3 Verpackungen

Lösungen Seiten 44, 45

Seite 45

Check-in **Aufgaben**

Die Lösungen zum Check-in befinden sich am Ende des → Schülerbuches auf den Seiten 213 und 214.

Lösungen Seiten 46, 47

Aktiv **Verpackungen**

1 Individuelle Lösungen, zum Beispiel Käseverpackungen oder Verpackungen von Süßigkeiten, geeignet sind vor allem Verpackungen aus Pappe.

2 Individuelle Lösungen, zum Beispiel sollten Verpackungen den Inhalt schützen, schön aussehen und zum Kaufen verführen. Schwierig könnte zum Beispiel die Herstellung der Verpackung sein oder das Einpacken des Produkts in die Verpackung, da das in der Regel maschinell erfolgen soll.

3 Individuelle Lösungen
Tipp: Schlagt in der Formelsammlung oder in der mathe live-Werkstatt oder in eurem Mathelexikon die verschiedenen Körper nach.

4 Individuelle Lösungen, berechnet jeweils den Oberflächeninhalt. Daraus ergibt sich der Materialbedarf.

5 In der Formelsammlung und in der mathe live-Werkstatt findet ihr die entsprechenden Formeln. Pyramide und Kegel haben eine Spitze. Eine Kugel hat keine Kanten und keine Ecken.

Lösungen Seiten 48, 49

Kurs **Pyramide und Kegel**

Einstiegsaufgabe

(1) Der Sand nimmt im Quader rund $\frac{1}{3}$ des Volumens ein.

(2) Das Volumen des Kegels nimmt rund $\frac{1}{3}$ des Zylindervolumens ein.

1 Körper A:
$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 18$
$V = 384$
Die quadratische Pyramide hat ein Volumen von $384\,cm^3$.

Körper B:
$V = \frac{6 \cdot 9 \cdot 12}{3}$
$V = 216$
Die rechteckige Pyramide hat ein Volumen von $216\,cm^3$.

Körper C:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}7^2 \cdot 12{,}3$
$V \approx 763{,}7$
Der Kegel hat ein Volumen von rund $763{,}7\,cm^3$.

Körper D:
$V = \frac{\pi \cdot 4{,}95^2 \cdot 14{,}1}{3}$
$V \approx 361{,}8$
Der Kegel hat ein Volumen von rund $361{,}8\,cm^3$.

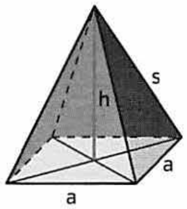
2 $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = V$
a) $\frac{1}{3} \cdot 9{,}5^2 \cdot h = 510$
$h \approx 16{,}95$
Die quadratische Pyramide hat eine Höhe von rund 16,95 cm.
b) $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 14 = 2000$
$a^2 \approx 428{,}57$
$a \approx 20{,}7$
Die Grundkante der quadratischen Pyramide ist rund 20,7 cm lang.
c) $G = a^2$
$a = \sqrt{64} = 8$
Die Grundkante ist 8 cm lang.
d) Die Diagonale d der Grundfläche kannst du mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen.
$a = \sqrt{\frac{d^2}{2}}$
$a \approx 13{,}4$
Die Grundkante ist rund 13,4 cm lang.
$h = \frac{1000}{179{,}56} \cdot 3$
$h \approx 16{,}7$
Die Höhe der quadratischen Pyramide beträgt rund 16,7 cm.
Tipp: Setze alles, was gegeben ist, in die Formel ein und löse dann nach der gesuchten Variablen auf.

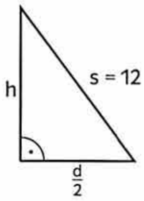
3 a) $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = V$
$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 17 = 1000$
$r \approx 7{,}5$
Der Radius beträgt rund 7,5 cm.

b) $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = V$
$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (8{,}8)^2 \cdot h = 1000$
$h \approx 12{,}3$
Die Höhe beträgt rund 12,3 dm.

Seite 49

4 a) Figur A ist eine quadratische Pyramide. Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Zum Beispiel:
Skizze:





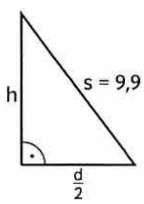
Diagonale berechnen
$d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}5$
Höhe berechnen
$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{8{,}5}{2}\right)^2} \approx 11{,}2$
Volumen berechnen
$V = \frac{6^2 \cdot 11{,}2}{3} = 134{,}4$
Die quadratische Pyramide hat ein Volumen von rund 134,4 cm^3.

Figur B ist eine quadratische Pyramide. Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Zum Beispiel:
Diagonale berechnen
$d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}5$

Höhe berechnen
$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{24^2 - \left(\frac{8{,}5}{2}\right)^2} \approx 23{,}6$

Volumen berechnen
$V = \frac{6^2 \cdot 23{,}6}{3} = 283{,}2$
Die quadratische Pyramide hat ein Volumen von rund 283,2 cm^3.

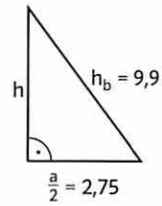
b) Figur C ist eine Rechteckpyramide.
Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten.
Zum Beispiel:



Diagonale berechnen
$d = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 9{,}5$
Höhe des Kegels berechnen
$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$
$h = \sqrt{9{,}9^2 - \left(\frac{9{,}5}{2}\right)^2} \approx 8{,}7$

Volumen berechnen
$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 5{,}5 \cdot 7{,}7 \cdot 8{,}7 \approx 122{,}8$
Die Rechteckpyramide hat ein Volumen von rund 122,8 cm^3.

Figur D ist eine Rechteckpyramide. Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten.
Zum Beispiel:



Höhe des Kegels berechnen
$h = \sqrt{9{,}9^2 - 2{,}75^2} \approx 9{,}5$

Volumen berechnen
$V = \frac{a \cdot b \cdot h}{3} = \frac{5{,}5 \cdot 7{,}7 \cdot 9{,}5}{3} \approx 134{,}1$
Die Rechteckpyramide hat ein Volumen von rund 134,1 cm^3.
Tipp: Gehe schrittweise vor. Erstelle ein Schrägbild der Pyramide. Markiere die rechtwinklingen Dreiecke, die du für die Berechnung nutzt. Nutze den Satz des Pythagoras. Beachte: Du rechnest hier das Volumen einer Pyramide aus, nicht eines Kegels.

5 a) $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{20^2 - 6^2} \approx 19{,}1$
$V \approx 720{,}1\,dm^3$
b) $r \approx 19{,}1\,m$; $V \approx 2292{,}2\,m^3$
c) $h \approx 19{,}8\,dm$; $V \approx 186{,}6\,dm^3$
d) $V \approx 188{,}5\,m^3$

6 a) Grundfläche $G = 6 \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$
$G \approx 210{,}44\,cm^2$; $V \approx 841{,}78\,cm^3$
b) $G \approx 210{,}44\,cm^2$; $h = \sqrt{s^2 - a^2} \approx 7{,}94\,cm$
$V \approx 556{,}96\,cm^3$
c) $a = \sqrt{s^2 - h^2}$; $a \approx 7{,}94\,cm$
$G \approx 163{,}79\,cm^2$; $V = 491{,}37\,cm^3$
Tipp: Erschließe die Formel für die Volumenberechnung der sechseckigen Pyramide. Ein regelmäßiges Sechseck kann in 6 gleichseitige Dreiecke zerlegt werden.

7

	s	h	G	V
a)	15	10	**394,1**	**1313,7**
b)	**12,8**	10	200	**666,7**
c)	**12**	**9**	200	600

8 Die Oberfläche O berechnet sich aus der Grundfläche und der Mantelfläche. Die Grundfläche ist ein Quadrat. Die Mantelfläche besteht aus vier Dreiecken.
a) $O = 24^2 + 4 \cdot \frac{24 \cdot 39}{2}$
$O = 2448\,cm^2$

b) $h_a \approx 40{,}8\,\text{cm}$
$O = 2534{,}4\ \text{cm}^2$
c) $a \approx 61{,}4\,\text{cm}$
$O \approx 8559{,}2\,\text{cm}^2$
Tipp: Um die Fläche der Seitendreiecke zu berechnen, benötigst du a und h_a.

9 $O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
a) $O \approx 1413{,}7\,\text{cm}^2$
b) $s \approx 21{,}2\,\text{cm}$
$O \approx 1705{,}9\,\text{cm}^2$
c) $r \approx 14{,}7\,\text{cm}$
$O \approx 1648{,}7\,\text{cm}^2$

Lösungen Seiten 50, 51

10 a) Höhe h_G eines Dreiecks der Grundfläche berechnen
$h_G = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_G = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2}$
$h_G \approx 7{,}8\,\text{cm}$

Höhe h_a eines Dreiecks der Mantelfläche berechnen
$h_a = \sqrt{h^2 + h_G^2}$
$h_a = \sqrt{12^2 + 7{,}8^2}$
$h_a \approx 14{,}3\,\text{cm}$

Oberfläche berechnen
$O = 6 \cdot \frac{a \cdot h_G}{2} + 6 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$
$O = 3 \cdot a \cdot h_G + 3 \cdot a \cdot h_a$
$O = 596{,}7\,\text{cm}^2$
b) Höhe h_G eines Dreiecks der Grundfläche berechnen
$h_G = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2}$
$h_G \approx 7{,}8\,\text{cm}$

Höhe h_a eines Dreiecks der Mantelfläche berechnen
$h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{12^2 - 4{,}5^2}$
$h_a = 11{,}1\,\text{cm}$

Oberfläche berechnen
$O = 6 \cdot \frac{a \cdot h_G}{2} + 6 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$
$O = 3 \cdot a \cdot h_G + 3 \cdot a \cdot h_a$
$O = 510{,}3\,\text{cm}^2$
c) Grundseite a berechnen
$a = \sqrt{s^2 - h^2}$
$a = \sqrt{12^2 - 9^2}$
$a \approx 7{,}9\,\text{cm}$

Höhe h_G eines Dreiecks der Grundfläche berechnen
$h_G = \sqrt{7{,}9^2 - 3{,}95^2}$
$h_G \approx 6{,}8\,\text{cm}$

Höhe h_a eines Dreiecks der Mantelfläche berechnen
$h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{12^2 - 3{,}95^2}$
$h_a \approx 11{,}3\,\text{cm}$
Oberfläche berechnen
$O = 3 \cdot a \cdot h_G + 3 \cdot a \cdot h_a$
$O \approx 429{,}0\,\text{cm}^2$
Tipp: Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Sechseck. Sie besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken.
Die Höhen der verschiedenen Dreiecke berechnest du mithilfe des Satzes von Pythagoras.

11 Die Mantelfläche einer Rechteckpyramide besteht aus 4 Dreiecken, von denen jeweils zwei gleich groß sind.
a) Höhe h_a berechnen
$h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{2{,}7^2 + 0{,}6^2}$
$h_a \approx 2{,}76$

Höhe h_b berechnen
$h_b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_b = \sqrt{2{,}7^2 + 0{,}75^2}$
$h_b \approx 2{,}80$

Mantelfläche berechnen
$M = 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2}$
$M = a \cdot h_a + b \cdot h_b$
$M = 1{,}5 \cdot 2{,}76 + 1{,}2 \cdot 2{,}8$
$M \approx 7{,}5$
Die Mantelfläche beträgt $7{,}5\,\text{m}^2$.
b) Höhe h_a berechnen
$h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{2{,}7^2 - 0{,}75^2}$
$h_a \approx 2{,}59$

Höhe h_b berechen
$h_b = \sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$
$h_b = \sqrt{2{,}7^2 - 0{,}6^2}$
$h_b \approx 2{,}63$

Mantelfläche berechnen
$M = a \cdot h_a + b \cdot h_b$
$M = 1{,}5 \cdot 2{,}59 + 1{,}2 \cdot 2{,}63$
$M \approx 7$
Die Mantelfläche ist rund $7\,m^2$ groß.
c) Diagonale berechnen
$\frac{d}{2} = \sqrt{s^2 - h^2}$
$\frac{d}{2} = \sqrt{2{,}7^2 - 1{,}2^2}$
$\frac{d}{2} \approx 2{,}4$

Seite b berechnen
$b = \sqrt{d^2 - a^2}$
$b = \sqrt{4{,}8^2 - 1{,}5^2}$
$b \approx 4{,}56$

h_a berechnen
$h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{2{,}7^2 - 0{,}75^2}$
$h_a \approx 2{,}59$

Höhe h_b berechen
$h_b = \sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$
$h_b = \sqrt{2{,}7^2 - 2{,}28^2}$
$h_b \approx 1{,}45$

Mantelfläche berechnen
$M = a \cdot h_a + b \cdot h_b$
$M = 1{,}5 \cdot 2{,}59 + 4{,}56 \cdot 1{,}45$
$M \approx 10{,}5$
Die Mantelfläche ist rund $10{,}5\,m^2$ groß.

12 a) $V = 144\,cm^3$; $O = 184{,}43\,cm^2$
b) $V = 576\,cm^3$; $O \approx 466{,}0\,cm^2$
c) $V = 288\,cm^3$; $O \approx 326{,}24\,cm^2$
d) Wenn sich die Länge der Grundseite verdoppelt, vervierfacht sich das Volumen.
Wenn sich die Höhe verdoppelt, verdoppelt sich das Volumen.
Die Grundseite wird in der Volumenformel quadriert, deshalb vervierfacht sich das Volumen. Bei der Oberfläche ist kein solcher Zusammenhang feststellbar.

13 a) Höhe h_a berechnen
$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{14^2 - 7^2}$
$h_a \approx 12{,}1$

Fläche eines Dreiecks berechnen
$A_{Dreieck} = \frac{14 \cdot 12{,}1}{2} = 84{,}7$
$O = 4 \cdot A_{Dreieck} = 338{,}8$
Der Tetraeder hat einen Oberflächeninhalt von $338{,}8\,cm^2$.
b) $O = 4 \cdot A_{Dreieck}$
$A_{Dreieck} = \frac{a \cdot h_a}{2}$
$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$O = \frac{4 \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2}$
$O = 2 \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$
$O = 2a\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$

14 a) $V_A = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \approx 523{,}6\,cm^3$
$V_B = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{h}{2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 10 \approx 523{,}6\,cm^3$
Die blauen Körper haben das gleiche Volumen.
$M_A = \pi \cdot r \cdot s_A = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{20^2 + 5^2} \approx 328{,}8$
$M_B = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s_B = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{10^2 + 5^2} = 351{,}2$
Die Mantelfläche von Körper B ist größer.
b) Die Höhe und der Radius des umfassenden Zylinders ist jeweils gleich.
$V_A = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $V_B = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Die blauen Körper haben das gleiche Volumen.

15 a) $r = 6\,cm$; $V \approx 301{,}6\,cm^3$; $O \approx 301{,}6\,cm^2$
b) $b = 18\,cm$; $h_a \approx 17{,}5\,cm$; $h_b \approx 16{,}8\,cm$;
$O \approx 834{,}9\,cm^2$
c) $G = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \approx 93{,}5\,cm^2$; $V \approx 498{,}7\,cm^3$;
$h_a \approx 16{,}8\,cm$; $O \approx 395{,}9\,cm^2$

16 $V_{Quader} = V_{Pyramide} < V_{Zylinder} < V_{Kegel}$
$O_{Zylinder} < O_{Quader} < O_{Pyramide} < O_{Kegel}$
A $V_{Kegel} \approx 392{,}7\,cm^3$; $O_{Kegel} \approx 326{,}7\,cm^2$
B $V_{Zylinder} \approx 339{,}3\,cm^3$; $O_{Zylinder} \approx 282{,}7\,cm^2$
C $V_{Quader} = 320\,cm^3$; $O_{Quader} = 304\,cm^2$
D $V_{Pyramide} = 320\,cm^3$; $O_{Pyramide} \approx 312{,}3\,cm^2$

17 a) $G = \frac{3 \cdot V}{h} = 300\,cm^2$; $r \approx 9{,}77\,cm$
b) $G = 300\,cm^2$; $a = \sqrt{300}\,cm \approx 17{,}32\,cm$
c) $O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = 1400\,cm^2$
$s = 17{,}8\,cm$

d) $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$
$1400 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 14$
$0 = a^2 + 28a - 1400$
Quadratische Gleichung lösen (zum Beispiel mit pq-Formel mit $p = 28$ und $q = -1400$):
$a_1 \approx 25{,}9$
$a_2 \approx -53{,}9$
Die Seitenlänge beträgt 25,9 cm.
Die Lösung a_2 hat keine Bedeutung, da es keine negativen Längen gibt.

18 a) Oben entsteht eine Pyramide, unten ein Pyramidenstumpf.
Mithilfe des Strahlensatzes wird die Kantenlänge a_1 der kleinen Pyramide berechnet: $a_1 = 35\,\text{cm}$.
Volumen der kleinen Pyramide:
$V_1 = \frac{1}{3} \cdot a_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot (35\,\text{cm})^2 \cdot 45\,\text{cm} = 18\,375\,\text{cm}^3$

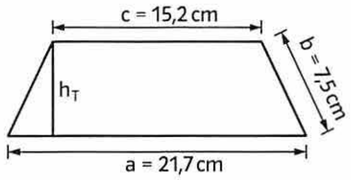
Volumen der ursprünglichen Pyramide:
$V = 147\,000\,\text{cm}^3$

Volumen des Pyramidenstumpfes:
$V_2 = V - V_1 = 128\,625\,\text{cm}^3$
b) Volumenanteil der kleinen Pyramide: 12,5 %
Allgemein gilt:
$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h} = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$
c) $V_1 = V - V_1$ bzw. $2 \cdot V_1 = V$
$\frac{2}{3} \cdot a_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$
Aufgrund des Strahlensatzes gilt:
$\frac{a_1}{a} = \frac{h_1}{h}$ bzw. $h_1 = \frac{a_1 \cdot h}{a}$.
Daraus folgt:
$\frac{2}{3} \cdot a_1^3 \cdot \frac{h}{a} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$
$2 \cdot a_1^3 = a^3$
$a_1 = \frac{a}{\sqrt[3]{2}} \approx 55{,}559\,\text{cm}$
Die Pyramide hätte in einer Höhe von etwa 14,44 cm von unten geteilt werden müssen.

Seite 51

19 a) – c) Das maximale Volumen, damit in der Verpackung mindestens 15 % Luft enthalten ist, beträgt bei einem Volumen von $1140\,\text{cm}^3$:
$V_{max} = \frac{1140}{0{,}85} \approx 1341{,}2\,\text{cm}^3$.

Abb. 1
Volumen berechnen
Der Körper ist ein Prisma mit einer Höhe $h = 7{,}5\,\text{cm}$ und einer trapezförmigen Grundfläche G.



$h_T = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} \approx 6{,}8\,\text{cm}$
$G = \frac{h_T}{2}(a + c) \approx 125{,}46\,\text{cm}^2$
$V = G \cdot h = 940{,}95\,\text{cm}^3$
Die Schachtel ist zu klein für 1 kg Reis.

Oberfläche berechnen
O_1: Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $a = 21{,}7\,\text{cm}$ und $h = 7{,}5\,\text{cm}$; $O_1 = 162{,}75\,\text{cm}^2$
O_2: Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $c = 15{,}2\,\text{cm}$ und $h = 7{,}5\,\text{cm}$; $O_2 = 114\,\text{cm}^2$
O_3: Fläche des Quadrats mit den Seitenlängen $b = 7{,}5\,\text{cm}$; $O_3 = 56{,}25\,\text{cm}^2$
$O = 2 \cdot G + O_1 + O_2 + 2 \cdot O_3 = 640{,}17\,\text{cm}^2$

Körpernetz

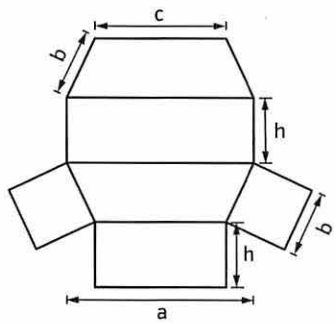


Abb. 2
Volumen berechnen
V_1: Volumen eines Quaders mit Seitenlängen $a = 11\,\text{cm}$, $b = 11\,\text{cm}$ und $c = 6\,\text{cm}$
V_2: Volumen des Viertels eines Zylinders mit Radius $r = 11\,\text{cm}$ und Höhe $c = 6\,\text{cm}$
$V_1 = a \cdot b \cdot c = 726\,\text{cm}^3$
$V_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot c = \pi \cdot 181{,}5\,\text{cm}^3 \approx 570{,}2\,\text{cm}^3$
$V = V_1 + V_2 = 1296{,}2\,\text{cm}^3$
In der Verpackung ist ca. 12 % Luft enthalten.

Oberfläche berechnen
O_1: Viertelkreis mit Radius $r = 11\,\text{cm}$
O_2: Quadrat mit Seitenlänge $a = 11\,\text{cm}$
O_3: Rechteck mit Seitenlängen $b = 11\,\text{cm}$ und $c = 6\,\text{cm}$
O_4: Rechteck mit Seitenlängen $d = 22\,\text{cm}$ und $c = 6\,\text{cm}$
O_5: Rechteck mit Seitenlängen $s = 11 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi r$ und $c = 6\,\text{cm}$
$O = 2 \cdot O_1 + 2 \cdot O_2 + O_3 + O_4 + O_5$
$\quad = 2 \cdot \frac{1}{4}\pi r^2 + 2 \cdot a^2 + bc + dc + sc \approx 799{,}7\,\text{cm}^2$

Körpernetz

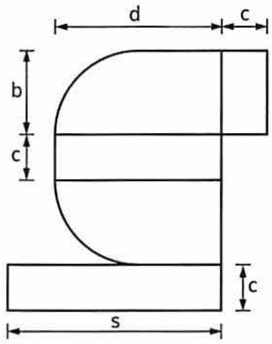
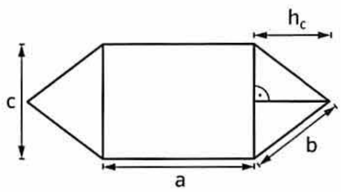


Abb. 3

Volumen berechnen

Der Körper ist ein Prisma der Höhe $h = 13\,cm$ und folgender Grundfläche G:



Es ist $a = 8\,cm$, $b = 5\,cm$, $c = 6\,cm$ und

$h_c = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}} = 4\,cm$, also

$G = a \cdot c + 2 \cdot \frac{c \cdot h_c}{2} = 72\,cm^2$

$V = G \cdot h = 936\,cm^3$

Die Schachtel ist zu klein für 1 kg Reis.

Oberfläche berechnen

O_1: Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen $a = 8\,cm$ und $h = 13\,cm$; $O_1 = 104\,cm^2$

O_2: Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen $b = 5\,cm$ und $h = 13\,cm$; $O_2 = 65\,cm^2$

$O = 2(G + O_1 + 2O_2) = 612\,cm^2$

Körpernetz

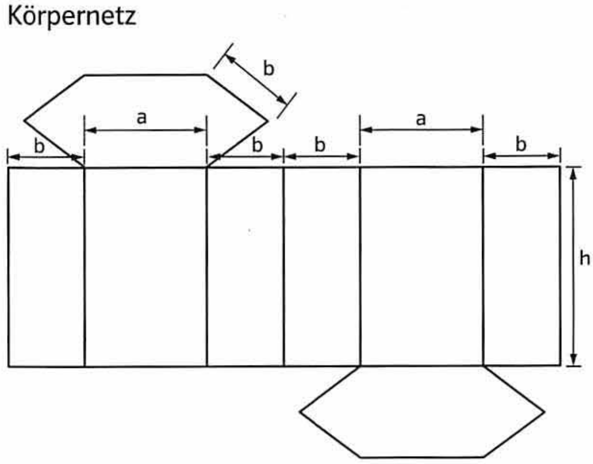


Abb. 4

Volumen berechnen

V_1: Volumen eines Würfels der Seitenlänge 8 cm

$V_1 = 512\,cm^3$

V_2: Volumen eines Zylinders mit Radius $r_1 = 4\,cm$ und Höhe $h_1 = a = 8\,cm$; $V_2 = \pi r_1^2 \cdot h_1 \approx 402{,}1\,cm^3$

V_3: Volumen eines Zylinders mit Radius $r_2 = 2{,}8\,cm$ und Höhe $h_2 = 14{,}5\,cm$

$V_3 = \pi r_2^2 \cdot h^2 \approx 357{,}1\,cm^3$

$V = 2V_1 + V_2 + V_3 = 1783{,}2\,cm^3$

1 kg Reis passt gut in diese Verpackung. In der Verpackung sind etwa 36 % Luft enthalten.

Oberfläche berechnen

O_1: Fläche des Quadrats mit Seitenlänge $a = 8\,cm$

$O_1 = 64\,cm^2$

O_2: Fläche des Kreises mit $r_1 = 4\,cm$; $O_2 \approx 50{,}3\,cm^2$

O_3: Mantelfläche des Zylinders mit $r_1 = 4\,cm$ und $h_1 = 8\,cm$; $O_3 = 2\pi r_1 h_1 \approx 201{,}1\,cm^2$

O_4: Fläche des Kreises mit $r_2 = 2{,}8\,cm$;

$O_4 \approx 24{,}6\,cm^2$

O_5: Mantelfläche des Zylinders mit Radius $r_2 = 2{,}8\,cm$ und Höhe $h_2 = 14{,}5\,cm$;

$O_5 = 2\pi r_2 \cdot h_2 \approx 255{,}1\,cm^2$

$O = 10 \cdot O_1 + 2 \cdot O_2 + O_3 - 2 \cdot O_4 + O_5 = 1147{,}6\,cm^2$

Körpernetz

kein zusammenhängendes Netz möglich, sondern zweimal: und einmal:

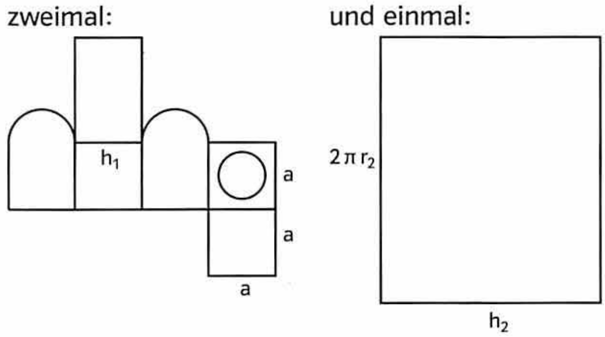


Abb. 5

Volumen berechnen

Der Körper besteht aus einem Würfel mit $a = 7\,cm$ und 6 quadratischen Pyramiden mit $a = 7\,cm$ und $s = 8{,}5\,cm$.

$V_1 = a^3 = 343\,cm^3$

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3}a^2 \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}a^2 \cdot \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}$

$\approx 112{,}9\,cm^3$

$V = V_1 + 6 \cdot V_2 = 1020{,}4\,cm^3$

Diese Schachtel ist zu klein für 1 kg Reis.

Oberfläche berechnen

Die Oberfläche besteht aus den Mantelflächen von 6 gleichen Pyramiden.

$O = 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 12 \cdot a \cdot \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} \approx 650{,}7\,cm^2$

Körpernetz

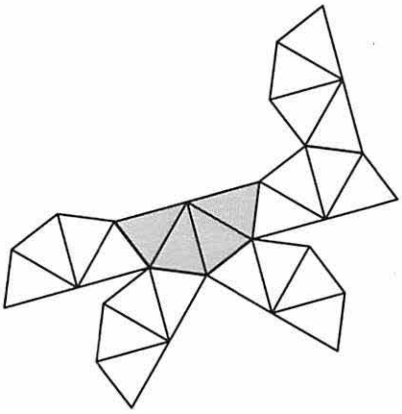


Abb. 6

Volumen berechnen

V_1: Volumen eines Prismas der Höhe $h = 9{,}3\,\text{cm}$, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge $a = 9{,}3\,\text{cm}$ ist

$V_1 = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot h \approx 348{,}3\,\text{cm}^3$

V_2: Volumen eines Tetraeders der Seitenlänge $a = 9{,}3\,\text{cm}$

$V_2 = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2} \approx 94{,}8\,\text{cm}^3$

$V = 3 \cdot V_1 + V_2 \approx 1139{,}7\,\text{cm}^3$

1 kg Reis passt in diese Schachtel nahezu optimal hinein.

Oberfläche berechnen

O_1: Fläche eines Quadrats der Seitenlänge $a = 9{,}3\,\text{cm}$

$O_1 = a^2 = 86{,}49\,\text{cm}^2$

O_2: Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a = 9{,}3\,\text{cm}$

$O_2 = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 37{,}5\,\text{cm}^2$

$O = 9 \cdot O_1 + 4 \cdot O_2 \approx 928{,}4\,\text{cm}^2$

Körpernetz

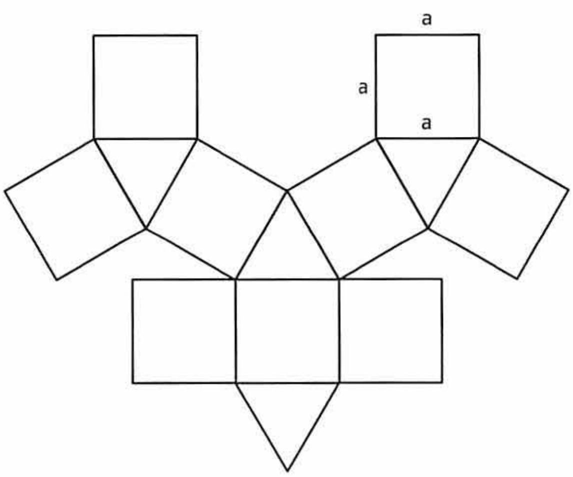
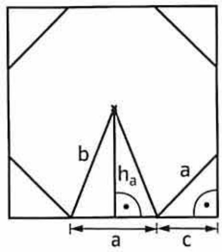


Abb. 7

Volumen berechnen

G: Fläche eines regelmäßigen Achtecks mit der Seitenlänge $a = 8\,\text{cm}$

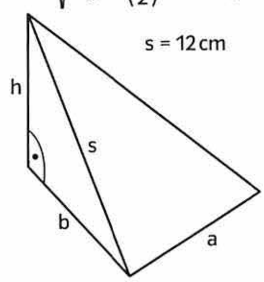


$c = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 5{,}7\,\text{cm}$

$G = (a + 2c)^2 - 2c^2 \approx 311{,}4\,\text{cm}^2$

$h_a = \frac{a + 2c}{2} \approx 9{,}7\,\text{cm}$

$b = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \approx 10{,}5\,\text{cm}$



Höhe h der Pyramide berechnen

$h = \sqrt{s^2 - b^2} \approx 5{,}8\,\text{cm}$

Volumen V der Pyramide berechnen

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 311{,}4 \cdot 5{,}8$

$V = 1204{,}08\,\text{cm}^3$

1 kg Reis passt in die Verpackung.
In der Verpackung sind nur ca. 5 % Luft enthalten.

Oberfläche berechnen

O_1 = Fläche eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundseite $a = 8\,\text{cm}$ und den Schenkeln $s = 12\,\text{cm}$

$O_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} \approx 45{,}3\,\text{cm}^2$

$O = 16 \cdot O_1 \approx 724{,}8\,\text{cm}^2$

Körpernetz

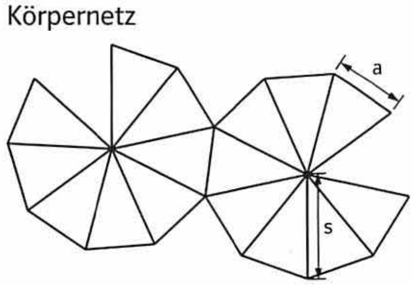
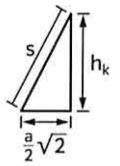
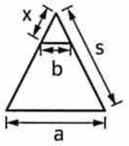


Abb. 8
Volumen berechnen
Höhe der „kompletten" Pyramide (h_k):
Aus $\frac{h_k}{h_k - 7{,}6} = \frac{13}{4}$ folgt $h_k \approx 10{,}98\,\text{cm}$
Volumen der „kompletten" Pyramide (V_k):
$V_k \approx 618{,}54\,\text{cm}^3$
Volumen der Pyramidenspitze (V_s): $V_s \approx 18{,}01\,\text{cm}^3$
Volumen des Pyramidenstumpfes (V_{st}):
$V_{st} \approx 600{,}52\,\text{cm}^3$
Gesamtvolumen des Körpers:
$V = 2 \cdot V_{st} = 1201{,}04\,\text{cm}^3$
1 kg Reis passt in die Verpackung.
In der Verpackung ist etwa 5 % Luft.

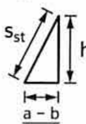
Oberfläche berechnen
O_1: Fläche eines Trapezes mit den parallelen Seiten $a = 13\,\text{cm}$ und $b = 4\,\text{cm}$ und der Höhe h_T
h_T berechnet sich wie folgt:



Die Seitenkante s der „kompletten" Pyramide ist
$s = \sqrt{h_k^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2} \approx 14{,}3\,\text{cm}$



Für die Seitenkante s_{st} des Pyramidenstumpfes gilt:
$\frac{x}{b} = \frac{s}{a}$; $x \approx 4{,}4\,\text{cm}$
$s_{st} = s - x \approx 9{,}9\,\text{cm}$



Daraus folgt:
$h_T = \sqrt{s_{st}^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \approx 8{,}82\,\text{cm}$
$O_1 = \frac{a+b}{2} \cdot h_T \approx 74{,}97\,\text{cm}^2$

Grundfläche der Pyramide $G_1 = a^2$
$O = 2 \cdot G_1 + 8 \cdot O_1 \approx 937{,}76\,\text{cm}^2$

Körpernetz

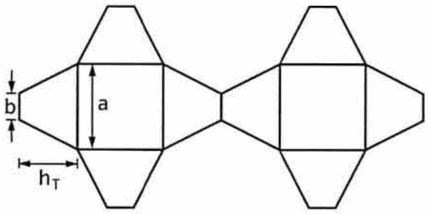
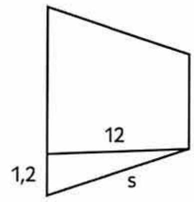
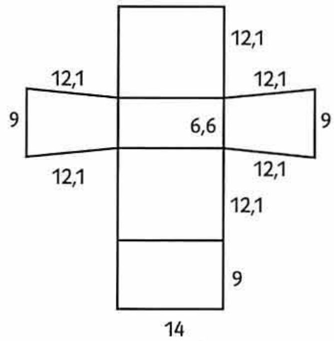


Abb. 9
Volumen berechnen
$V = G \cdot h$
Die Grundfläche ist ein Trapez.
$G = \frac{9 + 6{,}6}{2} \cdot 12 = 93{,}6$
$V = 93{,}6 \cdot 14 = 1310{,}4$
Das Volumen beträgt $1310{,}4\,\text{cm}^3$, ist also noch knapp innerhalb der 15 %-Grenze.
Seitenkante s berechnen
$s = \sqrt{12^2 + 1{,}2^2} \approx 12{,}1$



Oberfläche berechnen
$O = 9 \cdot 14 + 2 \cdot \frac{9 + 6{,}6}{2} \cdot 12 + 6{,}6 \cdot 14 + 2 \cdot 12{,}1 \cdot 14$
$O = 744{,}4$
Der Materialbedarf für die Schachtel beträgt $744{,}4\,\text{cm}^2$.

Körpernetz



20 a) **linke Schachtel**
$V_1 = 1560\,\text{cm}^2$; Zielvolumen $V_Z = 1200\,\text{cm}^3$
1. Möglichkeit: $V_1 \approx 1{,}3\,V_Z$,
also c um den Faktor 1,3 verkleinern
$c_Z \approx 9{,}2\,\text{cm}$
2. Möglichkeit: $V_Z = \frac{a \cdot b}{2} \cdot c_Z$
$c_Z = \frac{2V_Z}{a \cdot b}$; $c_Z \approx 9{,}2\,\text{cm}$

rechte Schachtel
Prismenvolumen:
Grundfläche = Dreieck + Rechteck

$G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{d^2 - \frac{a^2}{4}} + a \cdot b$
$G \approx 390{,}8\,\text{cm}^2$
$V = G \cdot c \approx 3126{,}4\,\text{cm}^3$

Höhe c verändern, um $V_Z = 1200\,\text{cm}^3$ zu erreichen.
$V_Z = G \cdot c_Z$; $c_Z \approx 3{,}1\,\text{cm}$
b) allgemein: $V = \frac{a \cdot b}{2} \cdot c$

nach a_Z aufgelöst:	nach b_Z aufgelöst:
$a_Z = \frac{2V_Z}{b \cdot c}$	$b_Z = \frac{2V_Z}{a \cdot c}$
$a_Z = 20\,\text{cm}$	$b_Z \approx 7{,}7\,\text{cm}$

Lösungen Seiten 52, 53

21 $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 15 = 720\,cm^3$

Ziel: $V = 500\,cm^3$ ($V_{max} = 550\,cm^3$; $V_{min} = 450\,cm^3$)

a) Durch Probieren, z.B.

$a = 10\,cm$ ergibt $V = 500\,cm^3$

$a = 10{,}5\,cm$ ergibt $V = 551{,}25\,cm^3$

$a = 9{,}5\,cm$ ergibt $V = 451{,}25\,cm^3$

Rechnerisch ergibt sich aus dem Vergleich von V_1 und $V = 500\,cm^3$:

$\frac{V}{V_1} = \frac{500}{720}$, also $\frac{a_{neu}^2}{12^2} = \frac{500}{720}$

Daraus ergibt sich $a_{neu}^2 = 100$,

somit ist $a_{neu} = 10\,cm$.

b) Durch Probieren, z.B.

$h = 12\,cm$ ergibt $V = 576\,cm^3$

$h = 11\,cm$ ergibt $V = 528\,cm^3$

$h = 10\,cm$ ergibt $V = 480\,cm^3$

$h = 10{,}5\,cm$ ergibt $V = 504\,cm^3$

Rechnerisch ergibt sich aus

$\frac{V}{V_1} = \frac{500}{720}$, also $\frac{h_{neu}}{15} = \frac{500}{720}$

Somit ist $h_{neu} \approx 10{,}4\,cm$.

Tipp: Arbeite mit Verhältnissen und kürze.

22 Kantenlänge des Würfels: a

Volumen des Würfels: a^3

Kantenlänge des Oktaeders: b

Oktaederkante b berechnen

$b = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Volumen des Oktaeders berechnen

$V_{Okt} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

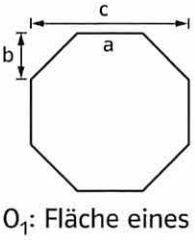
$G = b^2 = \frac{a^2}{2}$ und $h = \frac{a}{2}$

$V_{Okt} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot \frac{a}{2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2}$

$V_{Okt} = \frac{a^3}{6}$

Das Oktaeder nimmt ein Sechstel des Würfelvolumens ein.

23 a) Oberfläche:



O_1: Fläche eines Quadrats mit den Seitenlängen $c = a + 2b$

O_2: Fläche eines regelmäßigen Achtecks mit den Seitenlängen $a = 8\,cm$

O_3: Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit den Seitenlängen $a = 8\,cm$

$b = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow c = a + 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = a(1 + \sqrt{2}) \approx 19{,}3\,cm$

$O_1 = c^2 \approx 372\,cm^2$

$O_2 = O_1 - 2b^2 = c^2 - a^2 \approx 308\,cm^2$

$O_3 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \approx 27{,}7\,cm^2$

$O = 6 \cdot O_2 + 8 \cdot O_3 = 2069{,}6\,cm^2$

b) Volumen berechnen:

V_1: Volumen des Vollwürfels mit Kantenlänge $c = a(1 + \sqrt{2}) \approx 19{,}3\,cm$

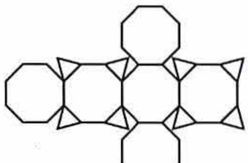
$V_1 \approx 7189{,}1\,cm^3$

V_2: Volumen eines Tetraeders mit Kantenlänge $a = 8\,cm$

$V_2 = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2} \approx 60{,}3\,cm^3$

$V = V_1 - 8V_2 = 6706{,}7\,cm^3$

c) Körpernetz:



24 Die Verpackung ist ein Prisma, dessen Grundfläche sich aus vier Viertelkreisen und einem Rechteck zusammensetzt.

Aus $V_P = G \cdot h = 600\,cm^3$ und $h = 5\,cm$ folgt: $G = 120\,cm^2$.

Kreisfläche: $r = x$; Rechteck: $a = 4x$; $b = x$

$G = \pi x^2 + 4x^2$

$x = \sqrt{\frac{G}{\pi + 4}}$

$x \approx 4{,}1\,cm$

25 a) Längen verdoppelt: Alle Körpervolumen wachsen mit dem Faktor 2^3, also um das 8-Fache.

Längen um 30 % vergrößert: Alle Körpervolumen wachsen mit dem Faktor $1{,}3^3$; also um etwa das 2,2-Fache.

b) Volumen um 30 % verkleinert ($V_Z = 0{,}7 \cdot V_1 = 0{,}7a^3$):

Die Längen verkleinern sich mit dem Faktor $\sqrt[3]{0{,}7}$; also um etwa das 0,89-Fache.

c) Längen verdoppelt: Alle Körperoberflächen wachsen mit dem Faktor 2^2, also um das 4-Fache.

Längen um 30 % vergrößert: Alle Körperoberflächen wachsen mit dem Faktor $1{,}3^2$, also um etwa das 1,7-Fache.

Volumen um 30 % verkleinert: Die Oberfläche verkleinert sich mit dem Faktor $\sqrt[3]{0{,}7^2}$; also etwa um das 0,79-Fache.

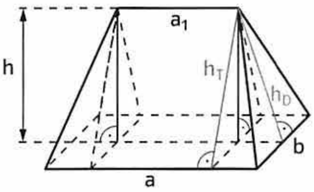
d) Oberfläche verdoppelt: Alle Körperlängen wachsen mit dem Faktor $\sqrt{2}$, also um das 1,4-Fache. Alle Volumen wachsen mit dem Faktor $(\sqrt{2})^3$, also um das 2,8-Fache.

26 Angenommenes Volumen: $\frac{1140}{0{,}85}\,\text{cm}^3 \approx 1341{,}18\,\text{cm}^3$

Aus $V = \frac{1}{12} \cdot a^3\sqrt{2} \le 1341{,}18\,\text{cm}^3$ folgt $a \le 22{,}49\,\text{cm}$.
Die Seitenlänge sollte also maximal 22,49 cm betragen.

Seite 53

27 a) Der Körper wird in zwei halbe Pyramiden, die sich zu einer Pyramide mit einer rechteckigen Grundfläche ergänzen, und ein Dreiecksprisma zerlegt.



Volumen der zusammengesetzten Pyramide:

$V_1 = \frac{1}{3}(a - a_1) \cdot b \cdot h$

Volumen des Prismas:

Grundfläche $G = \frac{b \cdot h}{2}$

$V_2 = \frac{b \cdot h}{2} \cdot a_1$

Gesamtvolumen:

$V = V_1 + V_2$

$V = \frac{a_1 \cdot b \cdot h}{2} + \frac{(a - a_1) \cdot b \cdot h}{3} = \frac{b \cdot h}{6}(3a_1 + 2(a - a_1))$

$= \frac{b \cdot h}{6}(a_1 + 2a)$

b) Oberfläche
= Grundfläche + 2 Trapeze + 2 Dreiecke

$O = G + 2A_T + 2A_D$

Grundfläche: $G = a \cdot b$

Trapezfläche:

$A_T = \frac{a + a_1}{2} \cdot h_T$; $h_T = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$

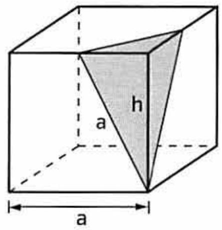
Dreiecksfläche:

$A_D = \frac{b \cdot h_D}{2}$; $h_D = \sqrt{\left(\frac{a - a_1}{2}\right)^2 + h^2}$

Oberfläche:

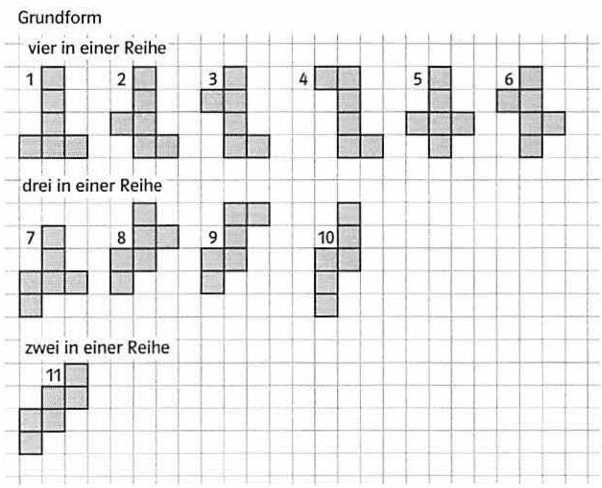
$O = a \cdot b + (a + a_1)\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} + b\sqrt{\left(\frac{a - a_1}{2}\right)^2 + h^2}$

28 Wenn man den oberen Teilkörper (blaue Pyramide) senkrecht durch die Diagonalen der Grundfläche in vier Teile schneidet und diese jeweils herunterklappt, entsteht ein Quader mit dem Volumen $V = a^2 \cdot h$.



29 a) In der Zelle D2 steht: $\boxed{\text{=B2^2*C2/3}}$
Ergebnis: 309,3
In der Zelle D3 steht: $\boxed{\text{=\$B\$6*B3^2*C3/3}}$
Ergebnis: 1226,6
In der Zelle D4 steht: $\boxed{\text{=4/3*\$B\$6*B4^3}}$
Ergebnis: 3053,6
b) In der Zelle E2 steht:
$\boxed{\text{=B2^2+2*B2*WURZEL(C2^2+(B2/2)^2)}}$
Ergebnis: 304,7
In der Zelle E3 steht:
$\boxed{\text{=\$B\$6*B3^2+\$B\$6*B3*WURZEL(B3^2+C3^2)}}$
Ergebnis: 712,6
In der Zelle E4 steht: $\boxed{\text{=4*\$B\$6*B4^2}}$
Ergebnis: 1017,9
Tipp: Den Wert von π erhältst du mit der Formel $\boxed{\text{=PI()}}$.

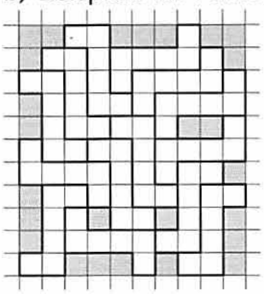
30 a) Elf Körpernetze des Würfels: Beispiel einer Systematik



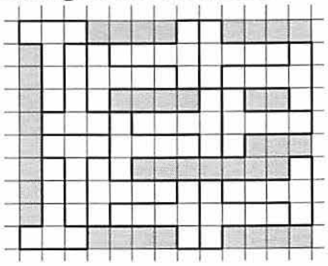
Sei a die Kantenlänge des Würfels. Seine Oberfläche ist $6a^2$. Die Netze 1, …, 9 und 11 passen auf ein rechteckiges Feld der Größe $3a \cdot 4a = 12a^2$, also 100 % mehr als die Würfeloberfläche bzw. 50 % Abfall. Netz Nr. 10 passt auf ein Feld der Größe $2a \cdot 5a = 10a^2$, also 66,67 % mehr als die Würfeloberfläche oder 40 % Abfall.

Wenn man Klebelaschen berücksichtigt, muss bei allen elf Netzen das Feld vergrößert werden. Bei den Netzen 1 bis 9 und 11 braucht man bei einer Laschenhöhe b dann mindestens ein Feld der Größe $(3a + b) \cdot 4a = 12a^2 + 4ab$ bzw. $3a(4a + b) = 12a^2 + 3ab$, je nachdem, welche Seite verlängert wird. Bei Netz Nr. 10 braucht man ein Feld der Größe $(2a + b) \cdot 5a = 10a^2 + 5ab$. Da $10a^2 + 5ab < 12a^2 + 3ab \iff 2ab < 2a^2$ $\iff b < a$, bleibt Nr. 10 die günstigste Lösung, da die Laschenhöhe in der Regel kleiner als die Kantenlänge sein wird.

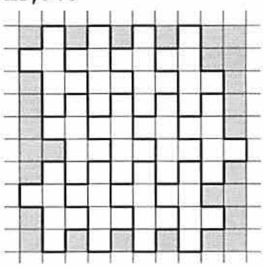
b) Beispiele für Parkettierungen mit Würfelnetzen



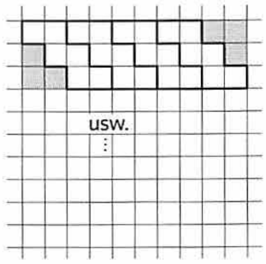
$A = 100\,\text{cm} \times 110\,\text{cm}$
$= 11\,000\,\text{cm}^2$
Abfall: $2600\,\text{cm}^2$
entspricht ungefähr 23,6 %



$A = 100\,\text{cm} \times 130\,\text{cm}$
$= 13\,000\,\text{cm}^2$
Abfall: $4000\,\text{cm}^2$
entspricht ungefähr 30,8 %

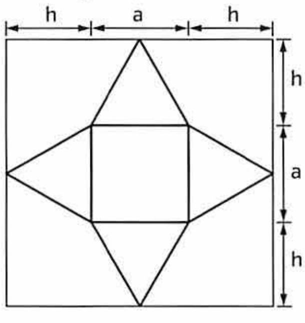


$A = 100\,\text{cm} \times 100\,\text{cm}$
$= 10\,000\,\text{cm}^2$
Abfall:
$2800\,\text{cm}^2 \mathrel{\hat{=}} 28\,\%$



$A = 100\,\text{cm} \times 120\,\text{cm}$
$= 12\,000\,\text{cm}^2$
Abfall:
$2400\,\text{cm}^2 \mathrel{\hat{=}} 20\,\%$

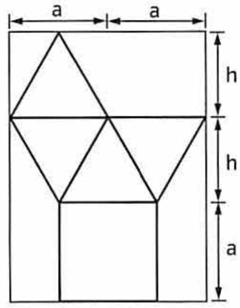
31 Für eine einzelne Pyramide sind verschiedene Netze möglich:



$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

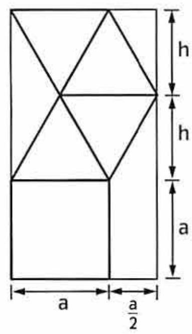
Materialbedarf:

$(a + 2h)^2$
$= \left(a + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$
$= (1 + \sqrt{3})^2 a^2 \approx 7{,}5\,a^2$



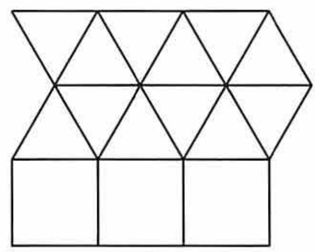
Materialbedarf:

$2a \cdot (a + 2h) = 2a(a + \sqrt{3}\,a)$
$= 2(1 + \sqrt{3})a^2$
$\approx 5{,}5\,a^2$



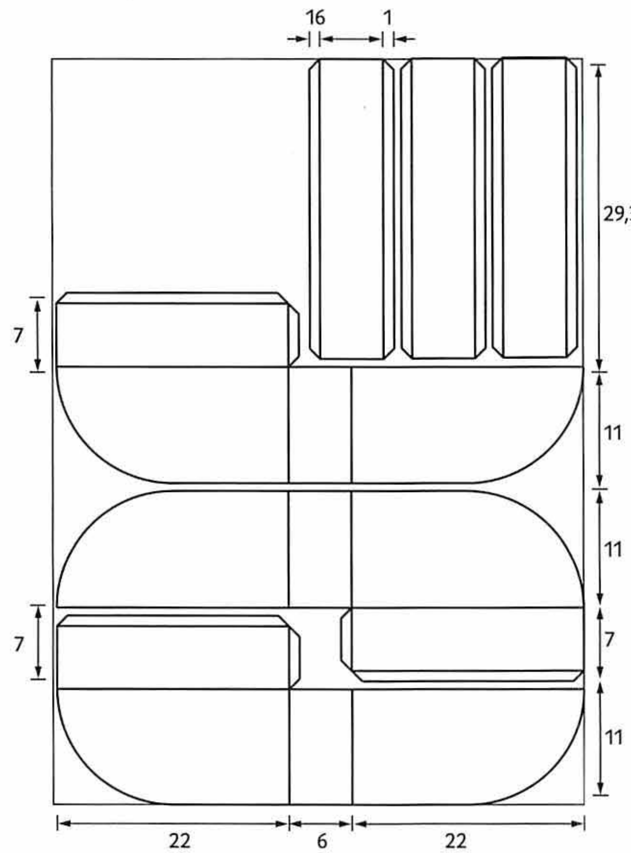
Materialbedarf:

$1{,}5\,a \cdot (a + 2h) = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3})a^2$
$\approx 4{,}1\,a^2$



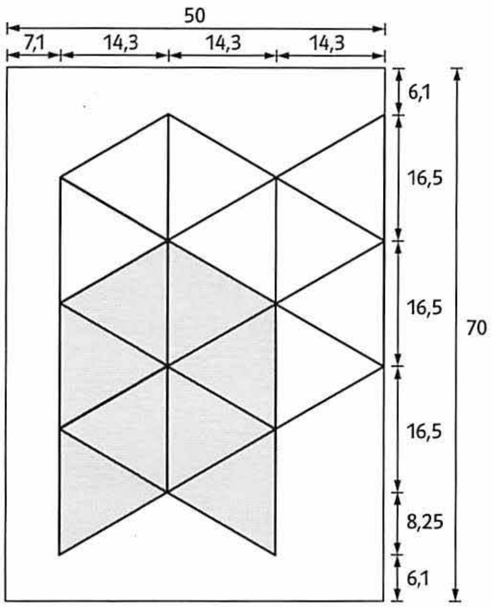
Die dritte Möglichkeit ist die günstigste. Um mehrere dieser Netze in einem Feld unterzubringen, empfiehlt sich die nebenstehende Anordnung.

32 a) Körper A



Die Skizze stellt kein zusammenhängendes Netz dar.
Möchte man mit echten Netzen arbeiten, bringt man nur zwei Schachteln auf dem Blatt unter und erhält dann ca. 54,3 % Abfall.

Körper B

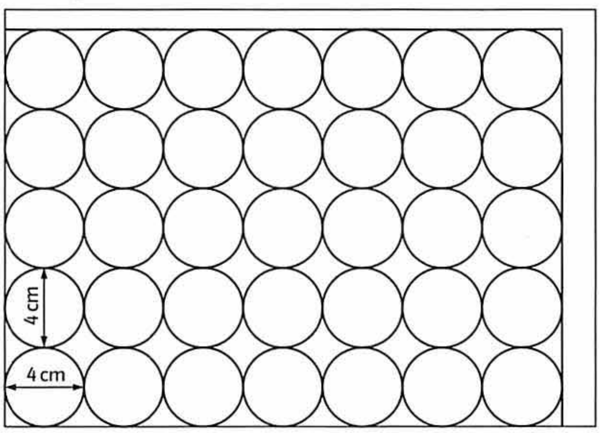


Höhe eines Seitendreiecks berechnen

$h = \sqrt{16{,}5^2 - \left(\frac{16{,}5}{2}\right)^2} \approx 14{,}3$

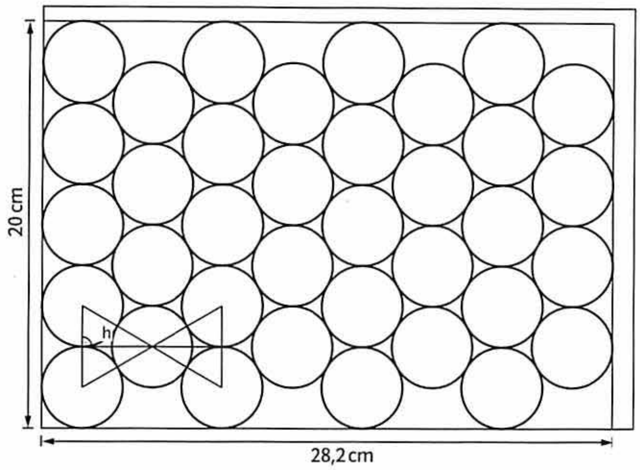
b) Die Oberfläche der Schachtel (Körper A) beträgt etwa $799{,}7\,\text{cm}^2$; Abfall bei 3 Schachteln: ca. 31,5 %.
Ein Seitendreieck hat eine Fläche von
$A_D = \frac{16{,}5 \cdot 14{,}3}{2} \approx 118$;
16 Dreiecke auf dem Papier $A_{16} = 6 \cdot 118 = 1888$;
das Blatt hat eine Fläche von $50 \cdot 70 = 3500$;
der Anteil der Dreiecke beträgt
$\frac{1888}{3500} \approx 0{,}539 \approx 54\,\%$. Der Abfall beträgt rund 46 %.

33 DIN-A4: $21\,\text{cm} \times 29{,}7\,\text{cm}$ ($\triangleq 623{,}7\,\text{cm}^2$)
1. Möglichkeit

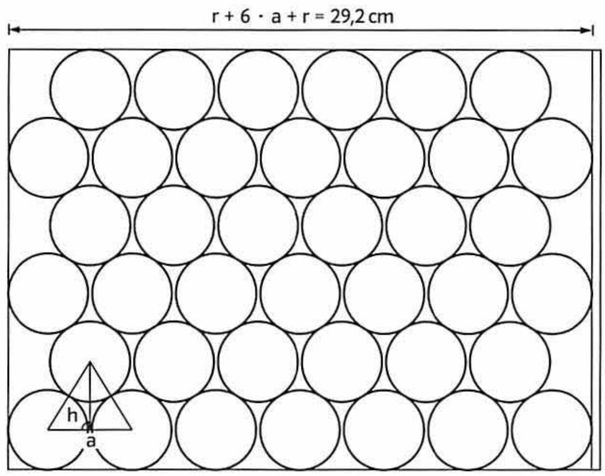


35 Kreise

2. Möglichkeit:



kurze Kante: $5 \cdot 2r = 20\,\text{cm}$
lange Kante: $2r + 7h = 28{,}2\,\text{cm}$
mit $h = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46\,\text{cm}$
$4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 36$ Kreise.
3. Möglichkeit:



a (Seitenlänge des Dreiecks) wird gewählt mit $a = 4{,}2\,\text{cm}$.
Dann ist $h = \sqrt{4r^2 - 2{,}1^2} = \sqrt{11{,}59}\,\text{cm} \approx 3{,}4\,\text{cm}$ und man kann sechs Spalten nebeneinander unterbringen, denn $r + 5h + r \approx 21\,\text{cm}$.
$3 \cdot 7 + 3 \cdot 6 = 39$ Kreise.
Optimal wäre eine Blattgröße, bei der kein Randrest entsteht.

Lösungen Seiten 54, 55

Kurs **Kugel**

Einstiegsaufgabe

$\frac{2}{3}$ des Wassers oder rund 67% laufen heraus.

1 a) $O \approx 1809{,}6\,cm^2$; $V \approx 7238{,}2\,cm^3$
b) $O \approx 7238{,}2\,mm^2$; $V \approx 57\,905{,}8\,mm^3$
c) $O \approx 3{,}14\,m^2$; $V \approx 0{,}52\,m^3$
d) $O \approx 289{,}5\,cm^2$; $V \approx 463{,}2\,cm^3$
e) Aus dem Umfang den Radius berechnen:
$u = 2 \cdot \pi \cdot r$
$7{,}8 = 2 \cdot \pi \cdot r$
$r = 7{,}8 : (2 \cdot \pi)$
$r \approx 1{,}241$
$O \approx 19{,}4\,dm^2$; $V \approx 8{,}0\,dm^3$
f) $r \approx 0{,}0143\,m$
$O \approx 0{,}002\,57\,m^2 = 25{,}7\,cm^2$;
$V \approx 0{,}000\,012\,2\,m^3 = 12{,}2\,cm^3$

2 a) $r \approx 0{,}89\,cm$ b) $r \approx 1{,}34\,cm$
$r \approx 2{,}82\,cm$ $r \approx 2{,}88\,cm$
$r \approx 8{,}92\,cm$ $r \approx 6{,}20\,cm$
Tipp: Setze alle Werte in die jeweilige Formel ein und löse die Gleichung nach r auf.

3

	r	O	V
a)	70 cm	**61575,2 cm²**	**1436755,0 cm³**
b)	**2,36 cm**	70 cm²	**55,06 cm³**
c)	**2,56 cm**	**82,35 cm²**	70 cm³

4 a) O: r verdoppeln: $O_1 = 4\pi(2r)^2 = 4(4\pi r^2) = 4 \cdot O$
r verdreifachen: $O_1 = 9 \cdot O$
V: r verdoppeln: $V_1 = 8 \cdot V$
r verdreifachen: $V_2 = 27 \cdot V$
b) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$
V verdoppeln: $r_1 = r\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26\,r$
r wird mit dem Faktor $\sqrt[3]{2}$ gestreckt.
c) $r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$
O verdoppeln: $r_1 = r\sqrt{2} \approx 1{,}41\,r$
r wird mit dem Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt.

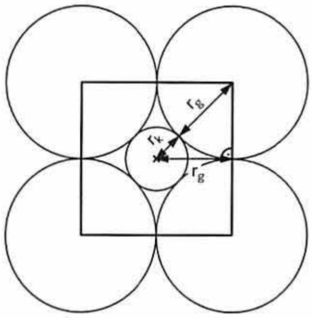
Seite 55

5 a) Es wird angenommen, dass der Ballon annähernd eine Kugel ist.
$V = 3500\,m^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, also
$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3500}{4\pi}}\,m \approx 9{,}42\,m$.
Der Durchmesser des Ballons beträgt etwa 18,84 m.
b) Die Personen im Korb sind etwa 0,6 cm groß. Geht man von einer Größe der Personen von 1,80 m aus, so entspricht dies einem Maßstab von etwa 1 : 300. Der Ballon ist an seiner breitesten Stelle etwa 6,2 cm groß; das entspricht einem realen Durchmesser von ca. 18,6 m und somit einem Volumen von ca. $3369{,}3\,m^3$. Diese Zahlen stimmen mit denjenigen im Aufgabenteil a) in etwa überein.

6 a) $V = V_{Zylinder} + V_{Halbkugel}$
$V = \pi \cdot 41^2 \cdot 82 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 41^3 \approx 577\,391{,}2\,cm^3$
$V \approx 577\,391{,}2\,cm^3 \approx 0{,}577\,m^3$
$O = O_{Kreis} + M_{Zylinder} + O_{Halbkugel}$
$O = \pi \cdot 41^2 + 2\pi \cdot 41 \cdot 82 + 2\pi \cdot 41^2 \approx 36\,967{,}12\,cm^2$
$O \approx 36\,967{,}12\,cm^2 \approx 3{,}70\,m^2$
b) $V = V_{Würfel} + V_{Halbkugel}$
$V = 82^3 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 41^3 \approx 695\,715{,}8\,cm^3$
$V = 695\,715{,}8\,cm^3 \approx 0{,}696\,m^3$
$O = O_{Würfel} + O_{Halbkugel} - O_{Kreis}$
$O = 6 \cdot 82^2 + 2\pi \cdot 41^2 - \pi \cdot 41^2 \approx 45\,625{,}0\,cm^2$
$O = 45\,625{,}0\,cm^2 \approx 4{,}56\,m^2$

7 a) $r \approx 0{,}89\,m$; $d = 1{,}78\,m$
b) 70% des Volumens entsprechen einem Volumen von $2{,}1\,m^3$: $r \approx 0{,}79\,m$; $d = 1{,}58\,m$

8 a) A 1 Kugel (r = 8 cm); $O_1 \approx 804{,}2\,cm^2$
B 8 Kugeln (r = 4 cm); $O_8 \approx 1608{,}5\,cm^2 = 2 \cdot O_1$
C 64 Kugeln (r = 2 cm); $O_{64} \approx 3217{,}0\,cm^2 = 2 \cdot O_8$
D 512 Kugeln (r = 1 cm);
$O_{512} = 6434{,}0\,cm^2 = 2 \cdot O_{64}$
Von Kugelpackung zu Kugelpackung verdoppelt sich die Oberfläche, da die Anzahl der Kugeln mit dem Faktor 2^3 steigt und der Radius sich mit dem Faktor 2^2 verringert.
b) Das Gesamtvolumen der Kugeln einer Packung ist in jedem Schritt $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 \approx 2144{,}7\,cm^3$. Es ergibt sich ein Gewicht von jeweils $m \approx 428{,}9\,g$.
Begründung: Die Anzahl der Kugeln wächst mit dem Faktor 2^3, der Radius verringert sich mit dem Faktor 2^3.

9 

$V_g = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_g^3$

$(r_k + r_g)^2 = 2r_g^2$

$r_k = \sqrt{2} \cdot r_g - r_g = (\sqrt{2} - 1)r_g$

$V_k = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_k^3$

$= \frac{4}{3} \cdot \pi\,(\sqrt{2} - 1)^3 r_g^3$

$= (\sqrt{2} - 1)^3 \cdot V_g \approx 0{,}07 \cdot V_g$

Das Volumen der kleinen Kugel darf maximal 7% des Volumens der großen Kugel betragen.

10 a) Die Kugel muss so groß gewesen sein, dass sie gut in der Hand zu halten war.
Angenommener Durchmesser $d = 8\,cm$
Dann ist $V \approx 268{,}1\,cm^3$; die Kugel wiegt etwa 5,2 kg.
b) Annahme: $m = 0{,}5\,kg$
$V_2 = \frac{1}{10} \cdot V_1 \approx 26{,}8\,cm^3$; Innendurchmesser: ca. 7,7 cm; Wandstärke: ca. 1,5 mm
c) Die Kugel würde untergehen, weil ihr Gewicht größer ist als das Gewicht des verdrängten Wassers.

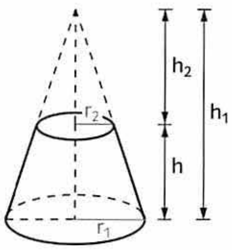
11 $r \approx 3{,}66\,cm$; $V \approx 205{,}4\,cm^3$
Die Dichte von Wasser beträgt $1\frac{g}{cm^3}$; die Kugel muss also leichter als 205,4 g sein.

Lösungen Seiten 56, 57

12 Volumen berechnen
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = 4 \cdot \pi \cdot \frac{23{,}65^3}{3}$
$V \approx 55\,409$
Die Angabe im Text ist richtig, das ist etwa ein Volumen von $55\,000\,m^3$. Wenn man noch die Dicke des Stahlblechs abzieht, kommt man dem Wert noch näher.

Oberflächeninhalt berechnen
$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$O = 4 \cdot \pi \cdot 23{,}65^2$
$O \approx 7028{,}7$
Die Angabe im Text ist richtig, der Oberflächeninhalt beträgt etwa $7000\,m^3$.

13 a) **Volumen des Tintenfässchens:**
Quader mit $a = 4\,cm$; $b = 2\,cm$; $c = 2\,cm$
$V = 16\,cm^3$
Das Volumen des Tintenfässchens beträgt $16\,cm^3$.
Volumen der Banane: Man kann die Banane als einen Zylinder ansehen mit Höhe $h = 16\,cm$ und Radius $r = 2\,cm$: $V \approx 200\,cm^3$.
Volumen des Salzstreuers: Der Salzstreuer kann als stumpfer Kegel angesehen werden mit Basisradius $r_1 = 3\,cm$, oberem Radius $r_2 = 1{,}5\,cm$ und Höhe $h = 6\,cm$.

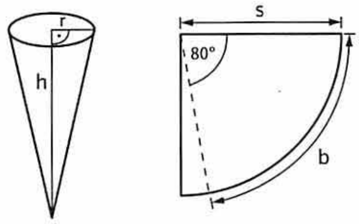


h_1: Höhe des vollen Kegels;
h_2: Höhe der Kegelspitze
Aus den Strahlensätzen folgt:
$\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2} = 2 \Longrightarrow h_1 = 2h_2$ und da $h + h_2 = h_1$ gilt:
$h_2 = h = 6\,cm$; somit ist $h_1 = 12\,cm$.
$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2\right) \approx 99{,}0\,cm^3$
Das Volumen des Salzstreuers beträgt etwa $100\,cm^3$.
b) Individuelle Lösungen

14 Verlängert man die Seitenlinien einer Stelze zum Querschnitt eines Kegels, so ergibt sich etwa $h = d$. Im hinteren Bereich ist zu erkennen, dass die Kegelhöhe etwa so groß ist wie die Höhe eines Stockwerks.
Die Höhe des Stockwerks eines Bürogebäudes liegt vermutlich zwischen 2,5 m und 3,5 m. Das Volumen des Kegels liegt also zwischen $4{,}1\,m^3$ und $11{,}2\,m^3$.
Die fehlende Kegelspitze hat etwa die Höhe $\frac{h}{8}$. Sie hat ein Volumen von $V_{sp} = \frac{\pi}{12} \cdot \left(\frac{h}{8}\right)^3 = \frac{1}{512} \cdot V_K$. Sie macht also nur rund 2‰ des Gesamtvolumens aus und kann deshalb vernachlässigt werden.

15 a) $r = 0{,}1\,mm$; $O_{Bläschen} \approx 0{,}125\,664\,mm^2$
Gesamtoberfläche der 300 Millionen Lungenbläschen:
$O_{gesamt} \approx 37\,699\,200\,mm^2 \approx 37{,}7\,m^2$
b) Eine Kugel mit dieser Oberfläche müsste einen Radius von ca. 1,73 m bzw. einen Durchmesser von ca. 3,46 m haben!

16



$b = 2 \cdot \pi \cdot s \frac{\alpha}{360°} \approx 16{,}3\,\text{cm}$; $r = \frac{b}{2\pi} = s\,\frac{\alpha}{360°} = 2{,}6\,\text{cm}$

$h = \sqrt{(s^2 - r^2)} \approx 11{,}4\,\text{cm}$; $V \approx 80{,}7\,\text{cm}^3$

In den Becher passen weniger als 100 ml Wasser.

Seite 57

17 Für die Berechnung der Oberfläche benötigst du die Kantenlänge und den Radius. Beides lässt sich mithilfe der Körpergröße der Person ungefähr bestimmen.

Kantenlänge ≈ 2-fache Körperlänge ≈ 3,60 m

Durchmesser ≈ $2\frac{1}{4}$-fache Körperlänge ≈ 4 m;

Radius ≈ 2 m

$O = \pi \cdot r \cdot s$

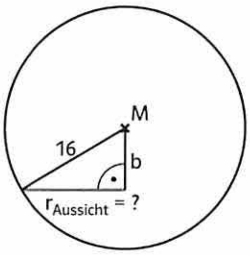
$O = \pi \cdot 2 \cdot 3{,}60 \approx 23\,\text{m}^2$

18 a) $V \approx 17157{,}3\,\text{m}^3$

$O \approx 3217{,}0\,\text{m}^2$

Die Angabe für die Oberfläche ist stark gerundet.

b) Die Plattform befindet sich 213,78 m − 203,78 m = 10 m unterhalb des Kugelmittelpunktes. Mithilfe des Satzes des Pythagoras kannst du $r_{Aussicht}$ berechnen.



$r_{Aussicht} = \sqrt{16^2 - 10^2}$

$r_{Aussicht} \approx 12{,}5$

Der Durchmesser der Aussichtsplattform auf dieser Höhe beträgt rund 25 m.

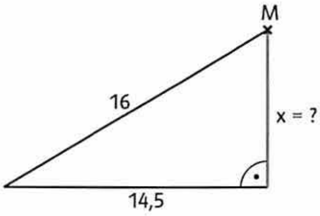
$A_{Aussicht} = \pi \cdot r^2_{Aussicht}$

$A_{Aussicht} \approx 491\,\text{m}^2$

c) $r_{Cafe} = 14{,}5\,\text{m}$

$x \approx 6{,}76\,\text{m}$

Die Plattform liegt 6,76 m unter oder über dem Mittelpunkt. Sie ist demnach entweder in einer Höhe von etwa 207 m oder etwa 221 m über dem Boden.



Seine Fläche beträgt rund $143{,}5\,\text{m}^2$.

Tipp: Das Restaurant befindet sich in 221 m Höhe.

19 Volumen früher

$V_1 \approx 2\,560\,869\,\text{m}^3$

Volumen heute

$V_2 \approx 2\,354\,909\,\text{m}^3$

Das entspricht rund 92 % des ursprünglichen Volumens. Das Volumen hat sich um rund 8 % verringert.

20 Es wird angenommen, dass das Volumen der Tüte vollständig mit Eis ausgefüllt wird. Das ist durchaus realistisch, da auch schon bei kleineren Eistüten die Kugeln zusammengedrückt werden und nahezu kein Zwischenraum verbleibt. Durch das Bild kannst du folgende Längen abschätzen:

Höhe ≈ 1,40 m; Durchmesser ≈ 0,55 m.

Daraus ergibt sich für das Volumen:

$V_{Tüte} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{Tüte} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 27{,}5 \cdot 140 \approx 111\,000$

Die Tüte hat ein Volumen von rund $111\,000\,\text{cm}^3$.

Durchmesser einer normalgroßen Eiskugel

$d \approx 4{,}6\,\text{cm}$

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}3^3 \approx 51$

Eine Eiskugel hat etwa ein Volumen von $51\,\text{cm}^3$.

Es passen also etwa 2174 Eiskugeln in diese Tüte.

Lösungen — Seiten 58, 59

Seite 59

Check **Aufgaben**

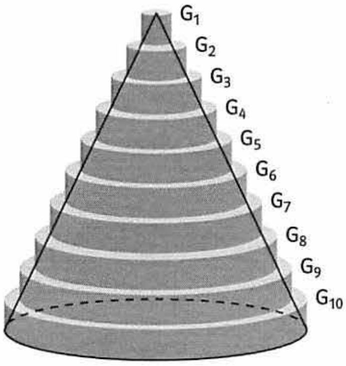
Die Lösungen zum Check befinden sich am Ende des → Schülerbuches auf den Seiten 214 und 215.

Lösungen Seiten 60, 61

Thema **Formeln entwickeln**

1 Individuelle Lösungen

2



Analog wie bei der Pyramide im Schülerbuch wird der Kegel als Summe von Zylindern betrachtet. Je mehr Schichten vorhanden sind, desto mehr nähert sich die Summe der Volumen der Zylinder dem tatsächlichen Volumen des Kegels an. Bei 10 Schichten z. B. gilt:

$V = G_1 \cdot \frac{h}{10} + G_2 \cdot \frac{h}{10} + \ldots + G_{10} \cdot \frac{h}{10}$

$V = \pi r_1^2 \frac{h}{10} + \pi r_2^2 \frac{h}{10} + \ldots + \pi r_{10}^2 \frac{h}{10}$

Für die Radien $r_1, \ldots, r_{10}$ ergibt sich aufgrund der Strahlensätze:

$r_1 = \frac{1}{10} r;\ r_2 = \frac{2}{10} r;\ \ldots;\ r_{10} = \frac{10}{10} r$

Und damit gilt:

$G_1 = \pi r_1^2 = \pi \left(\frac{1}{10} r\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \pi r^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 G$

$G_2 = \pi r_2^2 = \pi \left(\frac{2}{10} r\right)^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 \pi r^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 G$

...

Setzt man nun $G_1, G_2, \ldots$ in die Volumenformel ein, erhält man:

$V = \left(\frac{1}{10}\right)^2 G \cdot \frac{h}{10} + \left(\frac{2}{10}\right)^2 G \cdot \frac{h}{10} + \ldots + \left(\frac{10}{10}\right)^2 G \cdot \frac{h}{10}$

$V = \frac{1}{10} \cdot \left[\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{10}{10}\right)^2\right] \cdot G \cdot h$

$= 0{,}385 \cdot G \cdot h$

Diese Annäherung ist noch sehr ungenau. Teilung des Kegels in 100 Schichten (also in 100 Zylinder der Höhe $\frac{h}{100}$) ergibt die Annäherung: $V \approx 0{,}338 \cdot G \cdot h$.

Teilung in 1000 Schichten: $V \approx 0{,}333\,833 \cdot G \cdot h$

Noch kleinere Teilungen zeigen letzten Endes, dass das Volumen des Zylinders dem Wert $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ entspricht.

Lösungen Seite 62

Test

Die Lösungen zum Test befinden sich am Ende des → Schülerbuches auf den Seiten 216 bis 218.