Verpackungen

Abb. 1

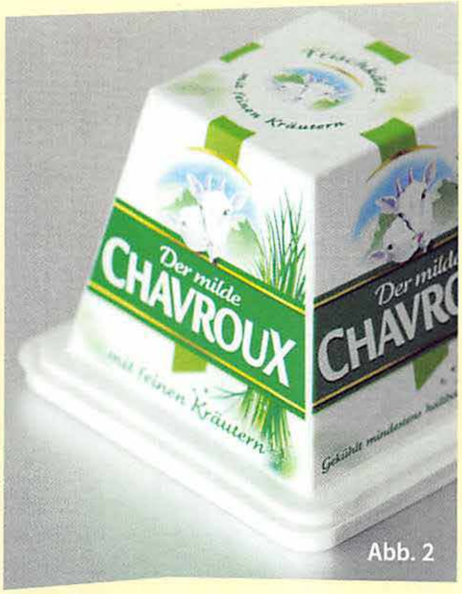


Abb. 2

Abb. 3

1 Sucht möglichst viele Verpackungen mit verschiedenen Formen. Ordnet die entsprechenden geometrischen Körper zu.

2 Welche Aufgaben müssen Verpackungen erfüllen? Gestaltet ein Plakat dazu. Macht euch Gedanken, welche Vorteile Verpackungen bieten, überlegt gleichzeitig, welche Probleme auftauchen.

3 Skizziert die Netze verschiedener Verpackungen. Vergleicht sie mit den Netzen der zugehörigen geometrischen Körper. Welche Aufgaben haben die Teile, die nicht übereinstimmen?

4 Um den Materialbedarf bei Verpackungen berechnen zu können, benötigt ihr die entsprechenden Formeln. Tragt die Formeln für die Oberflächenberechnungen zusammen. Versucht die herzuleiten, an die ihr euch nicht mehr erinnern könnt. Listet die Formeln auf. Schlagt fehlende Formeln nach. Nutzt die → Formelsammlung und die → mathe live-Werkstatt hinten im Buch.

5 Stellt alle bekannten Volumenformeln übersichtlich dar. Von Pyramide, Kegel und Kugel kennt ihr die Formeln noch nicht. Wie unterscheiden sich diese Körper von denen, die ihr bisher kennengelernt habt?

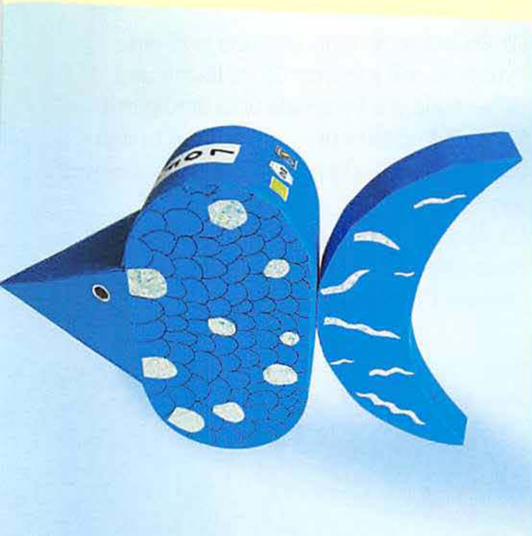


Abb. 4

Abb. 5

Abb. 6

Projekt: Entwirf selbst eine Reisverpackung

- Entwirf eine Kartonverpackung für 1 kg Reis. Es soll eine auffällige und ansprechende Verpackung sein (→ Abb. 4 bis Abb. 6).
- Zeichne deine Verpackung als Körpernetz in Originalgröße oder maßstäblich verkleinert auf Blanko-Papier.
- Weise durch Berechnung nach, dass deine Verpackung nach dem Befüllen mit 1 kg Reis nicht mehr als 15 % Luft enthält. Finde vorher heraus, welches Volumen 1 kg Reis hat.
- Nimm an, deine Verpackung soll in großer Stückzahl hergestellt werden. Dazu ist es sinnvoll, dass möglichst wenig Abfall bei der Produktion entsteht.
  Ordne die Körpernetze deiner Verpackung platzsparend auf einem DIN-A0-Bogen an.
  Fertige dazu eine maßstäbliche Zeichnung oder eine ordentliche Skizze an.
  Berechne, wie viel Prozent Abfall bei deiner Anordnung entsteht (Klebelaschen sollen nicht berücksichtigt werden).

Tipps zur Umsetzung der Projektidee

Projektplanung

- Überlege zunächst, welche Form deine Verpackung haben soll.
- Berücksichtige dabei, dass du sie auch berechnen musst. Achte darauf, dass sie einfach zu basteln ist.
- Mache einen Entwurf und besprich ihn mit deiner Lehrerin oder deinem Lehrer.
- Schätze schon beim Entwurf die Größe der Schachtel ab.
- Erstelle einen realistischen Zeitplan.

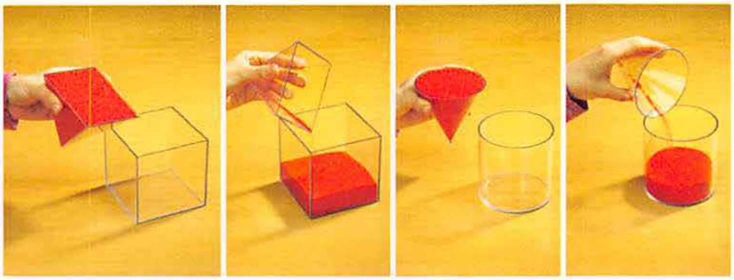
Projektarbeit

- Wähle die Pappe aus: Sie muss sich leicht bearbeiten lassen, darf aber nicht zu dünn sein.
- Die Teile sollen exakt zusammenpassen.

Projektergebnis

- Stelle die Rechnungen übersichtlich und leicht nachvollziehbar dar.
- Achte auf eine ansprechende äußere Form bei der Darstellung.

Pyramide und Kegel



(1) Du brauchst einen Quader und eine Pyramide mit gleicher Grundfläche und Höhe. Fülle die Pyramide vollständig mit Sand und schütte den Inhalt dann in den Quader um. Welchen Teil des Quaders nimmt der Sand ein?
(2) Vergleiche nun genauso das Volumen eines Kegels und eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe.

Tipp

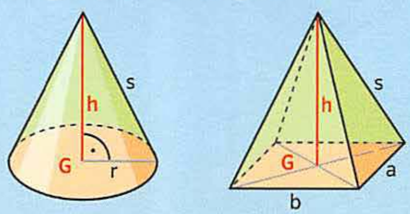
Pyramiden werden nach ihrer Grundfläche benannt. Eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche heißt kurz Rechteckpyramide.

Aufgrund ihrer Spitze werden Pyramiden und Kegel **spitze Körper** genannt.

Für das **Volumen spitzer Körper** gilt:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{G \cdot h}{3}$

mit der Grundfläche G und der Höhe h



Beispiele

a) Das Volumen einer Rechteckpyramide mit $a = 8\,\text{cm}$; $b = 5{,}2\,\text{cm}$; $h = 14{,}5\,\text{cm}$ berechnen.

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$, weil $G = a \cdot b$

$V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 5{,}2 \cdot 14{,}5 = \frac{8 \cdot 5{,}2 \cdot 14{,}5}{3} \approx 201{,}1$

Volumen der Pyramide: rund $201\,\text{cm}^3$.

b) Das Volumen eines Kegels mit $r = 7{,}3\,\text{cm}$ und $h = 15{,}2\,\text{cm}$ berechnen.

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, weil $G = \pi \cdot r^2$

$V = \frac{\pi \cdot 7{,}3^2 \cdot 15{,}2}{3} \approx 848{,}238$

Volumen des Kegels: rund $848\,\text{cm}^3$

c) Die Höhe eines Kegels mit $V = 2000\,\text{cm}^3$; $r = 4{,}2\,\text{cm}$ berechnen.

Formel umgekehrt aufschreiben: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = V$

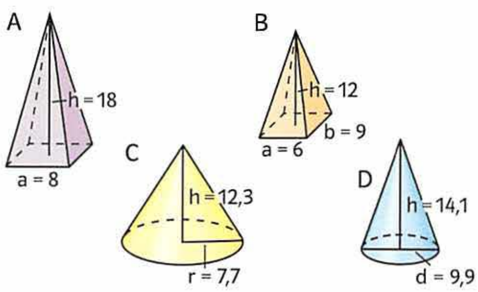
$$\frac{\pi \cdot 4{,}2^2}{3} \cdot h = 2000$$

$$18{,}47 \cdot h = 2000 \quad | : 18{,}47$$

$$h \approx 108{,}3$$

Die Höhe des Kegels beträgt rund 108,3 cm.

1 Berechne das Volumen. (Maße in cm)



2 Berechne h bzw. a der quadratischen Pyramide.

a) $V = 510\,\text{cm}^3$
$a = 9{,}5\,\text{cm}$

b) $V = 2000\,\text{cm}^3$
$h = 14\,\text{cm}$

c) $G = 64\,\text{cm}^2$
$h = 7{,}5\,\text{cm}$

d) ● $d = 19\,\text{cm}$
$V = 1000\,\text{cm}^3$

3 Berechne r bzw. h beim Kegel.

a) $V = 1000\,\text{cm}^3$; $h = 17\,\text{cm}$

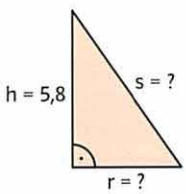
b) $V = 1000\,\text{dm}^3$; $r = 8{,}8\,\text{dm}$

Mehrschrittige Lösungen

Manchmal kommst du nur in mehreren Schritten zur Lösung. Oft benötigst du dabei den Satz des Pythagoras.

Beispiel Gegeben: Kegel mit $V = 127\,cm^3$ und $h = 5{,}8\,cm$; gesucht: s

1. Schritt: Skizze machen



2. Schritt: r berechnen

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = V$$
$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 5{,}8 = 127$$
$$\frac{\pi \cdot 5{,}8}{3} \cdot r^2 = 127$$
$$6{,}07 \cdot r^2 = 127 \quad | : 6{,}07$$
$$r^2 = 20{,}92 \quad | \sqrt{}$$
$$r \approx 4{,}6\,cm$$

3. Schritt: s berechnen

$$s^2 = 5{,}8^2 + 4{,}6^2$$
$$s^2 = 54{,}8 \quad | \sqrt{}$$
$$s \approx 7{,}4\,cm$$

4 Berechne das Volumen
a) der quadratischen Pyramiden:
A $a = 6\,cm$; $s = 12\,cm$; B $a = 6\,cm$; $s = 24\,cm$
b) der Rechteckpyramiden:
C $a = 5{,}5\,cm$; $b = 7{,}7\,cm$; $s = 9{,}9\,cm$
D $a = 5{,}5\,cm$; $b = 7{,}7\,cm$; $h_b = 9{,}9\,cm$

5 Berechne das Kegelvolumen.
a) $r = 6\,dm$; $s = 20\,dm$ b) $h = 6\,m$; $s = 20\,m$
c) $d = 6\,dm$; $s = 20\,dm$ d) $d = 6\,m$; $h = 20\,m$

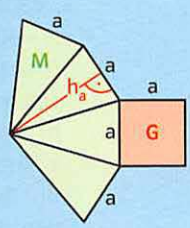
6 Berechne das Volumen der Sechseckpyramide.
a) $a = 9\,cm$; $h = 12\,cm$ b) $a = 9\,cm$; $s = 12\,cm$
c) $h = 9\,cm$; $s = 12\,cm$

7 Berechne die fehlenden Größen eines Kegels.

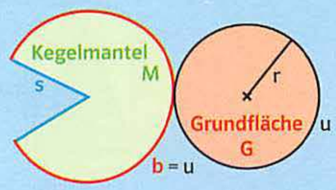
	s	h	G	V
a)	15	10	☐	☐
b)	☐	10	200	☐
c)	☐	☐	200	600

Die **Oberfläche spitzer Körper** setzt sich aus Grundfläche und Mantelfläche zusammen.

Die Mantelfläche M einer Pyramide besteht aus Dreiecken. Ihre Anzahl und Form hängt von der Grundfläche der Pyramide ab.
$O = G + M$



Die Mantelfläche M eines Kegels ist ein Kreisausschnitt: $M = \pi \cdot r \cdot s$
Kegeloberfläche:
$O = G + M = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$

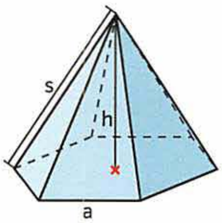


8 Berechne die Oberfläche der quadratischen Pyramide.
a) $a = 24\,cm$, $h_a = 39\,cm$ b) $a = 24\,cm$, $h = 39\,cm$ c) $h = 24\,cm$, $h_a = 39\,cm$

9 Berechne die Oberfläche des Kegels.
a) $r = 15\,cm$, $s = 15\,cm$ b) $r = 15\,cm$, $h = 15\,cm$ c) $h = 15\,cm$, $s = 21\,cm$

→ Kannst du's?
Seite 58, 1 und 2

→ Aufgabe 10



10 Berechne die Oberfläche einer Sechseckpyramide.

a) $a = 9\,cm$; $h = 12\,cm$
b) $a = 9\,cm$; $s = 12\,cm$
c) $h = 9\,cm$; $s = 12\,cm$

11 Berechne die Mantelfläche der Rechteckpyramide.

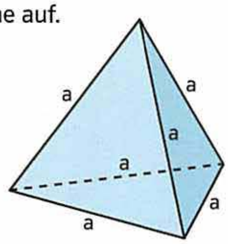
a) $a = 1{,}5\,m$; $b = 1{,}2\,m$; $h = 2{,}7\,m$
b) $a = 1{,}5\,m$; $b = 1{,}2\,m$; $s = 2{,}7\,m$
c) $a = 1{,}5\,m$; $s = 2{,}7\,m$; $h = 1{,}2\,m$

12 Berechne Volumen und Oberfläche der quadratischen Pyramide.

a) $a = 6\,cm$; $h = 12\,cm$
b) $a = 12\,cm$; $h = 12\,cm$
c) $a = 6\,cm$; $h = 24\,cm$
d) Was fällt auf? Warum ist das so?

13 ● Ein Tetraeder ist eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. Alle vier Dreiecke sind gleichseitig.

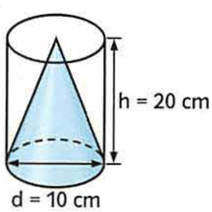
a) Berechne die Oberfläche für $a = 14\,cm$.
b) Stelle eine Formel zur Berechnung der Oberfläche auf.



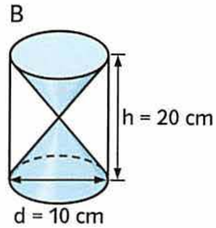
14 a) Vergleiche Volumen und Mantelfläche der beiden Körper. Schätze zuerst. Rechne nach.

b) ● Wie kannst du das Volumen auch ohne Maße vergleichen?

A



B

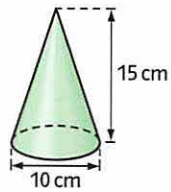


15 Berechne

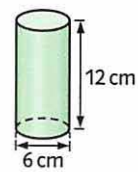
a) r, V und O für einen Kegel mit $s = 10\,cm$ und $h = 8\,cm$.
b) b und O für eine Rechteckpyramide mit $V = 1350\,cm^3$, $a = 15\,cm$ und $h = 15\,cm$.
c) V und O für eine Sechseckpyramide mit $a = 6\,cm$; $h = 16\,cm$.

16 Welcher Körper hat das größte Volumen, welcher die größte Oberfläche? Ordne die Körper entsprechend. Überprüfe durch Überschlagsrechnungen.

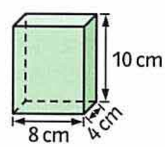
A



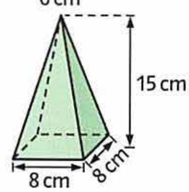
B



C



D



17 Berechne die gesuchte Größe.

a) Kegel; r =?; $V = 1400\,cm^3$; $h = 14\,cm$
b) Quadratische Pyramide; a =?
$V = 1400\,cm^3$; $h = 14\,cm$
c) Kegel; s =?; $O = 1400\,cm^2$; $r = 14\,cm$
d) ● Quadratische Pyramide; a =?
$O = 1400\,cm^2$; $h_a = 14\,cm$

18 ● a) Eine quadratische Pyramide mit den Maßen $a = 70\,cm$ und $h = 90\,cm$ wird auf halber Höhe parallel zur Grundfläche durchgeschnitten. Wie groß sind die Volumen der beiden Teilstücke?

b) Wie groß ist der Volumenanteil der kleinen Pyramide an der gesamten Pyramide? Gilt das für alle quadratischen Pyramiden, die so geteilt werden? Begründe.

c) ●● In welcher Höhe hätte die Pyramide geteilt werden müssen, damit beide Teile dasselbe Volumen haben? Du kannst diese Aufgabe auch durch Probieren lösen.

Tipps für die Berechnungen an komplexeren Körpern

- Zerlege die Körper in Teilkörper.
- Achte beim Aufschreiben der Rechnungen auf übersichtliche Anordnung und verwende Zwischenüberschriften.
- Fertige Skizzen mit Hilfsdreiecken an, wenn du den Satz des Pythagoras verwendest.
- Manchmal brauchst du die Strahlensätze.
- Wenn dir eine Formel fehlt, schaue in der → mathe live-Werkstatt oder in der → Formelsammlung nach.

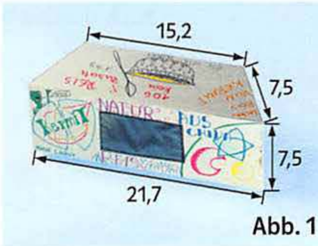


Abb. 1

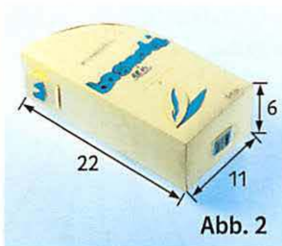


Abb. 2

Abb. 3

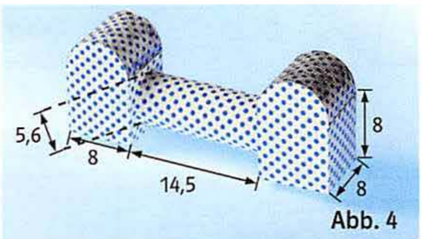


Abb. 4

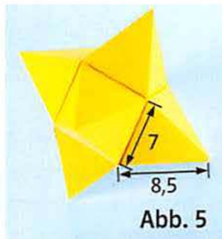


Abb. 5

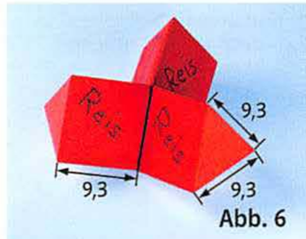


Abb. 6

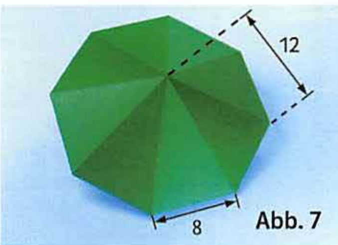


Abb. 7

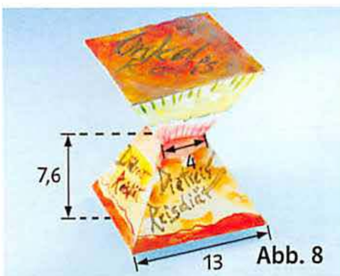


Abb. 8

Abb. 9

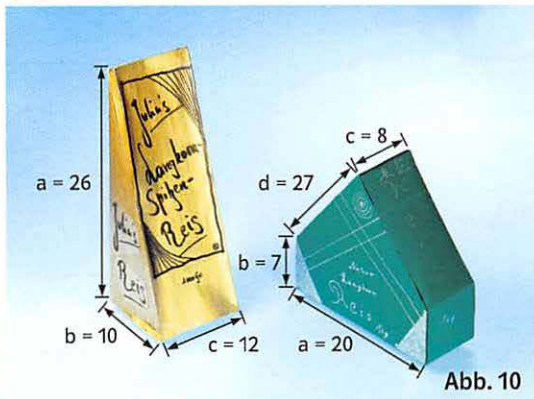


Abb. 10

Tipp

Nutzt die Erkenntnisse aus den Aufgaben auf diesen Seiten für eure eigenen Verpackungen.

→ Kannst du's? Seite 58, 4 und 5

19 Die Verpackungen (→ Abb. 1 bis Abb. 9) wurden im Projekt „Reisverpackungen" von Schülerinnen und Schülern hergestellt.

a) Berechne das Volumen. Passt in jede Verpackung 1 kg Reis? 1 kg Reis hat ein Volumen von etwa 1140 cm³. Ist bei den Verpackungen mehr als 15 % Luft?

b) Berechne die Oberfläche.

c) Zeichne ein Körpernetz mit einem dynamischen Geometrieprogramm.

20 Das Volumen der Schachteln (→ Abb. 10) ist zu groß geraten.

a) Verändere bei beiden die Länge der Seite c, um möglichst nahe an ein Volumen von 1200 cm³ zu kommen.

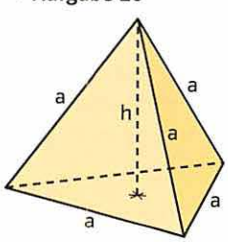
b) Verändere bei der goldenen Schachtel (→ Abb. 10) die Länge der Seite a oder b, um das gewünschte Volumen zu erreichen.

Tipp

Wenn das gewünschte Volumen einer Verpackung vorgegeben ist, müssen Längen entsprechend angepasst werden. Um das rechnerisch lösen zu können, kannst du beispielsweise alle Längen bis auf eine festlegen. So enthält die Formel für das Volumen nur eine unbekannte Größe, nach der du auflösen kannst.

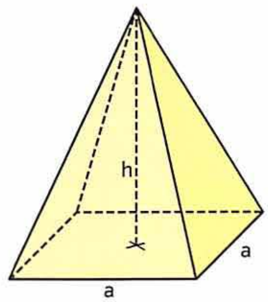
→ Kannst du's?
Seite 58, 6

→ **Aufgabe 26**

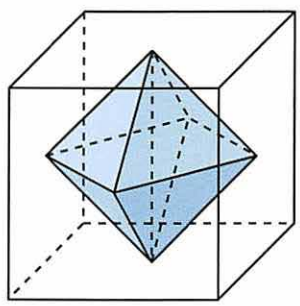


21 Die Pyramide soll ein Volumen von $500\,cm^3$ (±10 %) haben. Verändere entsprechend
a) die Grundkante;
b) die Höhe.

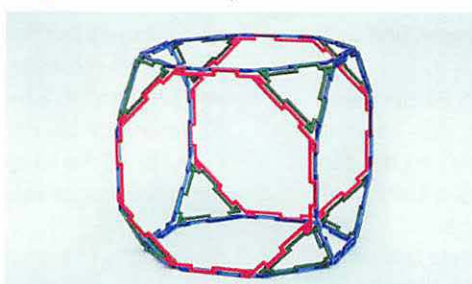
a = 12 cm
h = 15 cm



22 ● In einem Würfel werden die Mittelpunkte der benachbarten Seitenflächen miteinander verbunden. Es entsteht innen ein Oktaeder. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt das Oktaeder ein?

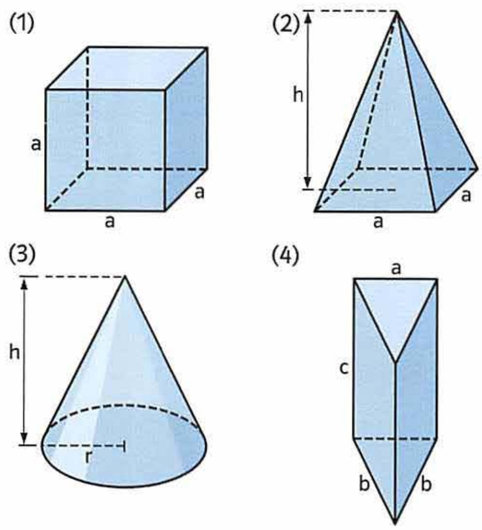


23 Bei einem Würfel werden die Ecken abgeschnitten. Alle Kanten des neuen Körpers sind 8 cm lang.
a) Berechne die Oberfläche.
b) ●● Berechne das Volumen.
c) ● Zeichne das Körpernetz.



24 ● Wähle bei dieser Verpackung x so, dass ein Volumen von $600\,cm^3$ entsteht. Du kannst die Länge der Schachtel auch durch x ausdrücken.

25 Experimentiere mit Formeln und Maßen.



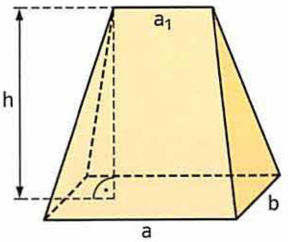
a) Verdopple alle markierten Längen. Wie ändert sich jeweils das Volumen? Wie verändert sich das Volumen, wenn alle Längen um 30 % vergrößert werden?
b) Das Volumen soll um 30 % verkleinert werden, alle Längen sollen gleichmäßig (d. h. im selben Verhältnis) schrumpfen.
c) Wie verändert sich bei den Veränderungen in den → Teilaufgaben a) und b) die Oberfläche?
d) Wie verändern sich Längen und Volumen, wenn die Oberfläche verdoppelt wird?

26 ●● Ein Tetraeder soll 1 kg Reis aufnehmen, aber nicht mehr als 15 % Luft enthalten. Wie groß muss man die Seitenlänge a wählen?

27 ● a) Weise nach, dass sich das Volumen nach der Formel

$V = b \cdot \frac{h}{6} \cdot (2a + a_1)$ berechnen lässt.

b) Stelle eine Formel zur Berechnung der Oberfläche auf.

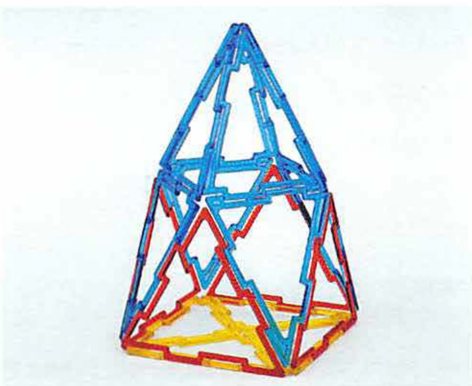


Tipp

→ **Aufgabe 30**

Skizziere die Würfelnetze auf kariertem Papier.

28 ● Weise nach, dass das Volumen dieses Körpers $V = a^2 \cdot h$ ist.
Hinweis: a ist die Seitenlänge des roten (gleichseitigen) Dreiecks; h ist die Höhe im roten Dreieck.



29 a) Notiere in einem Tabellenkalkulationsprogramm die Formeln für die Zellen D2, D3 und D4.
b) ● Notiere Formeln für die Zellen E2, E3 und E4.

B6 | fx 3,14159

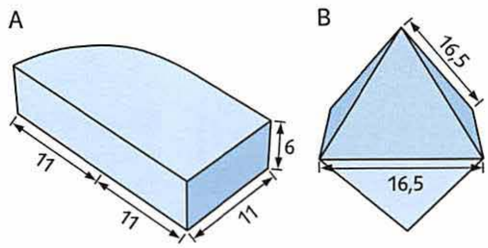
	A	B	C	D	E
1	Verpackungsform	a oder r	h	V	O
2	Pyramide	8,0	14,5		
3	Kegel	8,4	16,6		
4	Kugel	9,0			
5					
6	Konstante π	3,14159			
7					
8					
9					
10					
11					
12					

Körpernetze materialsparend anordnen
Will man Schachteln in größerer Anzahl herstellen, werden sie aus großen Pappen ausgestanzt. Dabei ist es günstig, die Körpernetze so anzuordnen, dass möglichst wenig Abfall entsteht. Zwischen den Netzen sollen schmale Stege stehen bleiben.

30 a) Würfelnetze sollen ein rechteckiges Feld so füllen, dass möglichst wenig Abfall entsteht. Es gibt elf verschiedene Würfelnetze. Suche möglichst viele und bewerte sie. Was ändert sich, wenn man Klebelaschen berücksichtigt?
b) Für Würfelnetze, deren Einzelflächen 10 cm × 10 cm groß sind, soll ein geeignetes Papierformat gefunden werden. Gib zwei Möglichkeiten an und berechne den Abfall in Prozent.

31 Der Mantel einer quadratischen Pyramide besteht aus gleichseitigen Dreiecken. Finde eine materialsparende Anordnung für die Pyramidennetze. Welches Netz eignet sich gut? Welches Papierformat ist günstig?

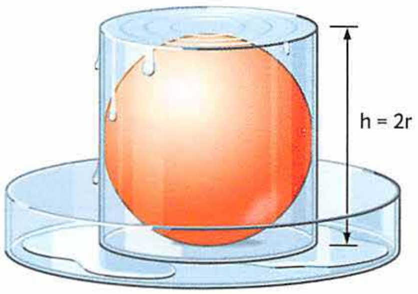
32 Ordne die Netze dieser Kartons möglichst gut auf Blättern der Größe 50 cm × 70 cm an.
a) Zeichne die Anordnung maßstäblich verkleinert (Maßstab angeben).
b) Wie viel Prozent Abfall entsteht?



(Maße in cm)

33 Wie lassen sich Kreise (d = 4 cm) auf einem DIN-A4-Blatt anordnen? Welche der Möglichkeiten ist die beste, um Abfall zu sparen? Welche Blatt-Abmessungen wären optimal?

Kugel



Tauche eine Kugel in einen mit Wasser gefüllten Zylinder, in den die Kugel gerade eben hineinpasst.
Für diesen Versuch müssen Kugel und Zylinder den gleichen Durchmesser haben. Die Höhe des Zylinders ist ebenfalls gleich dem Kugeldurchmesser.
Wie viel Prozent des Wassers läuft heraus? Schreibe den Prozentsatz als Bruch.

Kugelvolumen und Kugeloberfläche sind nur vom Radius r abhängig:

Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

Kugeloberfläche: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Beispiele

a) Aus $r = 7{,}4\,\text{cm}$ lassen sich Kugelvolumen und Oberfläche berechnen:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $\quad O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 7{,}4^3}{3} \approx 1697{,}4$ $\quad O = 4 \cdot \pi \cdot 7{,}4^2 \approx 688{,}1$

$V \approx 1697{,}4\,\text{cm}^3$ $\quad O \approx 688{,}1\,\text{cm}^2$

b) gegeben: $O = 1017{,}9\,\text{m}^2$; gesucht: r

$4 \cdot \pi \cdot r^2 = O$

$4 \cdot \pi \cdot r^2 = 1017{,}9 \quad | : 4\pi$

$r^2 \approx 81 \quad | : \sqrt{}$

$r = 9\,\text{m}$

c) gegeben: $V = 4000\,\text{m}^3$; gesucht: r

$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = V$

$\frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot r^3 = 4000$

$4{,}19 \cdot r^3 = 4000 \quad | : 4{,}19$

$r^3 \approx 954{,}93$

Um von r^3 zu r zu kommen, sucht man eine Zahl, deren **3. Potenz** 954,93 ergibt.
Man muss die Wurzel ziehen, in diesem Fall die **3. Wurzel.**
Man schreibt das so: $r = \sqrt[3]{954{,}93}$
Der Taschenrechner liefert: $r \approx 9{,}8\,\text{m}$. 3 $\sqrt[x]{}$ 9 5 4 . 9 3

Tipp
Eine ausführliche Behandlung der Wurzeln erfolgt in → Kapitel 8, Seite 142.

1 Berechne die Oberfläche und das Volumen einer Kugel.

a) $r = 12\,\text{cm}$ b) $r = 24\,\text{mm}$
c) $d = 1\,\text{m}$ d) $d = 9{,}6\,\text{cm}$
e) $u = 7{,}8\,\text{dm}$ f) $u = 0{,}09\,\text{m}$

Tipp
→ **Aufgabe 1**
u ist hier der Kugelumfang.

2 Wie groß ist der Kugelradius?

a) $O = 10\,\text{cm}^2$, $O = 100\,\text{cm}^2$, $O = 1000\,\text{cm}^2$
b) $V = 10\,\text{cm}^3$, $V = 100\,\text{cm}^3$, $V = 1000\,\text{cm}^3$

→ Kannst du's? Seite 58, 3

3 Berechne die fehlenden Größen.

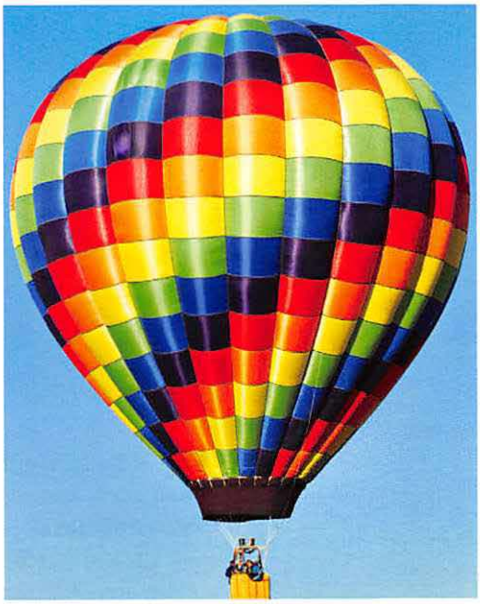
	r	O	V
a)	70 cm	☐	☐
b)	☐	70 cm²	☐
c)	☐	☐	70 cm³

4 a) Verdopple (verdreifache) einen Kugelradius. Wie ändern sich V und O?
b) ● Verdopple V. Wie ändert sich r?
c) ● Verdoppele O. Wie ändert sich r?

5
Dieser Ballon soll ein Gasvolumen von rund $3500\,m^3$ haben.

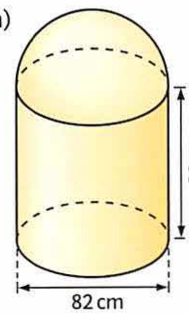
a) Welchen Durchmesser hat er etwa?

b) Überprüfe die Volumenangabe und den Durchmesser anhand des Fotos.

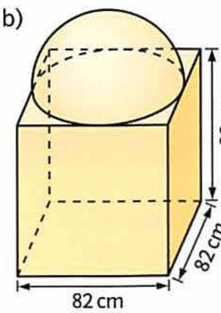


6
Berechne Volumen und Oberfläche des Körpers.

a)



b)



7
Ein Luftballon soll wegen Brandgefahr nicht mit Wasserstoff, sondern mit Helium gefüllt werden. Da das teuer ist, wird er zunächst zu 70 % mit Luft gefüllt. Der Rest wird mit Helium gefüllt.

a) Welchen Durchmesser hat er, wenn $3\,m^3$ Gas-Luft-Gemisch enthalten sind?

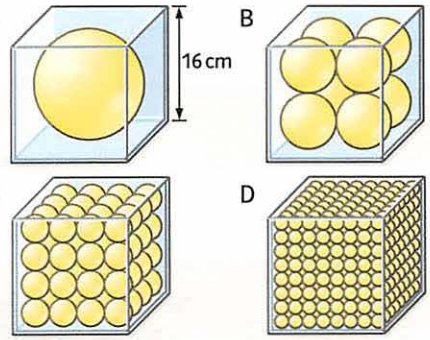
b) Bis zu welchem Durchmesser muss er mit Luft gefüllt werden?

Tipp

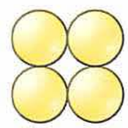
→ **Aufgaben 10 und 11**
Ein Körper schwimmt, wenn sein eigenes Gewicht kleiner ist als das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

8
a) Berechne für jede Kugelpackung die Oberfläche aller Kugeln.

b) Nimm an, es seien Korkkugeln (Dichte: 0,2 g pro cm^3). Was wiegen die Kugeln?



9
● Eine fünfte Kugel soll zwischen den vier hindurchpassen. Wie viel Prozent des Volumens einer großen Kugel darf sie höchstens haben?



10
● Im Märchen Der Froschkönig von den Gebrüdern Grimm spielt die Königstochter mit einer goldenen Kugel, die in den Brunnen fällt und von einem Frosch wieder herausgeholt wird.

a) Wie groß war die Kugel wohl? Berechne ihr Gewicht ($1\,cm^3$ Gold wiegt 19,3 g).

b) ●● Ziemlich schwer, diese Goldkugel! Vielleicht war die Kugel hohl. Berechne für ein akzeptables Gewicht die Wandstärke der Hohlkugel.

c) Würde die Hohlkugel untergehen?

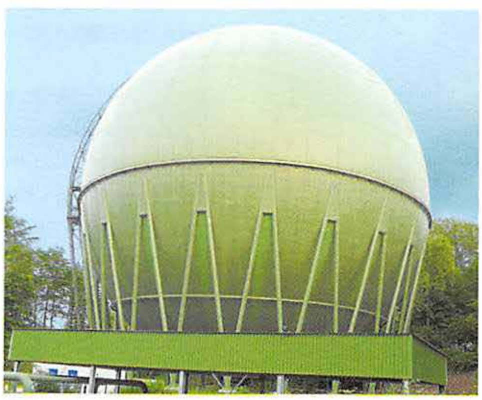
11
Eine Badeschaumkugel schwimmt im Wasser. Gut messbar ist nur ihr Umfang (u = 23 cm). Welches Gewicht darf sie nicht überschreiten?

Volumen abschätzen
Bei vielen Dingen kann man das Volumen nicht genau berechnen, aber recht gut abschätzen. Überlege dir, welche berechenbare geometrische Form gut passt und rechne damit. Denke daran, dass das Ergebnis nur eine Annäherung ist. Eine Angabe mit vielen Stellen hinter dem Komma ist also sinnlos.

12 Der Kugelgasbehälter in Wuppertal ist der größte seiner Art in Deutschland. Bei Wikipedia findest du folgende Angaben:

> Die Kugel mit einem Durchmesser von 47,3 m wurde aus 30 mm dickem Stahlblech erstellt und hat ein Volumen von etwa 55 000 m³ und eine Oberfläche von etwa 7000 m².

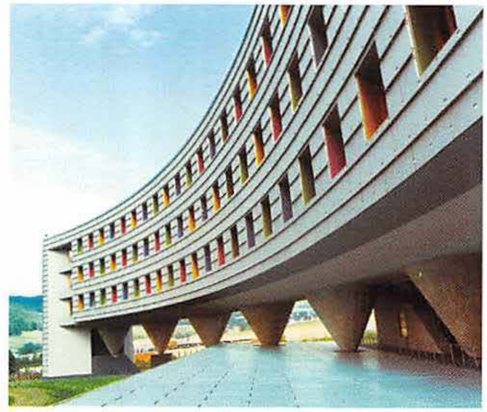
Passen die Angaben zusammen? Rechne nach.



13 a) Bestimme das ungefähre Volumen dieser Gegenstände. Beschreibe deine Vorgehensweise.

b) Suche dir selbst unregelmäßig geformte Objekte und schätze deren Volumen.

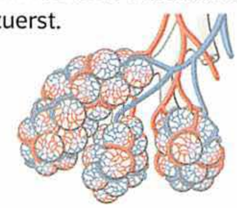
14 Der Architekt James Sterling entwarf dieses Bürogebäude in Melsungen, einen auf Stelzen stehenden Halbrundbau.
Schätze das Volumen der Stelzen.



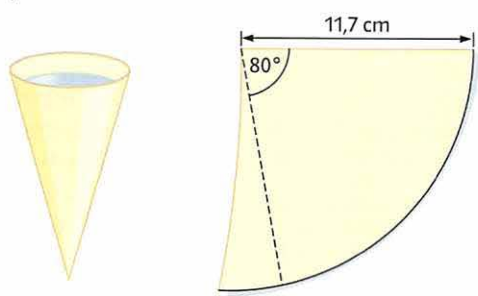
15 Die Lungenbläschen sorgen für den Austausch von Sauerstoff und Kohlenstoffdioxid. Jedes der rund 300 Millionen Lungenbläschen hat einen Durchmesser von etwa 0,2 mm.

a) Berechne die gesamte Lungenoberfläche.

b) Angenommen, die Lunge wäre eine einzige Kugel mit der in → a) berechneten Oberfläche. Welchen Durchmesser hätte sie? Schätze zuerst.



16 Solche Trinkbecher findet man manchmal in Kaufhäusern. Schätze, wie viel Wasser in den Becher passt. Rechne nach.



17 Wie viel m^2 Zeltstoff werden etwa für ein Tipi benötigt?

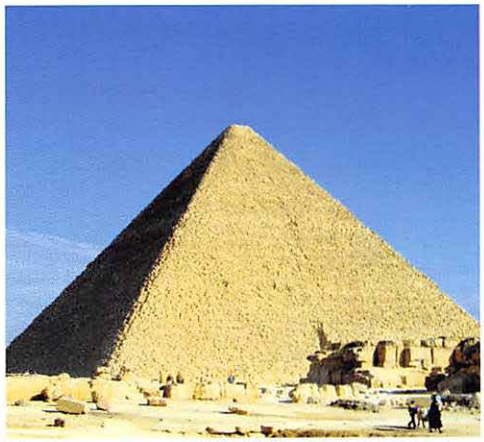
18 Der Berliner Fernsehturm hat einen Durchmesser von 32 m, ein Volumen von rund 17 000 m^3 und eine Oberfläche von rund 3500 m^2. Sein Kugelmittelpunkt befindet sich 213,78 m über dem Boden.

a) Überprüfe die Angaben zum Fernsehturm. Berechne selbst Volumen, Oberfläche und Radius.

b) ● In der Kugel befindet sich eine Aussichtsplattform in 203,78 m Höhe. Welchen Durchmesser hat sie? Wie groß ist ihre Fläche?

c) ● In der Kugel gibt es außerdem das Restaurant „Telecafe", dessen Durchmesser mit 29 m angegeben ist. Welche Fläche hat das Telecafe? In welcher Höhe über dem Boden befindet es sich?

19 Nach ihrer Fertigstellung hatte die Cheopspyramide eine Seitenlänge von 229 m und eine Höhe von 146,5 m. Bis heute ist die Seitenlänge auf 227,5 m geschrumpft, die Höhe beträgt nur noch 136,5 m.
Um wie viel Prozent hat sich das Volumen verringert?



20 Nimm an, du füllst diese Eistüte mit durchschnittlich großen Eiskugeln.
Wie viele Kugeln passen hinein?

Kann ich's?

Check
c5d6zr

	Das kann ich.	Da bin ich fast sicher.	Da bin ich unsicher.	Das kann ich noch nicht.
Pyramide, Kegel und Kugel				
1 **Ich kann die Oberfläche und das Volumen von Pyramiden berechnen.** → Seiten 48 bis 49				
2 **Ich kann die Oberfläche und das Volumen von Kegeln berechnen.** → Seiten 48 bis 49				
3 **Ich kann die Oberfläche und das Volumen von Kugeln berechnen.** → Seite 54				
4 **Ich kann die Oberfläche und das Volumen von zusammengesetzten Körpern berechnen.** → Seite 51				
Mit Formeln rechnen				
5 **Ich kann verschiedene Größen in einer Formel berechnen.** → Seiten 49, 51 und 52				
6 **Ich kann zu einem vorgegebenem Volumen Maße von Verpackungen anpassen.** → Seite 52				
	Ich helfe anderen.	Ich übe weiter.	Ich frage andere.	Ich frage eine Lehrperson.

Aufgaben

1 Berechnungen an Pyramiden

a) Berechne Volumen und Oberfläche einer quadratischen Pyramide mit $a = 13\,\text{cm}$ und $h = 21\,\text{cm}$.

b) Berechne das Volumen einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche $a = 85\,\text{cm}$; $b = 42\,\text{cm}$ und $h_a = 135\,\text{cm}$.

c) Mit welcher Formel lässt sich die Mantelfläche einer Sechseckpyramide berechnen? Welche Größen müssen gegeben sein?

2 Berechnungen an Kegeln

a) Berechne das Volumen eines Kegels mit $d = 13{,}8\,\text{cm}$ und $h = 19{,}2\,\text{cm}$.

b) Berechne das Volumen und die Mantelfläche eines Kegels mit $d = 1{,}24\,\text{m}$ und $s = 1{,}56\,\text{m}$.

3 Berechnungen an Kugeln

a) Berechne das Volumen einer Kugel mit $d = 38\,\text{cm}$.

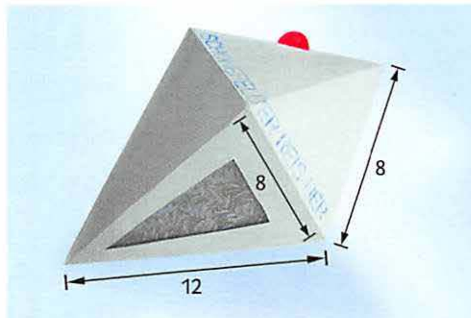
b) Berechne die Oberfläche einer Kugel mit $r = 0{,}61\,\text{m}$.

c) Wenn der Radius verdoppelt wird, wie verändert sich das Kugelvolumen?

d) Schätze die Kugeloberfläche ab.

4 Zusammengesetzte Körper

Berechne das Volumen und die Oberfläche der Verpackung. Sie besteht aus zwei quadratischen Pyramiden. (Maße in cm)



5 Formeln umstellen

a) Eine quadratische Pyramide hat ein Volumen von $V = 2300\,\text{cm}^3$ und eine Seitenlänge $a = 12\,\text{cm}$. Berechne die Höhe h.

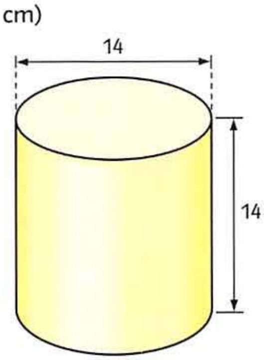
b) Bei einem Kegel sind $V = 120\,\text{dm}^3$ und $h = 9{,}5\,\text{dm}$ gegeben. Berechne den Radius r.

c) Die Oberfläche einer Kugel beträgt $2468\,\text{cm}^2$. Wie groß ist ihr Durchmesser?

6 Maße anpassen

a) Berechne das Volumen der Schachtel.

b) Verändere den Durchmesser und die Höhe so, dass beide die gleiche Länge haben, das Volumen aber auf $1500\,\text{cm}^3$ ($\pm 40\,\text{cm}^3$) verkleinert wird.
(Maße in cm)



→ Lösungen zum Check, Seite 214

Formeln entwickeln

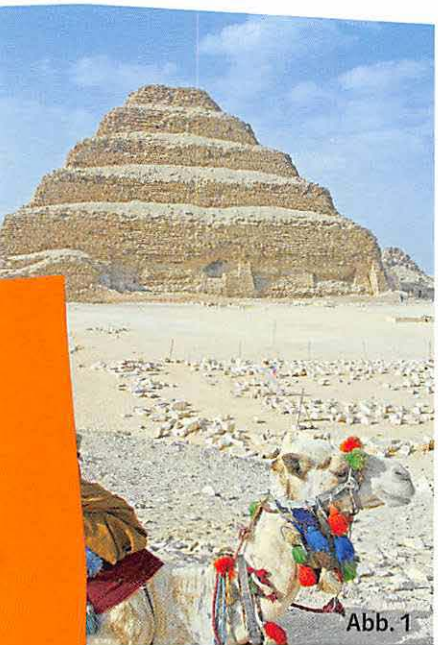
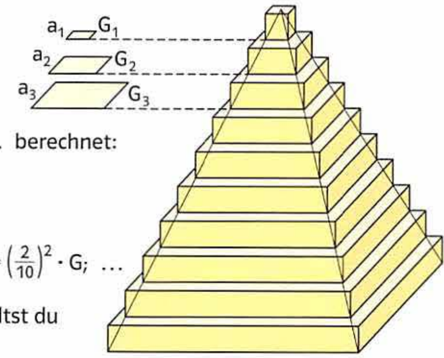


Abb. 1


Abb. 2

Mathematikern reicht es oft nicht, Formeln z. B. nur durch Experimentieren herzuleiten. Sie versuchen Formeln mathematisch zu erklären. Das Pyramidenvolumen zum Beispiel wird mithilfe einer „Treppenpyramide“ schrittweise zu einer „glatten“ Pyramide.
Dazu stellst du dir vor, du zerlegst eine Pyramide in quaderförmige Schichten. Je mehr Schichten es sind, desto mehr nähert sich die „Treppenpyramide“ der „glatten“ Pyramide an. Wenn du sie in zehn Schichten zerlegst, hat jede Schicht die Höhe $\frac{h}{10}$.

Eine Schicht hat das Volumen: $V_n = G_n \cdot \frac{h}{10}$



Die ganze Pyramide hat das Volumen:

$V = G_1 \cdot \frac{h}{10} + G_2 \cdot \frac{h}{10} + \ldots + G_{10} \cdot \frac{h}{10}$

$G_1, G_2, \ldots$ werden aus den Kantenlängen $a_1, a_2, \ldots$ berechnet:

$G_1 = a_1^2;\ G_2 = a_2^2;\ \ldots;\ G_{10} = a_{10}^2$

Für a_1, a_2 usw. ergibt sich: $a_1 = \frac{1}{10}a;\ a_2 = \frac{2}{10}a;\ \ldots$

und damit gilt $G_1 = \left(\frac{1}{10}a\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot G;\ G_2 = \left(\frac{2}{10}a\right)^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 \cdot G;\ \ldots$

Setzt du $G_1, G_2, \ldots$ in die Volumenformel ein, erhältst du

$V = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot G \cdot \frac{h}{10} + \left(\frac{2}{10}\right)^2 \cdot G \cdot \frac{h}{10} + \ldots + \left(\frac{10}{10}\right)^2 \cdot G \cdot \frac{h}{10}$.

Die Variablen werden umsortiert:

$V = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot G \cdot h + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^2 \cdot G \cdot h + \ldots + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{10}{10}\right)^2 \cdot G \cdot h$

$\frac{1}{10}$ und $G \cdot h$ werden ausgeklammert:

$V = \frac{1}{10}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{10}{10}\right)^2\right) \cdot G \cdot h \approx 0{,}385 \cdot G \cdot h$

Das ist noch sehr ungenau: Wenn du jedoch 100 Stufen hättest, wäre die „Treppenpyramide“ schon besser der gesuchten Pyramide angenähert. Die letzte Zeile der Rechnung würde jetzt so aussehen:

$V = \frac{1}{100}\left(\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{2}{100}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{100}{100}\right)^2\right) \cdot G \cdot h \approx 0{,}338 \cdot G \cdot h$

Wenn die Stufenzahl weiter wächst: 1000 Stufen $\rightarrow V \approx 0{,}333\,833\, G \cdot h$
10 000 Stufen $\rightarrow V \approx 0{,}333\,383\, G \cdot h$
100 000 Stufen $\rightarrow V \approx 0{,}333\,338\, G \cdot h$

Der Faktor vor $G \cdot h$ nähert sich mit zunehmender Stufenzahl immer mehr dem Wert $\frac{1}{3}$ an.

Abb. 3

1 Stellt die Erklärung (→ Abb. 3) anderen in der Klasse verständlich dar. Diskutiert dazu vorher gemeinsam den Lösungsweg. Lest dazu die Herleitung im Kasten durch. Stellt die Lösung übersichtlich auf einem Plakat dar. Vergesst nicht, erklärende Zeichnungen zu verwenden.

2 Die Formel für das Volumen des Kegels lässt sich auf ähnliche Weise herleiten wie die Volumenformel der Pyramide. Geht dazu ähnlich vor wie bei der Treppenpyramide. Stellt die Lösung übersichtlich auf einem Plakat dar. Vergesst nicht, erklärende Zeichnungen zu verwenden.

Pyramide

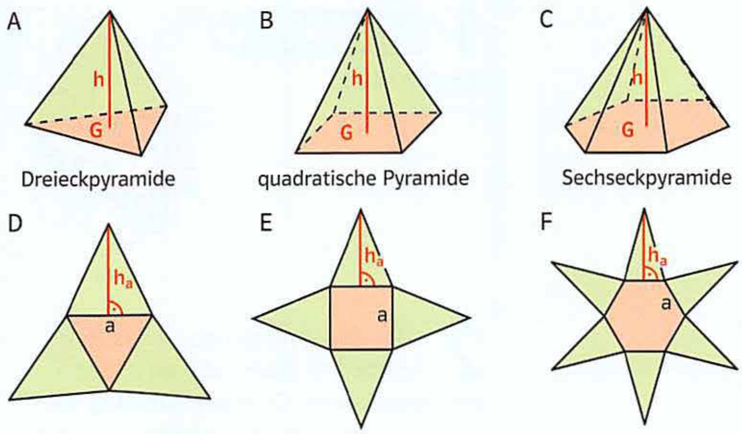
Volumen

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{G \cdot h}{3}$

mit Grundfläche G und Höhe h

Oberfläche

Die Oberfläche setzt sich aus der Grundfläche und den dreieckigen Seitenflächen (Mantelfläche) zusammen.



Kegel

Volumen

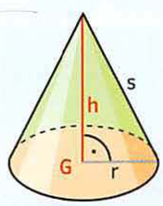
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

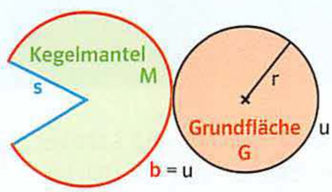
mit r = Radius der Grundfläche G und Höhe h

Oberfläche

Die Oberfläche setzt sich aus der Grundfläche (einem Kreis) und einem Kreisausschnitt (Mantelfläche) zusammen.

$O = \pi \cdot r^2 + \cdot \pi \cdot r \cdot s$





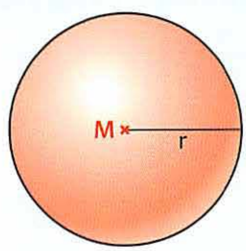
Kugel

Volumen

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

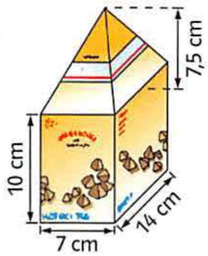
Oberfläche

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



mittel

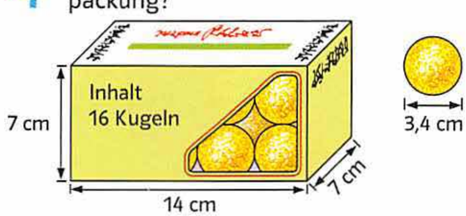
1 Berechne Volumen und Materialbedarf der Schachtel.



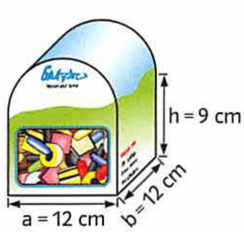
2 Lübecks Wahrzeichen ist das Holstentor. Das Dach hat (von außen gemessen) einen Grundkreisumfang von u = 37,7 m und die Seitenlänge s = 21,8 m.
a) Wie hoch sind die Turmdächer?
b) Wie groß ist die Dachfläche der Türme?

3 Der Erdradius beträgt rund 6370 km. Berechne Volumen und Oberfläche der Erde.

4 Wie viel Prozent Luft ist in dieser Verpackung?

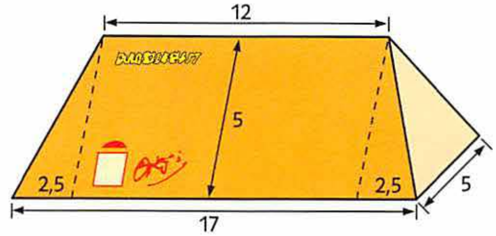


5 a) Zeichne das Körpernetz.
b) Verändere eine Länge so, dass ein Volumen von 1500 cm^3 (± 10 %) entsteht.

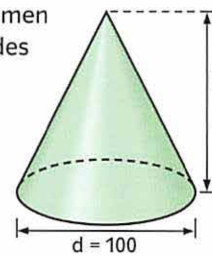


schwieriger

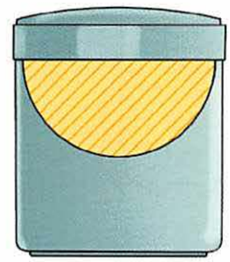
1 Berechne Volumen und Materialbedarf der Schachtel. (Maße in cm)



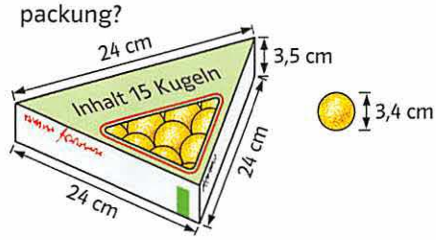
2 a) Berechne Volumen und Oberfläche des Kegels (Maße in cm).
b) Stimmt es, dass ein Kegel mit h = 100 cm und d = 80 cm 80 % des Volumens vom Kegel aus → a) hat? Begründe.



3 Das Bild zeigt den Querschnitt durch eine handelsübliche zylinderförmige Cremedose. Nur der schraffierte Teil ist gefüllt. Wie viel Prozent der Dose ist das etwa? Beschreibe deinen Lösungsweg.



4 Wie viel Prozent Luft ist in dieser Verpackung?



5 Betrachte die Verpackung links.
a) Zeichne das Körpernetz.
b) Verändere eine Länge so, dass ein Volumen von 1500 cm^3 (± 10 %) entsteht. Gib zwei Möglichkeiten an. Welche von beiden ist materialsparender?

→ Lösungen zum Test, Seiten 216 bis 218