Steigung 2 hat.

[Kontrollergebnis: $h(x) = x^2 - 1$]

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von g und h sowie der x -Achse eingeschlossen wird (siehe Abbildung).



5. Sprengung

Bei Abbrucharbeiten durch Sprengung entstehen in der Umgebung hohe Feinstaubkonzentrationen. Bei einer solchen Sprengung konnten die entsprechenden Messwerte in den ersten zwei Stunden sehr gut durch die Funktion f mit $f(t) = 10t \cdot e^{-0,05t}$ und $0 \leq t \leq 120$ modelliert werden. Dabei gibt t die Zeit in Minuten seit der Zündung an und $f(t)$ die Feinstaubkonzentration in Mikrogramm pro Kubikmeter Luft ($\mu\text{g}/\text{m}^3$).

Die Tatsache, dass sich unabhängig von der Sprengung immer eine verschwindend geringe Menge Feinstaub in der Luft befindet, wird in dieser Aufgabe vernachlässigt.

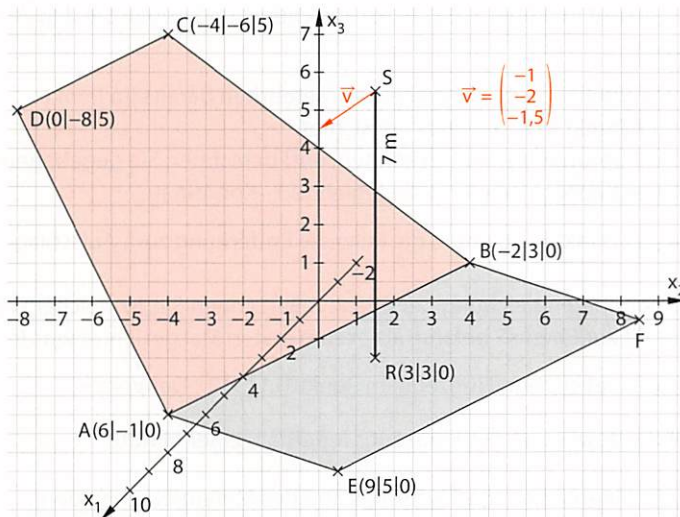
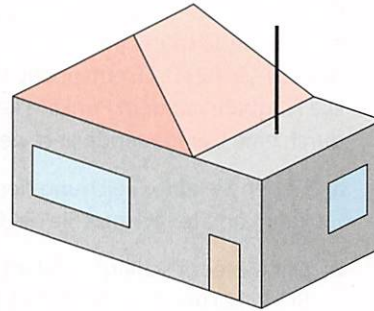


- a) Berechnen Sie die Feinstaubkonzentration 10 Minuten nach der Sprengung.
 Von der Europäischen Union wird ein Grenzwert von $50 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$ vorgeschrieben, der nicht überschritten werden soll. Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Feinstaubkonzentration eine halbe Stunde nach der Sprengung über diesem Grenzwert liegt.
 Berechnen Sie $f'(10)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
 [Kontrollergebnis: $f'(t) = e^{-0,05t} \cdot (-0,5t + 10)$]
- b) Berechnen Sie, um wie viel $\frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$ die Feinstaubkonzentration in den ersten 10 Minuten nach der Sprengung durchschnittlich pro Minute ansteigt.
 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Feinstaubkonzentration am höchsten ist, und geben Sie diesen maximalen Wert an.
 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Feinstaub am stärksten reduziert wird. Geben Sie auch die zugehörige Abbaugeschwindigkeit an.
 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Feinstaubkonzentration am stärksten zunimmt.
- c) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(t) = (-200t - 4000) \cdot e^{-0,05t}$ eine Stammfunktion zu f ist.
 Berechnen Sie $\int_0^{120} f(t) dt$ und deuten Sie die Bedeutung des Terms $\frac{1}{120} \cdot \int_0^{120} f(t) dt$ im Sachzusammenhang.
- d) In einem anderen Modell wird von einem linearen Abbau ab 40 Minuten nach der Sprengung ausgegangen. Zur Modellierung wird die Tangente g an den Graphen von f im Punkt $P(40 | f(40))$ verwendet.
 Bestimmen Sie die Gleichung dieser Tangente g und berechnen Sie den Zeitpunkt t_0 , zu dem gemäß dieser Tangente der Feinstaub wieder vollständig abgebaut ist.
 [Kontrollergebnis: $g(t) = -10e^{-2t} + 800e^{-2}$]
 Eine Umweltschutzorganisation geht auch von einem linearen Abbau ab einem bestimmten Zeitpunkt aus, legt aber aufgrund eigener Messungen den Zeitpunkt für die Nullbelastung auf 125 Minuten nach der Explosion fest.
 Berechnen Sie den Zeitpunkt, ab dem eine lineare Fortsetzung des Abbaus so erfolgen kann, dass nach 125 Minuten keine Belastung mehr vorliegt.

Aufgaben zur analytischen Geometrie

6. Haus mit Anbau

Ein Haus mit Walmdach hat einen Anbau mit einem Flachdach. Auf dem Flachdach steht ein 7 m hoher Mast. Die Abbildung unten zeigt zwei der Dachflächen in einem Koordinatensystem (1 LE = 1 m).



- Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes F so, dass AEFB ein Parallelogramm ist. Zeigen Sie, dass AEFB dann auch ein Rechteck ist. Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein gleichschenkliges Trapez ist. Begründen Sie dabei insbesondere, dass es kein Parallelogramm ist.
- Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_{ABD} . Bestimmen Sie die Spurgerade g in der x_1x_2 -Ebene, an welcher die beiden Dachflächen aneinanderstoßen. Ermitteln Sie einen Normalenvektor der Ebene E_{ABD} . Berechnen Sie den Winkel, unter dem die beiden Dachflächen sich schneiden.
- Die Sonnenstrahlen fallen in Richtung des Vektors $\vec{v}$ ein. Der an der Geraden g geknickte Schatten des Mastes $\overline{RS}$ soll berechnet werden. Zeigen Sie, dass $S'(0|-3|2,5)$ der Schatten der Mastspitze S ist und dass S' im Trapez ABCD liegt. Ein Punkt T des Mastes wird durch die Sonnenstrahlen auf den Punkt $T'(2|1|0)$ projiziert. Zeigen Sie, dass T' auf g liegt, und berechnen Sie die Koordinaten von T. Ermitteln Sie nun die Länge des an der Geraden g geknickten Schattens des Mastes $\overline{RS}$.
- Zeigen Sie, dass die Geraden $g_{RT'}$ und $g_{TS'}$ senkrecht auf g stehen. Nutzen Sie dies, um den Winkel zwischen beiden Dachflächen zu berechnen. Bestimmen Sie so den Flächeninhalt des Trapezes ABCD.

7. Meteorit

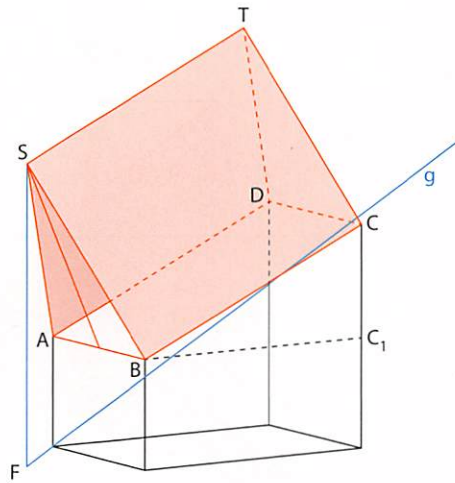
Ein faustgroßer Meteorit wurde zuerst zum Zeitpunkt $t = 0$ (t in Sekunden) im Punkt $M(-33|-18|118)$ geortet und eine Sekunde später im Punkt $N(-15|-9|82)$ (1 LE entspricht 1 km). Die Flugbahn ab dem Punkt M kann durch eine Gerade modelliert werden.



- Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, durch die die Flugbahn modelliert werden kann, und berechnen Sie die Geschwindigkeit des Meteorits in km/h.
- Der Meteorit schlägt auf der Erde auf einer ebenen Fläche F mit den Punkten $A(1|2|1)$, $B(5|2|2)$ und $C(10|6|3)$ auf. Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene F . Zeigen Sie, dass der Meteorit im Punkt $S(23|10|6)$ aufschlägt, und geben Sie den Zeitpunkt des Aufschlags an.
- Zwei Hobby-Astronomen behaupten, sie hätten den Meteoriten bereits im Punkt $Q(-93|-48|z_1)$ bzw. im Punkt $R(-51|-9|z_2)$ gesichtet. Prüfen Sie, ob diese Behauptungen stimmen können, und berechnen Sie gegebenenfalls den Zeitpunkt dieser Beobachtung und die fehlende x_3 -Koordinate.
- Ermitteln Sie, welcher der Punkte A , B und C die kürzeste Entfernung zum Aufschlagpunkt S hat. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene F . Berechnen Sie, in welcher Entfernung sich der Meteorit zur Ebene F befand, als er zum ersten Mal gesichtet wurde.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich ein Flugzeug im Punkt $T(1|3|9)$. Der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ beschreibt die Bewegung des Flugzeugs innerhalb einer Minute. Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen des Flugzeugs und des Meteorits schneiden. Geben Sie an, nach wie vielen Sekunden jeweils der Meteorit und das Flugzeug diesen Schnittpunkt der Flugbahnen erreichen. Berechnen Sie den Winkel zwischen beiden Flugbahnen.
- Sämtliche Vektoren, die von T zu einem Punkt der Geraden g führen, sind gegeben durch $\vec{u}_t = \begin{bmatrix} -33 \\ -18 \\ 118 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \\ -36 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie das t , für welches $\vec{u}_t$ senkrecht auf g steht. Berechnen Sie für dieses t die Länge von $\vec{u}_t$ und interpretieren Sie diese Länge im Sachzusammenhang.
- Urteilen Sie anhand der bisherigen Ergebnisse, ob der Meteorit eine Gefahr für das Flugzeug darstellt.

8. Spielgerät

Die Abbildung gibt vereinfacht ein Gerät auf einem Spielplatz wieder. In einem Koordinatensystem mit $1 \text{ LE} = 0,3 \text{ m}$, bei dem die x_1x_2 -Ebene dem ebenen Erdboden entspricht, sind die Koordinaten $A(-2|-4|3)$, $B(0|0|3)$, $C(-6|3|6)$ und $S(1|-3|8)$ gegeben.



- a) Bestimmen Sie den Punkt D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist, und zeigen Sie, dass es sogar ein Rechteck ist. Die Punkte A' , B' , C' , D' und F liegen senkrecht unter A, B, C, D und S in der x_1x_2 -Ebene. Geben Sie ihre Koordinaten an und die Länge der Stange (in m), welche im Modell der Strecke $\overline{FS}$ entspricht.

- b) Zeigen Sie, dass die Ebene E mit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Punkte A, B und S enthält.
Geben Sie eine Gleichung der zu E parallelen Ebene E' durch C an.

- c) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_1 , in der das Rechteck ABCD liegt. Weisen Sie nach, dass sich die Ebenen E und E_1 schneiden. Zeigen Sie, dass die Schnittgerade der Ebenen die Gerade durch die Punkte A und B ist.

- d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{AB}$. Zeigen Sie, dass $\overline{MS}$ orthogonal zu $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABS.

- e) Der Körper ABSDCT ist ein Prisma (alle Seitenflächen sind Parallelogramme).
Zeigen Sie, dass seine Seitenfläche BCTS rechteckig ist, und berechnen Sie das Volumen des Prismas. Geben Sie das Volumen in m^3 an.

- f) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\overline{BC}$ und der horizontalen Strecke $\overline{BC_1}$.

- g) Vom Punkt F aus wird ein Seil gespannt, welches durch die Gerade g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ modelliert werden kann.}$$

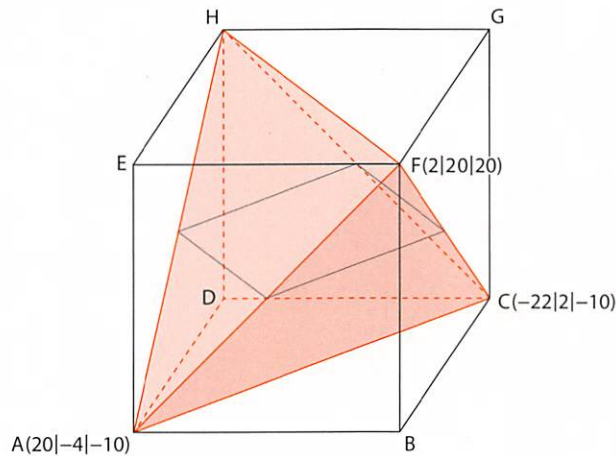
Zeigen Sie, dass das Seil in einem Punkt P der Strecke $\overline{BC}$ befestigt werden kann. Berechnen Sie die Koordinaten von P und geben Sie an, in welchem Verhältnis P die Strecke $\overline{BC}$ teilt.

- h) Ein Punkt des Seils, also der Geraden g, befindet sich senkrecht unterhalb der Strecke $\overline{AB}$. Von dieser aus möchte ein Kind, senkrecht nach unten greifend, das Seil an diesem Punkt fassen. Berechnen Sie, wie lang es dazu seinen Arm ausstrecken muss.

- i) Berechnen Sie, wie weit die Stange $\overline{SF}$ von der Strecke $\overline{AB}$ entfernt ist. Geben Sie diese Entfernung auch in Meter an.

9. Tetraeder

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(20|-4|-10)$, $C(-22|2|-10)$, $F(2|20|20)$ und $P(-3|-15|15)$ gegeben.



- Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ACF gleichseitig ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_{ACF} durch die Punkte A, C und F.
- Die Gerade g wird durch den Punkt P und den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ festgelegt.
Zeigen Sie, dass g die Ebene E_{ACF} rechtwinklig schneidet, und ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S.
- Zeigen Sie, dass jeder Punkt $P_k(-3 + k|-15 + 7k|15 - 5k)$ auf g gleich weit von A und C entfernt ist.
Ab hier können Sie benutzen, dass jeder Punkt von g von allen Eckpunkten des Dreiecks ACF gleich weit entfernt ist.
- Das Dreieck ACF soll Seitenfläche eines regelmäßigen Tetraeders ACFH sein.
Bestimmen Sie die beiden Punkte der Geraden g aus Teilaufgabe b), die als vierter Eckpunkt H des Tetraeders ACFH in Frage kommen.
- Der Punkt $H(-4|-22|20)$ spannt zusammen mit den Punkten A, C und F ein regelmäßiges Tetraeder auf. Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders ACFH.
- Zeigen Sie, dass sich die Mittelpunkte M_{AF} , M_{FC} , M_{CH} und M_{HA} der Strecken $\overline{AF}$, $\overline{FC}$, $\overline{CH}$ und $\overline{HA}$ zu einem Quadrat verbinden lassen.
- Das Tetraeder ACFH ist einem Würfel einbeschrieben (siehe Abbildung).
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B dieses Würfels.

Aufgaben zur Stochastik

10. Lotto „3 aus 5“

Das Lottospiel „3 aus 5“ wird mit fünf Kugeln gespielt, die mit den Zahlen 1 bis 5 beschriftet sind. Die Spieler geben einen Wettschein ab, auf dem sie zuvor drei dieser fünf Zahlen angekreuzt haben. Bei der Ziehung werden zufällig drei der fünf Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne gezogen. Gewonnen hat, wer auf dem Wettschein diese Zahlen angekreuzt hat.



- a) Berechnen Sie, wie hoch die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Lotto „3 aus 5“ ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
 A: Ein zufällig ausgesuchter Spieler hat mindestens zwei Zahlen richtig getippt.
 B: Ein zufällig ausgesuchter Spieler hat höchstens zwei Zahlen richtig getippt.
- b) Ein Wettanbieter bietet dieses Spiel zu einem Preis von 3,60 € pro Wettschein an. Tippt man alle drei Zahlen richtig, so erhält man 9 €. Hat man zwei Zahlen richtig getippt, erhält man seinen vollen Einsatz, bei einer richtigen Zahl ein Drittel seines Einsatzes zurück.
 Zeigen Sie mithilfe einer geeigneten Rechnung, dass sich das Spiel langfristig für den Spieler nicht lohnt. Ermitteln Sie den Betrag für den Einsatz, für den das Spiel fair wäre.

Auf einem Jahrmarkt wird das Spiel von zwei verschiedenen Anbietern angeboten. Anbieter A bietet das Spiel stündlich mit jeweils 100 Spielern an. Ein anderer Anbieter B spielt nur einmal am letzten Tag mit 10 000 Spielern.

Die Größe Y zählt dabei die Anzahl an Spielern mit drei Richtigen bei Anbieter A, die Größe Z dieselbe Anzahl bei Anbieter B.

- c) Erklären Sie, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit Y und Z als binomialverteilte Zufallsgrößen angenommen werden können. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind.
 Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $\binom{100}{8} \cdot 0,1^8 \cdot 0,9^{92}$ im Sachzusammenhang.
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
 - ① bei Anbieter A in einer Stunde mehr als 10 Spieler drei Richtige haben.
 - ② bei Anbieter B mindestens 950, aber höchstens 1050 Spieler drei Richtige haben.
 - ③ bei Anbieter B weniger als 1000 Spieler drei Richtige haben.
 - ④ bei Anbieter A in einer Stunde genau 10 Spieler und in der nächsten Stunde weniger als 10 Spieler drei Richtige haben. $E(Z)$ bezeichnet den Erwartungswert der binomialverteilten Zufallsgröße Z . Bestimmen Sie den kleinsten Wert für c , sodass $P(E(Z) - c \leq Z \leq E(Z) + c) \geq 0,75$ ist.
- e) Geben Sie im Kontext ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch $1 - B_{100; 0,1}(5 \leq Y \leq 15)$ gegeben ist.
- f) Stellen Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,7% eine Prognose dafür auf, wie viele Spieler bei Anbieter B drei Richtige haben werden.

11. Busunternehmen

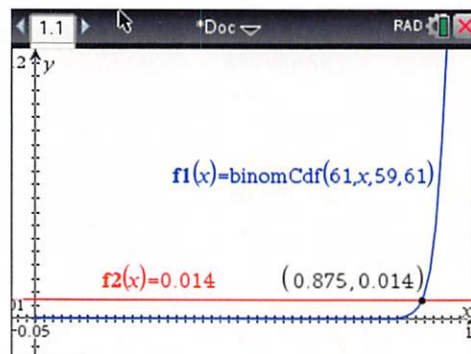
Der Bus eines Reiseunternehmens bietet Platz für 58 Reisende. Erfahrungsgemäß treten nur $p = 90\%$ der Personen, die eine Reise gebucht haben, diese auch wirklich an. Der Anbieter verkauft deshalb mehr als 58 Reiseplätze (Überbuchung).

Die Größe X gibt an, wie viele Personen ihre gebuchte Reise tatsächlich antreten. Es kann davon ausgegangen werden, dass X eine binomialverteilte Zufallsgröße ist.



- a) Es wurden 60 Buchungen für eine Reise angenommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- ① genau 58 Personen die Reise tatsächlich antreten.
 - ② mehr als 58 Personen die Reise tatsächlich antreten wollen.
 - ③ mehr als 55, aber höchstens 58 Personen die Reise tatsächlich antreten.
- b) Die Reise kostet pro Person 350 Euro. Dem Unternehmen entstehen für die Reise Kosten von 19 000 Euro. Zusätzlich zahlt es jeder Person, die wegen Überbuchung die Fahrt nicht antreten kann, eine Entschädigung in Höhe von 500 Euro inklusive Erstattung der Reisekosten.
- Begründen Sie, dass der zu erwartende Gewinn bei 60 verkauften Reisen mit dem folgenden Term berechnet werden kann:
- $$60 \cdot 350 - 19\,000 - 1 \cdot 500 \cdot \binom{60}{59} \cdot 0,9^{59} \cdot 0,1^1 - 2 \cdot 500 \cdot 0,9^{60}$$
- Berechnen und vergleichen Sie den zu erwartenden Gewinn für den Fall, dass 58, 60 oder sogar 61 Buchungen angenommen werden.

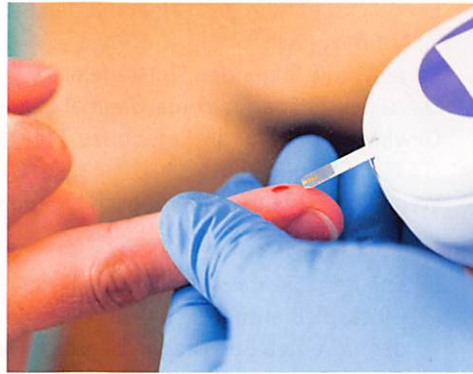
- c) Das Unternehmen erwägt, künftig 61 Reiseplätze zu verkaufen. Allerdings leidet der Ruf des Unternehmens, wenn zu viele Kunden bei Reiseantritt abgewiesen werden.
- ① Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 61 verkauften Plätzen Kunden bei Reiseantritt abgewiesen werden müssen.
 - ② Das Überbuchen bis auf 61 Tickets wäre nur dann für das Unternehmen vertretbar, wenn bei 61 verkauften Tickets die Wahrscheinlichkeit für Abweisungen bei höchstens 1,4% läge. Der blaue Graph im Screenshot gibt die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 59)$ von $X \sim B_{61,p}$ in Abhängigkeit von p an. Erläutern Sie mithilfe des Screenshots, für welchen Anteil p derer, die ihre Buchungen tatsächlich antreten, das Überbuchen bis auf 61 Tickets vertretbar wäre.



- d) Laut einem internen Qualitätsbericht des Unternehmens kommt es bei 12% der Reisen zu einer verspäteten Abfahrt des Reisebusses. Ermitteln Sie, wie viele Reisen eine Person mindestens durchführen muss, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 96% mindestens eine Verspätung erlebt.

12. Diabetes

Diabetes wird umgangssprachlich auch Zuckerkrankheit genannt. Es handelt sich um eine chronische Stoffwechselkrankheit, die auf einem Mangel des in der Bauchspeicheldrüse produzierten Insulin beruht. In Deutschland sind etwa 10 von 100 Erwachsenen erkrankt (Prävalenz). Beim medizinischen Test auf Diabetes wird ein Glukosetoleranztest durchgeführt. Dieser erkennt Diabetes in 72 % aller Fälle korrekt (Sensitivität). Gesunde Personen werden in 73 % aller Fälle korrekt erkannt (Spezifität).



- a) Bestimmen Sie anhand eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person
 - ① an Diabetes erkrankt ist und einen positiven Test bekommt.
 - ② gesund ist und einen negativen Test bekommt.
 - ③ krank ist, wenn der Test positiv ausfällt.
 - ④ gesund ist, wenn der Test negativ ausfällt.
- b) In Teil a) ergibt sich eine erstaunlich geringe Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einem positiven Testergebnis tatsächlich krank ist. Deshalb wird bei positiv getesteten Personen der Glukosetoleranztest wiederholt. Ergänzen Sie das Baumdiagramm aus a) und prüfen Sie mit seiner Hilfe, ob sich die Aussagekraft positiver Tests verbessern lässt, wenn alle positiv getesteten Personen ein zweites Mal getestet werden. Berechnen Sie dazu die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zweimal positiv getestete Person tatsächlich an Diabetes erkrankt ist.
Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebige Person gesund ist, wenn sie erst einen positiven und dann einen negativen Test bekommt.
- c) Die Größe X zähle die Anzahl der an Diabetes Erkrankten in einer Stichprobe von 5000 Erwachsenen.
 - ① Begründen Sie, dass X als binomialverteilt angenommen werden kann.
 - ② Bestimmen Sie das kleinste um den Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem die Werte von X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95,5 % liegen.
 - ③ Als Länge L einer 2σ -Umgebung des Erwartungswertes wird die Differenz zwischen der oberen und der unteren Grenze der Umgebung bezeichnet. Bei unbekanntem Umfang n einer Stichprobe hat die 2σ -Umgebung eine Länge von $L = 84$. Bestimmen Sie den Umfang n der Stichprobe.
- d) Es soll untersucht werden, ob Diabetes bei gesunder („mediterrane“) Ernährung seltener auftritt. Wenn von 5000 Erwachsenen, die angeben, sich gesund zu ernähren, weniger als 465 Diabetes haben, sollen Empfehlungen zur Ernährung herausgegeben werden.
Es gilt $F_{5000; 0,1}(464) = 0,046$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Wahrscheinlichkeit in Bezug auf die mögliche Herausgabe von Ernährungsempfehlungen.

13. Glücksspiel „Tor“ oder „Rot“

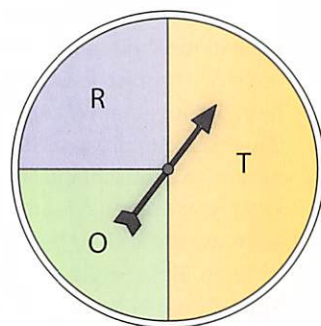
Ein Glücksrad ist in drei Felder mit den Bezeichnungen T, O und R geteilt.

Es gelten die folgenden Spielregeln:

Das Glücksrad darf maximal dreimal gedreht werden.

Gewinne gibt es für die Ergebnisse „TOR“, „ROT“ sowie für „TTT“, „OOO“ und „RRR“.

Wenn kein Gewinn mehr möglich ist, endet das Spiel vorzeitig.



- a) Erläutern Sie, dass man aus der Beschreibung des Glücksspiels entnehmen kann, dass die Reihenfolge der erdrehten Buchstaben beachtet wird.
Geben Sie die Anzahl der möglichen Ergebnisse an.
Begründen Sie, dass mit $2 \cdot 0,5 \cdot 0,25^2 + 0,5^3 + 2 \cdot 0,25^3$ die Wahrscheinlichkeit bestimmt wird, dass ein Gewinn erzielt wird.
Geben Sie die beiden fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle an.

Ergebnis	TOR	ROT	TTT	OOO	RRR	sonstige
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{32}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$		$\frac{50}{64}$

- b) Das Spiel wird mit einem Einsatz von 3,50 € gespielt.
Die Tabelle enthält die Auszahlungsbeträge im Fall eines Gewinns.

Ergebnis	TOR	ROT	TTT	OOO	RRR	sonstige
Auszahlung	20 €	20 €	5 €	50 €	50 €	0 €

Weisen Sie rechnerisch nach, dass ein Spieler langfristig einen Verlust von 6,25 Cent pro Spiel macht.

Bestimmen Sie eine veränderte Auszahlung für den Fall „TTT“, sodass das Spiel fair ist.

- c) Die Wahrscheinlichkeit p steht für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel vorzeitig nach dem zweiten Dreh endet.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p .
[Kontrollergebnis: $p = \frac{7}{16}$]
Es werden 2000 Spiele betrachtet. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl an Spielen, die vorzeitig nach dem zweiten Drehen enden.
Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.
Bestimmen Sie das kleinste um den Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem die Werte von X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95,5 % liegen.
Ermitteln Sie, wie viele Durchgänge des Spiels ein Spieler spielen müsste, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % das Spiel mindestens einmal vorzeitig nach der zweiten Drehung beenden muss.
- d) Betrachten Sie nun die folgenden Ereignisse.
T: Bei der ersten Drehung zeigt der Zeiger auf den Buchstaben T.
G: Der Spieler gewinnt das Spiel.
Beschreiben Sie die unten angegebenen Wahrscheinlichkeiten in Worten, und berechnen Sie sie anschließend.

① $P(\bar{T} \cap G)$ ② $P_T(\bar{G})$ ③ $P_G(\bar{T})$

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Ereignisse T und G stochastisch abhängig sind.