Skript zur Fachvorlesung

Arithmetik, elementare Algebra
und
elementare Funktionen

(20/21 bbSt / GS Ma DF2-5 und FD3-4)

Stand: 29.09.2020

Ralf Kühnke

Zur Orientierung

Liebe Teilnehmerin, lieber Teilnehmer,

gerne möchte ich Ihnen vorab ein paar Hinweise geben:

Dieses Skript wird parallel zur Vorlesung weiterentwickelt. Die aktuelle Version dieses Skriptes können Sie hier downloaden.

Viele Teile dieses Skripts werden von mir verfilmt werden. Die einzelnen Videos können Sie unter www.kühnke.mathe.team finden.

Zu diesem Skript existieren Moodle-Fortschrittslisten. Hiermit können Sie

- den zeitlichen Ablauf der Vorlesung erkennen und
- durch die Unterteilung in „Pflicht-Elemente" und „Alle Elemente" (siehe z.B. Mengenlehre) erkennen, welche Inhalte als *Basis*- und welche als *Zusatzstoff* (in diesem Skript mit „*)" gekennzeichnet) angesehen werden.

Sie können die Moodle-Fortschrittslisten auch für sich selbst zur Arbeitsorganisation nutzen, indem Sie ein Häkchen setzen, wenn Sie einen Punkt bearbeitet haben. Dies hat jedoch keinerlei sonstige Auswirkungen.

Dieses Skript ist mit vielen Hinweisen auf Fußnoten versehen. Bitte lassen Sie sich dadurch nicht irritieren: Grundsätzlich können Sie alle Fußnoten einfach ignorieren. Für den Fall, dass Sie vertiefendes Interesse besitzen, finden Sie dort jedoch Hinweise auf Fachliteratur (siehe empfohlene Literatur, S. 320) oder Dateien, die in diesem Skript verwendet wurden. Die Excel-Dateien wurden von mir meist so erstellt, dass Sie sich per Zufallsvariablen neue Aufgaben mit Lösungswegen (die ausblendbar sind) generieren können.

Zudem finden Sie in diesem Skript auch viele Links zu Wikipedia und Erklärvideos (z.B. Daniel Jung). Grundsätzlich bin ich der Meinung, dass diese Quellen hilfreich sind und möchte sie Ihnen daher gerne anbieten. Jedoch möchte ich Sie bitten, sie mit einer gewissen kritischen Distanz zu betrachten und mir ggf. eine Rückmeldung zu geben, falls sich herausstellen sollte, dass sich dort Fehler befinden.

Beachten Sie bitte auch diese Arbeitsmaterialien.

Für Rückmeldungen und ggf. Fehler-Hinweise an skript@mathe.xyz wäre ich sehr dankbar.

Ich wünsche Ihnen eine interessante Lektüre!

Mit herzlichen Grüßen
Ralf Kühnke

Inhalt

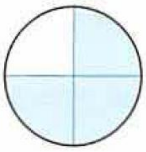
1 Grundlagen

1.1 Bruchrechnung

1.1.1 Was ist ein Bruch?

Antwort:
Ein Bruch ist ein Repräsentant einer Äquivalenzklasse q*uotientengleicher* Paare (siehe S. 277).

Vorerst genügt uns jedoch folgende Darstellung[1]:

	als **gemeiner Bruch**		als **Dezimalbruch**
	$\frac{3}{4}$ ← Zähler ← Bruchstrich ← Nenner	Der **Nenner eines Bruches** gibt an, in wie viele Teile ein Ganzes geteilt wurde. Der **Zähler eine Bruches** gibt an, wie viele solcher Teile vorhanden sind.	0,75 Zehntel Hundertstel

1.1.2 Übungen zur Bruchrechnung

Bitte beachten Sie auch die Playlist Bruchrechnung (Mathe by Daniel Jung) und die verlinkten Videos (siehe Fußnoten).

a) Umwandlung eines unechten Bruchs in eine gemischte Zahl[2]

b) Brüche erweitern und kürzen[3]

c) Addition (un)gleichnamiger Brüche[4]

d) Subtraktion (un)gleichnamiger Brüche

e) Multiplikation von Brüchen[5]

f) Division von Brüchen

[1] Aus: Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, 2015, S. 15
[2] Siehe: https://youtu.be/2C8zGtIcG4Q
[3] Siehe: https://youtu.be/zF09rkKzJoE
[4] Siehe: https://youtu.be/ySKXfCEGCvA
[5] Siehe: https://youtu.be/zXzhsDrcD6E

Beispiele[6]:

Umwandlung eines *unechten* Bruchs in eine *gemischte Zahl*	$\frac{26}{7} = \frac{21}{7} + \frac{5}{7} = 3 + \frac{5}{7} = 3 \frac{5}{7} = 3 \quad 5/7$
Bruch mit 15 *erweitern*	$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 15}{7 \cdot 15} = \frac{75}{105}$
Bruch *kürzen* (mit Hilfe des *ggT*)	$\frac{40}{24} = \frac{5 \cdot \cancel{8}}{3 \cdot \cancel{8}} = \frac{5}{3} = 1 \quad 2/3$
Addition *gleichnamiger* Brüche	$\frac{10}{17} + \frac{21}{17} = \frac{31}{17} = 1 \quad 14/17$
Subtraktion *gleichnamiger* Brüche	$\frac{16}{9} - \frac{13}{9} = \frac{3}{9} = 1/3$
Addition *ungleichnamiger* Brüche (mit Hilfe des *kgV*)	$\frac{3}{27} + \frac{4}{18} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 3}{54} = \frac{6 + 12}{54} = \frac{18}{54} = 1/3$
Subtraktion *ungleichnamiger* Brüche (mit Hilfe des *kgV*)	$\frac{20}{12} - \frac{13}{15} = \frac{20 \cdot 5 - 13 \cdot 4}{60} = \frac{100 - 52}{60} = \frac{48}{60} = 4/5$
Multiplikation von Brüchen	$\frac{13}{8} \cdot \frac{3}{12} = \frac{13 \cdot 3}{8 \cdot 12} = \frac{39}{96} = 13/32$
Division von Brüchen	$\frac{3}{8} : \frac{12}{6} = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{12} = \frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 12} = \frac{18}{96} = 3/16$

[6] Siehe: Bruchrechnung.xlsx

Übung[7]:

Umwandlung eines *unechten* Bruchs in eine *gemischte Zahl*	$\frac{40}{19} =$
Bruch mit 7 *erweitern*	$\frac{3}{4} =$
Bruch *kürzen* (mit Hilfe des *ggT*)	$\frac{130}{234} =$
Addition *gleichnamiger* Brüche	$\frac{10}{19} + \frac{3}{19} =$
Subtraktion *gleichnamiger* Brüche	$\frac{14}{7} - \frac{2}{7} =$
Addition *ungleichnamiger* Brüche (mit Hilfe des *kgV*)	$\frac{3}{5} + \frac{4}{2} =$
Subtraktion *ungleichnamiger* Brüche (mit Hilfe des *kgV*)	$\frac{13}{2} - \frac{7}{11} =$
Multiplikation von Brüchen	$\frac{7}{14} \cdot \frac{13}{16} =$
Division von Brüchen	$\frac{10}{7} : \frac{11}{2} =$

[7] Sie können sich mit der Datei „Bruchrechnung.xlsx“ Zufallsaufgaben mit Rechenwegen und Lösungen generieren.

Lösung[8]:

Umwandlung eines *unechten* Bruchs in eine *gemischte Zahl*	$\frac{40}{19} = \frac{38}{19} + \frac{2}{19} = 2 + \frac{2}{19} = 2\ \frac{2}{19} = 2\ \ 2/19$
Bruch mit 7 *erweitern*	$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$
Bruch *kürzen* (mit Hilfe des *ggT*)	$\frac{130}{234} = \frac{5 \cdot \cancel{26}}{9 \cdot \cancel{26}} = \frac{5}{9} = 5/9$
Addition *gleichnamiger* Brüche	$\frac{10}{19} + \frac{3}{19} = \frac{13}{19} = 13/19$
Subtraktion *gleichnamiger* Brüche	$\frac{14}{7} - \frac{2}{7} = \frac{12}{7} = 1\ \ 5/7$
Addition *ungleichnamiger* Brüche (mit Hilfe des *kgV*)	$\frac{3}{5} + \frac{4}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 5}{10} = \frac{6 + 20}{10} = \frac{26}{10} = 2\ \ 3/5$
Subtraktion *ungleichnamiger* Brüche (mit Hilfe des *kgV*)	$\frac{13}{2} - \frac{7}{11} = \frac{13 \cdot 11 - 7 \cdot 2}{22} = \frac{143 - 14}{22} = \frac{129}{22} = 5\ \ 19/22$
Multiplikation von Brüchen	$\frac{7}{14} \cdot \frac{13}{16} = \frac{7 \cdot 13}{14 \cdot 16} = \frac{91}{224} = 13/32$
Division von Brüchen	$\frac{10}{7} : \frac{11}{2} = \frac{10}{7} \cdot \frac{2}{11} = \frac{10 \cdot 2}{7 \cdot 11} = \frac{20}{77} = 20/77$

[8] Bei der Multiplikation empfiehlt es sich, nach Möglichkeit schon vorher zu kürzen, um größere Zahlen zu vermeiden.

1.2 Rechnen mit rationalen Zahlen

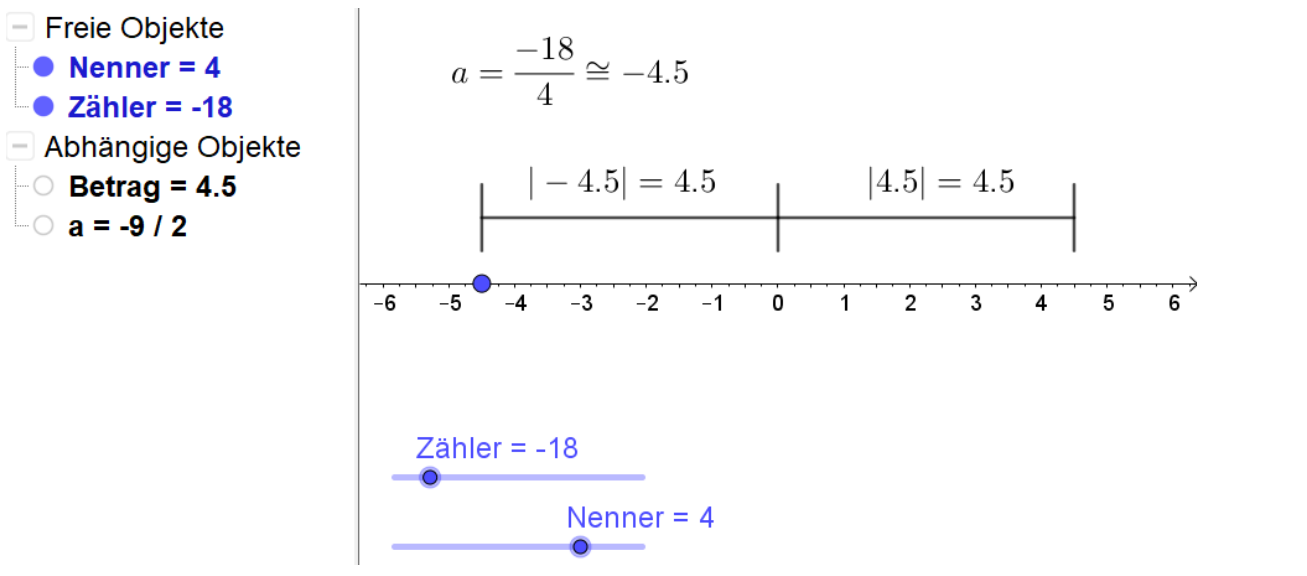
Hinweis: Die schriftlichen Rechenverfahren für die natürlichen Zahlen (auch bzgl. unterschiedlicher Basen) werden ab S. 174 näher erläutert.

1.2.1 Absolutbetrag rationaler Zahlen

Der Absolutbetrag bzw. Betrag einer Zahl a (Zeichen: „|a|“) ist ihr Abstand auf der Zahlengeraden zum Nullpunkt.

Der Betrag[9] einer Zahl ist demnach nie negativ.

Beispiel (mit GeoGebra erstellt)[10]:



An dieser Stelle soll auf das kostenlose Programm GeoGebra[11] hingewiesen (Download) und zur Installation auf Laptop (empfohlen: GeoGebra Classic 5) bzw. Smartphone oder Tablet (empfohlen: Grafikrechner und Geometrie) angeregt werden.

---

[9] Siehe auch: https://youtu.be/CfBaZjMHffA
[10] Siehe: Betrag.ggb
[11] Siehe: https://www.geogebra.org/

1.2.2 Addition

a) Summanden mit *gleichen* Vorzeichen[12]

- Das Ergebnis besitzt das *gemeinsame* Vorzeichen.
- Die Beträge der Summanden werden addiert.

$$\left[-\ 2{,}00\right] + \left[-\ 5{,}00\right] = -\left[2{,}00 + 5{,}00\right] = -\ 7{,}00$$

$$\left[+\ 2{,}00\right] + \left[+\ 5{,}00\right] = +\left[2{,}00 + 5{,}00\right] = +\ 7{,}00$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{5}{3}\right] = -\left[\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right] = -\frac{3 + 10}{6} = -\frac{13}{6}$$

$$\left[+\frac{1}{2}\right] + \left[+\frac{5}{3}\right] = +\left[\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right] = +\frac{3 + 10}{6} = +\frac{13}{6}$$

[12] Sie können sich mit der Datei „Rechnen mit rationalen Zahlen.xlsx“ Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

b) Summanden mit *verschiedenen* Vorzeichen[13]

- Das Ergebnis besitzt das Vorzeichen *der vom Betrag her gesehen größeren Zahl.*
- Der kleinere Betrag wird vom größeren subtrahiert.

$$\left[-\ 2{,}00 \right] + \left[+\ 5{,}00 \right] = + \left[5{,}00 - 2{,}00 \right] = +\ 3{,}00$$

$$\left[+\ 2{,}00 \right] + \left[-\ 5{,}00 \right] = - \left[5{,}00 - 2{,}00 \right] = -\ 3{,}00$$

$$\left[-\frac{1}{2} \right] + \left[+\frac{5}{3} \right] = + \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{2} \right] = + \frac{10 - 3}{6} = + \frac{7}{6}$$

$$\left[+\frac{1}{2} \right] + \left[-\frac{5}{3} \right] = - \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{2} \right] = - \frac{10 - 3}{6} = - \frac{7}{6}$$

[13] Sie können sich mit der Datei „Rechnen mit rationalen Zahlen.xlsx“ Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

Übungen:

$$\left[-\ 19{,}30 \right] + \left[-\ 16{,}60 \right] =$$

$$\left[+\ 19{,}50 \right] + \left[+\ 1{,}20 \right] =$$

$$\left[-\ 11{,}20 \right] + \left[+\ 5{,}90 \right] =$$

$$\left[+\ 17{,}50 \right] + \left[-\ 9{,}70 \right] =$$

Lösungen:

$$\left[-\ 19{,}30 \right] + \left[-\ 16{,}60 \right] = -\left[19{,}30 + 16{,}60 \right] = -\ 35{,}90$$

$$\left[+\ 19{,}50 \right] + \left[+\ 1{,}20 \right] = +\left[19{,}50 + 1{,}20 \right] = +\ 20{,}70$$

$$\left[-\ 11{,}20 \right] + \left[+\ 5{,}90 \right] = -\left[11{,}20 - 5{,}90 \right] = -\ 5{,}30$$

$$\left[+\ 17{,}50 \right] + \left[-\ 9{,}70 \right] = +\left[17{,}50 - 9{,}70 \right] = +\ 7{,}80$$

Übungen:

$$\left[-\frac{5}{10}\right] + \left[-\frac{8}{3}\right] =$$

$$\left[+\frac{6}{6}\right] + \left[+\frac{1}{5}\right] =$$

$$\left[-\frac{8}{1}\right] + \left[+\frac{6}{5}\right] =$$

$$\left[+\frac{3}{7}\right] + \left[-\frac{1}{1}\right] =$$

Lösungen:

$$\left[-\frac{5}{10}\right] + \left[-\frac{8}{3}\right] = -\left[\frac{5}{10} + \frac{8}{3}\right] = -\frac{15 + 80}{30} = -\frac{95}{30} = -\frac{19}{6}$$

$$\left[+\frac{6}{6}\right] + \left[+\frac{1}{5}\right] = +\left[\frac{6}{6} + \frac{1}{5}\right] = +\frac{30 + 6}{30} = +\frac{36}{30} = +\frac{6}{5}$$

$$\left[-\frac{8}{1}\right] + \left[+\frac{6}{5}\right] = -\left[\frac{8}{1} - \frac{6}{5}\right] = -\frac{40 - 6}{5} = -\frac{34}{5} = -\frac{34}{5}$$

$$\left[+\frac{3}{7}\right] + \left[-\frac{1}{1}\right] = -\left[\frac{1}{1} - \frac{3}{7}\right] = -\frac{7 - 3}{7} = -\frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$$

1.2.3 Subtraktion[14]

Eine rationale Zahl subtrahiert man, indem man ihre Gegenzahl addiert.

$$\left[+\ 2{,}00\right] - \left[+\ 5{,}00\right] = \left[+\ 2{,}00\right] + \left[-\ 5{,}00\right] = -\left[5{,}00 - 2{,}00\right] = -\ 3{,}00$$

$$\left[+\ 2{,}00\right] - \left[-\ 5{,}00\right] = \left[+\ 2{,}00\right] + \left[+\ 5{,}00\right] = +\left[2{,}00 + 5{,}00\right] = +\ 7{,}00$$

$$\left[-\ 2{,}00\right] - \left[+\ 5{,}00\right] = \left[-\ 2{,}00\right] + \left[-\ 5{,}00\right] = -\left[2{,}00 + 5{,}00\right] = -\ 7{,}00$$

$$\left[-\ 2{,}00\right] - \left[-\ 5{,}00\right] = \left[-\ 2{,}00\right] + \left[+\ 5{,}00\right] = +\left[5{,}00 - 2{,}00\right] = +\ 3{,}00$$

[14] Sie können sich mit der Datei „Rechnen mit rationalen Zahlen.xlsx“ Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

$$\left[+\frac{1}{2}\right] - \left[+\frac{5}{3}\right] = \left[+\frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{5}{3}\right] = -\left[\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{10 - 3}{6} = -\frac{7}{6}$$

$$\left[+\frac{1}{2}\right] - \left[-\frac{5}{3}\right] = \left[+\frac{1}{2}\right] + \left[+\frac{5}{3}\right] = +\left[\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right] = +\frac{3 + 10}{6} = +\frac{13}{6}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right] - \left[+\frac{5}{3}\right] = \left[-\frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{5}{3}\right] = -\left[\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right] = -\frac{3 + 10}{6} = -\frac{13}{6}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right] - \left[-\frac{5}{3}\right] = \left[-\frac{1}{2}\right] + \left[+\frac{5}{3}\right] = +\left[\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right] = +\frac{10 - 3}{6} = +\frac{7}{6}$$

Übungen:

$$\left[+\ 18{,}90 \right] - \left[+\ 4{,}90 \right] =$$

$$\left[+\ 8{,}10 \right] - \left[-\ 12{,}70 \right] =$$

$$\left[-\ 8{,}30 \right] - \left[+\ 17{,}60 \right] =$$

$$\left[-\ 13{,}60 \right] - \left[-\ 4{,}40 \right] =$$

Lösungen:

$$\left[+\ 18{,}90\right] - \left[+\ 4{,}90\right] = \left[+\ 18{,}90\right] + \left[-\ 4{,}90\right] = +\left[18{,}90 - 4{,}90\right] = +\ 14{,}00$$

$$\left[+\ 8{,}10\right] - \left[-\ 12{,}70\right] = \left[+\ 8{,}10\right] + \left[+\ 12{,}70\right] = +\left[8{,}10 + 12{,}70\right] = +\ 20{,}80$$

$$\left[-\ 8{,}30\right] - \left[+\ 17{,}60\right] = \left[-\ 8{,}30\right] + \left[-\ 17{,}60\right] = -\left[8{,}30 + 17{,}60\right] = -\ 25{,}90$$

$$\left[-\ 13{,}60\right] - \left[-\ 4{,}40\right] = \left[-\ 13{,}60\right] + \left[+\ 4{,}40\right] = -\left[13{,}60 - 4{,}40\right] = -\ 9{,}20$$

Übungen:

$$\left[+ \frac{10}{5} \right] - \left[+ \frac{3}{8} \right] =$$

$$\left[+ \frac{8}{9} \right] - \left[- \frac{6}{4} \right] =$$

$$\left[- \frac{8}{4} \right] - \left[+ \frac{3}{10} \right] =$$

$$\left[- \frac{5}{4} \right] - \left[- \frac{1}{2} \right] =$$

Lösungen:

$$\left[+\frac{10}{5}\right] - \left[+\frac{3}{8}\right] = \left[+\frac{10}{5}\right] + \left[-\frac{3}{8}\right] = +\left[\frac{10}{5} - \frac{3}{8}\right] = +\frac{80 - 15}{40} = +\frac{65}{40} = +\frac{13}{8}$$

$$\left[+\frac{8}{9}\right] - \left[-\frac{6}{4}\right] = \left[+\frac{8}{9}\right] + \left[+\frac{6}{4}\right] = +\left[\frac{8}{9} + \frac{6}{4}\right] = +\frac{32 + 54}{36} = +\frac{86}{36} = +\frac{43}{18}$$

$$\left[-\frac{8}{4}\right] - \left[+\frac{3}{10}\right] = \left[-\frac{8}{4}\right] + \left[-\frac{3}{10}\right] = -\left[\frac{8}{4} + \frac{3}{10}\right] = -\frac{40 + 6}{20} = -\frac{46}{20} = -\frac{23}{10}$$

$$\left[-\frac{5}{4}\right] - \left[-\frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{5}{4}\right] + \left[+\frac{1}{2}\right] = -\left[\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{5 - 2}{4} = -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

1.2.4 Multiplikation[15]

Zwei rationale Zahlen multipliziert man, indem man ihre Beträge multipliziert und das entsprechende Vorzeichen setzt, siehe Vorzeichentabelle:

·	+	-
+	+	-
-	-	+

$$\left[+\ 2{,}00 \right] \cdot \left[+\ 5{,}00 \right] = +\ 10{,}0000$$

$$\left[+\ 2{,}00 \right] \cdot \left[-\ 5{,}00 \right] = -\ 10{,}0000$$

$$\left[-\ 2{,}00 \right] \cdot \left[+\ 5{,}00 \right] = -\ 10{,}0000$$

$$\left[-\ 2{,}00 \right] \cdot \left[-\ 5{,}00 \right] = +\ 10{,}0000$$

[15] Sie können sich mit der Datei „Rechnen mit rationalen Zahlen.xlsx“ Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

Zwei rationale Zahlen multipliziert man, indem man ihre Beträge multipliziert und das entsprechende Vorzeichen setzt, siehe Vorzeichentabelle:

·	+	-
+	+	-
-	-	+

$$\left[+\frac{1}{2}\right]\cdot\left[+\frac{5}{3}\right]=+\frac{5}{6}$$

$$\left[+\frac{1}{2}\right]\cdot\left[-\frac{5}{3}\right]=-\frac{5}{6}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right]\cdot\left[+\frac{5}{3}\right]=-\frac{5}{6}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right]\cdot\left[-\frac{5}{3}\right]=+\frac{5}{6}$$

Übungen:

$$\left[+\ 125{,}00 \right] \cdot \left[+\ 129{,}00 \right] =$$

$$\left[+\ 196{,}00 \right] \cdot \left[-\ 199{,}00 \right] =$$

$$\left[-\ 2{,}00 \right] \cdot \left[+\ 153{,}00 \right] =$$

$$\left[-\ 80{,}00 \right] \cdot \left[-\ 95{,}00 \right] =$$

Lösungen:

$$\left[\,+\ 125{,}00\,\right] \cdot \left[\,+\ 129{,}00\,\right] = +\ 16.125{,}0000$$

$$\left[\,+\ 196{,}00\,\right] \cdot \left[\,-\ 199{,}00\,\right] = -\ 39.004{,}0000$$

$$\left[\,-\ 2{,}00\,\right] \cdot \left[\,+\ 153{,}00\,\right] = -\ 306{,}0000$$

$$\left[\,-\ 80{,}00\,\right] \cdot \left[\,-\ 95{,}00\,\right] = +\ 7.600{,}0000$$

Übungen:

$$\left[+\frac{3}{8}\right]\cdot\left[+\frac{10}{2}\right]=$$

$$\left[+\frac{5}{7}\right]\cdot\left[-\frac{7}{4}\right]=$$

$$\left[-\frac{6}{4}\right]\cdot\left[+\frac{5}{1}\right]=$$

$$\left[-\frac{9}{5}\right]\cdot\left[-\frac{9}{10}\right]=$$

Lösungen:

$$\left[+\frac{3}{8}\right] \cdot \left[+\frac{10}{2}\right] = +\frac{30}{16} = +\frac{15}{8}$$

$$\left[+\frac{5}{7}\right] \cdot \left[-\frac{7}{4}\right] = -\frac{35}{28} = -\frac{5}{4}$$

$$\left[-\frac{6}{4}\right] \cdot \left[+\frac{5}{1}\right] = -\frac{30}{4} = -\frac{15}{2}$$

$$\left[-\frac{9}{5}\right] \cdot \left[-\frac{9}{10}\right] = +\frac{81}{50} = +\frac{81}{50}$$

1.2.5 Division[16]

Zwei rationale Zahlen dividiert man, indem man ihre Beträge dividiert und das entsprechende Vorzeichen setzt, siehe Vorzeichentabelle:

:	+	-
+	+	-
-	-	+

$$\left[+\ 2{,}00\right] : \left[+\ 5{,}00\right] \cong +\ 0{,}4000$$

$$\left[+\ 2{,}00\right] : \left[-\ 5{,}00\right] \cong -\ 0{,}4000$$

$$\left[-\ 2{,}00\right] : \left[+\ 5{,}00\right] \cong -\ 0{,}4000$$

$$\left[-\ 2{,}00\right] : \left[-\ 5{,}00\right] \cong +\ 0{,}4000$$

[16] Sie können sich mit der Datei „Rechnen mit rationalen Zahlen.xlsx“ Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

Zwei rationale Zahlen dividiert man, indem man ihre Beträge dividiert und das entsprechende Vorzeichen setzt, siehe Vorzeichentabelle:

:	+	-
+	+	-
-	-	+

$$\left[+\frac{1}{2}\right] : \left[+\frac{5}{3}\right] = +\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\right] = +\frac{3}{10}$$

$$\left[+\frac{1}{2}\right] : \left[-\frac{5}{3}\right] = -\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\right] = -\frac{3}{10}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right] : \left[+\frac{5}{3}\right] = -\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\right] = -\frac{3}{10}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right] : \left[-\frac{5}{3}\right] = +\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\right] = +\frac{3}{10}$$

Übungen[17,18]:

$$\begin{bmatrix} + & 79{,}00 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} + & 199{,}00 \end{bmatrix} \cong$$

$$\begin{bmatrix} + & 81{,}00 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} - & 46{,}00 \end{bmatrix} \cong$$

$$\begin{bmatrix} - & 86{,}00 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} + & 105{,}00 \end{bmatrix} \cong$$

$$\begin{bmatrix} - & 108{,}00 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} - & 62{,}00 \end{bmatrix} \cong$$

[17] Siehe auch: https://de.wikipedia.org/wiki/Schriftliche_Division
[18] Sie können die Datei „Dezimalbruchentwicklung.xlsx“ zu Hilfe nehmen.

Lösungen:

$$\left[\ +\ 79{,}00\ \right] : \left[\ +\ 199{,}00\ \right] \cong +\ 0{,}3970$$

$$\left[\ +\ 81{,}00\ \right] : \left[\ -\ 46{,}00\ \right] \cong -\ 1{,}7609$$

$$\left[\ -\ 86{,}00\ \right] : \left[\ +\ 105{,}00\ \right] \cong -\ 0{,}8190$$

$$\left[\ -\ 108{,}00\ \right] : \left[\ -\ 62{,}00\ \right] \cong +\ 1{,}7419$$

Übungen:

$$\left[+\frac{4}{5}\right] : \left[+\frac{6}{1}\right] =$$

$$\left[+\frac{2}{10}\right] : \left[-\frac{7}{3}\right] =$$

$$\left[-\frac{5}{3}\right] : \left[+\frac{2}{1}\right] =$$

$$\left[-\frac{8}{6}\right] : \left[-\frac{4}{8}\right] =$$

Lösungen:

$$\left[+\frac{4}{5}\right] : \left[+\frac{6}{1}\right] = +\left[\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6}\right] = +\frac{4}{30} = +\frac{2}{15}$$

$$\left[+\frac{2}{10}\right] : \left[-\frac{7}{3}\right] = -\left[\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{7}\right] = -\frac{6}{70} = -\frac{3}{35}$$

$$\left[-\frac{5}{3}\right] : \left[+\frac{2}{1}\right] = -\left[\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}\right] = -\frac{5}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\left[-\frac{8}{6}\right] : \left[-\frac{4}{8}\right] = +\left[\frac{8}{6} \cdot \frac{8}{4}\right] = +\frac{64}{24} = +\frac{8}{3}$$

1.2.6 Arbeitsbögen zum Rechnen mit rationalen Zahlen

Mit der Datei „Übungsaufgaben Rechnen mit rationalen Zahlen.xlsx“ können Sie sich nachfolgende Arbeitsbögen (mit Zufallsvariablen) generieren.

1.	(	3,7	)	+	(	-0,6	)	=	
2.	(	-3,1	)	+	(	-5,4	)	=	
3.	(	-6,1	)	-	(	5,5	)	=	
4.	(	3,5	)	-	(	3,5	)	=	
5.	(	-6,7	)	-	(	-5,7	)	=	
6.	(	-3,5	)	+	(	-9,5	)	=	
7.	(	-0,2	)	-	(	9,2	)	=	
8.	(	-5,7	)	+	(	-9,4	)	=	
9.	(	2	)	+	(	3,1	)	=	
10.	(	-6,9	)	+	(	5,2	)	=	
11.	(	-0,9	)	-	(	-5,8	)	=	
12.	(	6	)	+	(	-0,1	)	=	
13.	(	-0,4	)	+	(	-0,4	)	=	
14.	(	-2,7	)	+	(	2,2	)	=	
15.	(	-1,1	)	+	(	8,5	)	=	
16.	(	2,2	)	+	(	-8,1	)	=	
17.	(	4,8	)	+	(	-3,1	)	=	
18.	(	-3,7	)	+	(	8,3	)	=	
19.	(	0,2	)	-	(	5,2	)	=	
20.	(	-0,4	)	-	(	-8,9	)	=	

Lösungen (ggf. wegfalten):

1.	(	3,7	)	+	(	-0,6	)	=	3,1
2.	(	-3,1	)	+	(	-5,4	)	=	-8,5
3.	(	-6,1	)	-	(	5,5	)	=	-11,6
4.	(	3,5	)	-	(	3,5	)	=	0
5.	(	-6,7	)	-	(	-5,7	)	=	-1
6.	(	-3,5	)	+	(	-9,5	)	=	-13
7.	(	-0,2	)	-	(	9,2	)	=	-9,4
8.	(	-5,7	)	+	(	-9,4	)	=	-15,1
9.	(	2	)	+	(	3,1	)	=	5,1
10.	(	-6,9	)	+	(	5,2	)	=	-1,7
11.	(	-0,9	)	-	(	-5,8	)	=	4,9
12.	(	6	)	+	(	-0,1	)	=	5,9
13.	(	-0,4	)	+	(	-0,4	)	=	-0,8
14.	(	-2,7	)	+	(	2,2	)	=	-0,5
15.	(	-1,1	)	+	(	8,5	)	=	7,4
16.	(	2,2	)	+	(	-8,1	)	=	-5,9
17.	(	4,8	)	+	(	-3,1	)	=	1,7
18.	(	-3,7	)	+	(	8,3	)	=	4,6
19.	(	0,2	)	-	(	5,2	)	=	-5
20.	(	-0,4	)	-	(	-8,9	)	=	8,5

Addition und Subtraktion rationaler Zahlen (Brüche)

1. $\frac{-1}{15} + \frac{-2}{15} =$

2. $\frac{-2}{6} - \frac{-6}{14} =$

3. $\frac{-4}{9} - \frac{-12}{27} =$

4. $\frac{-5}{5} - \frac{17}{18} =$

5. $\frac{6}{6} + \frac{16}{14} =$

6. $\frac{13}{24} - \frac{19}{13} =$

7. $\frac{4}{6} + \frac{-5}{15} =$

8. $\frac{8}{18} - \frac{10}{6} =$

9. $\frac{-13}{9} - \frac{-1}{22} =$

10. $\frac{-22}{2} - \frac{-28}{15} =$

Lösungen (ggf. wegfalten):

1. $\frac{-1}{15} + \frac{-2}{15} = \frac{-1}{15} + \frac{-2}{15} =$ - 1/5

2. $\frac{-2}{6} - \frac{-6}{14} = \frac{-14}{42} - \frac{-18}{42} =$ 2/21

3. $\frac{-4}{9} - \frac{-12}{27} = \frac{-12}{27} - \frac{-12}{27} =$ 0

4. $\frac{-5}{5} - \frac{17}{18} = \frac{-90}{90} - \frac{85}{90} =$ -1 17/18

5. $\frac{6}{6} + \frac{16}{14} = \frac{42}{42} + \frac{48}{42} =$ 2 1/7

6. $\frac{13}{24} - \frac{19}{13} = \frac{169}{312} - \frac{456}{312} =$ - 287/312

7. $\frac{4}{6} + \frac{-5}{15} = \frac{20}{30} + \frac{-10}{30} =$ 1/3

8. $\frac{8}{18} - \frac{10}{6} = \frac{8}{18} - \frac{30}{18} =$ -1 2/9

9. $\frac{-13}{9} - \frac{-1}{22} = \frac{-286}{198} - \frac{-9}{198} =$ -1 79/198

10. $\frac{-22}{2} - \frac{-28}{15} = \frac{-330}{30} - \frac{-56}{30} =$ -9 2/15

1.	(	4	)	·	(	3	)	=
2.	(	-54	)	:	(	9	)	=
3.	(	9	)	·	(	4	)	=
4.	(	5	)	·	(	-2	)	=
5.	(	35	)	:	(	5	)	=
6.	(	24	)	:	(	-8	)	=
7.	(	3	)	:	(	-3	)	=
8.	(	7	)	·	(	4	)	=
9.	(	10	)	:	(	-2	)	=
10.	(	6	)	:	(	-2	)	=
11.	(	-40	)	:	(	-5	)	=
12.	(	8	)	:	(	1	)	=
13.	(	-24	)	:	(	4	)	=
14.	(	-27	)	:	(	-9	)	=
15.	(	28	)	:	(	4	)	=
16.	(	3	)	·	(	-3	)	=
17.	(	3	)	·	(	4	)	=
18.	(	11	)	·	(	-1	)	=
19.	(	11	)	·	(	9	)	=
20.	(	40	)	:	(	-5	)	=

Lösungen (ggf. wegfalten):

1.	(	4	)	·	(	3	)	=	12
2.	(	-54	)	:	(	9	)	=	-6
3.	(	9	)	·	(	4	)	=	36
4.	(	5	)	·	(	-2	)	=	-10
5.	(	35	)	:	(	5	)	=	7
6.	(	24	)	:	(	-8	)	=	-3
7.	(	3	)	:	(	-3	)	=	-1
8.	(	7	)	·	(	4	)	=	28
9.	(	10	)	:	(	-2	)	=	-5
10.	(	6	)	:	(	-2	)	=	-3
11.	(	-40	)	:	(	-5	)	=	8
12.	(	8	)	:	(	1	)	=	8
13.	(	-24	)	:	(	4	)	=	-6
14.	(	-27	)	:	(	-9	)	=	3
15.	(	28	)	:	(	4	)	=	7
16.	(	3	)	·	(	-3	)	=	-9
17.	(	3	)	·	(	4	)	=	12
18.	(	11	)	·	(	-1	)	=	-11
19.	(	11	)	·	(	9	)	=	99
20.	(	40	)	:	(	-5	)	=	-8

Multiplikation und Division rationaler Zahlen (Brüche)

1. $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{-15} =$

2. $\frac{-13}{-35} : \frac{-18}{-7} =$

3. $\frac{-13}{2} \cdot \frac{2}{-221} =$

4. $\frac{-15}{-4} \cdot \frac{-14}{15} =$

5. $\frac{10}{2} \cdot \frac{-10}{40} =$

6. $\frac{9}{36} : \frac{8}{-18} =$

7. $\frac{-6}{80} : \frac{5}{-10} =$

8. $\frac{-14}{-6} : \frac{-9}{-6} =$

9. $\frac{-20}{7} \cdot \frac{-3}{-140} =$

10. $\frac{-13}{-2} \cdot \frac{-20}{208} =$

Lösungen (ggf. wegfalten):

1. $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{-15} = -\ 1/9$

2. $\frac{-13}{-35} : \frac{-18}{-7} = \frac{-13}{-35} \cdot \frac{-7}{-18} = 13/90$

3. $\frac{-13}{2} \cdot \frac{2}{-221} = 1/17$

4. $\frac{-15}{-4} \cdot \frac{-14}{15} = -3\ 1/2$

5. $\frac{10}{2} \cdot \frac{-10}{40} = -1\ 1/4$

6. $\frac{9}{36} : \frac{8}{-18} = \frac{9}{36} \cdot \frac{-18}{8} = -\ 9/16$

7. $\frac{-6}{80} : \frac{5}{-10} = \frac{-6}{80} \cdot \frac{-10}{5} = 3/20$

8. $\frac{-14}{-6} : \frac{-9}{-6} = \frac{-14}{-6} \cdot \frac{-6}{-9} = 1\ 5/9$

9. $\frac{-20}{7} \cdot \frac{-3}{-140} = -\ 3/49$

10. $\frac{-13}{-2} \cdot \frac{-20}{208} = -\ 5/8$

1.3 Variablen und Terme

Eine *Variable* ist ein Zeichen, das einen Platz freihält. Hierfür können beliebige Ausdrücke einer bestimmten Art eingesetzt werden, die aus einer vorgegebenen Menge stammen.[19]

Ein *Term* ist ein sinnvoller Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole für mathematische Verknüpfungen und Klammern enthalten kann.[20] - Ein Term enthält jedoch keine Relationszeichen (=, <, >, …).

Beispiele:

$3\,x + 5$; $a : 7$; 6; $3y^2 - 7a$

Gegenbeispiele:

$: 5$; $a : 7 > 0$; $6 -$; $3y^2 = 7a$

Übungen:

Entscheiden Sie für jedes der folgenden Beispiele, ob es ein Term ist.

a) $7 - (3x - 2)$ b) $5x^2 > 7x$ c) z d) $3{,}8 :$

Lösungen:

a) Term b) kein Term c) Term d) kein Term

[19] Siehe: Raudies, M.: Grundbegriffe der Mathematik, 2017, S. 8 sowie https://de.wikipedia.org/wiki/Variable_(Logik)
[20] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Term

1.3.1 Wert eines Terms / Wertetabelle

Den Wert eines Terms berechnet man, indem man die in ihm enthaltenen Variablen mit Werten belegt. Hierzu empfiehlt sich eine Wertetabelle.

Beispiel:

x	0	2	$3{,}5$	-1
$3x-2$	-2	4	$8{,}5$	-5

Für $x = -1$ ergibt sich für den Term $3x - 2$ also der Wert -5.

Übungen:

Bestimmen Sie für jeden der folgenden Terme den Wert für die in Klammern angegebenen Werte für die Variablen.

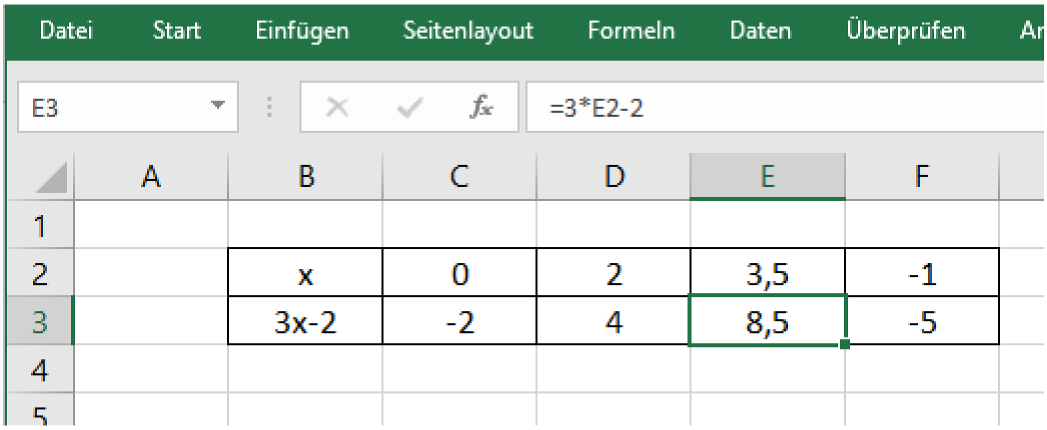
a) 3x : 2 (x = 0) b) 5a – b (a = 3, b = - 5)

c) $z^3 - z^2$ (z = - 1) d) 3abc (a = 2, b = 1, c = 0)

Lösungen:

a) 0 b) 20 c) -2 d) 0

An dieser Stelle empfiehlt sich ein erster kurzer Einstieg in Excel.[21]



Übung:

Öffnen Sie obige Exceldatei (auf Ihrem Smartphone oder Laptop). Verändern Sie die Datei so, dass sie die Lösung einer Übungsaufgabe darstellt.

[21] Siehe: Wert eines Terms berechnen.xlsx

1.3.2 Konvention: Punktrechnung geht vor Strichrechnung

Statt „$(x \cdot y) + x$“ darf man auch „$x \cdot y + x$“ schreiben.

Beispiel: $8 = (6) + 2 = (2 \cdot 3) + 2 = \ 2 \cdot 3 + 2 = 6 + 2 = 8$

Statt „$(x + y) \cdot x$“ darf man jedoch *nicht* „$x + y \cdot x$“ schreiben.

Beispiel: $36 = (9) \cdot 4 = (4 + 5) \cdot 4 \neq \ 4 + 5 \cdot 4 = 4 + 20 = 24$

1.3.3 Vorsicht bei Klammereinsparungen

Bei der Addition und Multiplikation können Klammern weggelassen werden. Nach dem Assoziativgesetz (siehe S. 49) gilt:
$(x + y) + z = x + y + z = x + (y + z)$ sowie $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Problematischer ist es bei der Subtraktion und Division:

Subtraktion

Statt „$(x - y) - z$“ darf man auch „$x - y - z$“ schreiben.

Beispiel: $2 = (4) - 2 = (9 - 5) - 2 = \ 9 - 5 - 2 = 4 - 2 = 2$

Statt „$x - (y - z)$“ darf man jedoch *nicht* „$x - y - z$“ schreiben.

Beispiel: $6 = 9 - (3) = 9 - (5 - 2) \neq \ 9 - 5 - 2 = 4 - 2 = 2$

(Es gilt: $x - (y - z) = x - y + z$, da man eine Minusklammer auflöst, indem man die Vorzeichen der einzelnen Summanden umdreht, siehe S. 52)

Division

Statt „$(x : y) : z$“ darf man auch „$x : y : z$“ schreiben.

Beispiel: $1 = (2) : 2 = (20 : 10) : 2 = \ 20 : 10 : 2 = 2 : 2 = 1$

Statt „$x : (y : z)$“ darf man jedoch *nicht* „$x : y : z$" schreiben.

Beispiel: $4 = 20 : 5 = 20 : (10 : 2) \neq \ 20 : 10 : 2 = 2 : 2 = 1$

(Bruchrechnung: $20 : (10 : 2) = \frac{20}{\left(\frac{10}{2}\right)} = 20 \cdot \frac{2}{10} = \frac{40}{10} = 4$)

1.4 Termumformungen

1.4.1 Einfache Umformungen[22]

Beispiel (" - ... " durch " + (- ...) " ersetzen): $-a = +(-a)$

Wähle: $a = 14$

$$-14 = +(-14)$$
$$-14 = -14$$

Beispiel (Kommutativgesetz der Addition): $a + b = b + a$

Wähle: $a = 10$, $b = 12$

$$10 + 12 = 12 + 10$$
$$22 = 22$$

Beispiel (KEIN Kommutativgesetz der Subtraktion): $a - b \neq b - a$

Wähle: $a = 12$, $b = 11$

$$12 - 11 \neq 11 - 12$$
$$1 \neq -1$$

Beispiel (Subtraktion in Addition umwandeln): $a - b = a + (-b) = -b + a$

Wähle: $a = 11$, $b = 19$

$$11 - 19 = 11 + (-19) = -19 + 11$$
$$-8 = -8 = -8$$

[22] Siehe: Termumformungen.xlsx

1.4.2 Kommutativ-, Assoziativ und Distributivgesetz

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

der Addition: $a + b = b + a$

Beispiel: $5 + 4 = 4 + 5$

$9 = 9$

der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

Beispiel: $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$

$20 = 20$

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Beispiel: $(5 + 4) + 3 = 5 + (4 + 3)$

$9 + 3 = 5 + 7$

$12 = 12$

der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Beispiel: $(5 \cdot 4) \cdot 3 = 5 \cdot (4 \cdot 3)$

$20 \cdot 3 = 5 \cdot 12$

$60 = 60$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiel: $5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3$

$5 \cdot 7 = 20 + 15$

$35 = 35$

Übung[23]: Wenden Sie die Gesetze mit folgenden Zahlen an:

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)			
der Addition:	$a + b$	$=$	$b + a$
Beispiel:	$4 + 19$	$=$	
der Multiplikation:	$a \cdot b$	$=$	$b \cdot a$
Beispiel:	$3 \cdot 16$	$=$	
Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)			
der Addition:	$(a + b) + c$	$=$	$a + (b + c)$
Beispiel:	$(3 + 11) + 10$	$=$	
		$=$	
		$=$	
der Multiplikation:	$(a \cdot b) \cdot c$	$=$	$a \cdot (b \cdot c)$
Beispiel:	$(5 \cdot 20) \cdot 6$	$=$	
		$=$	
		$=$	
Distributivgesetz (Verteilungsgesetz):	$a \cdot (b + c)$	$=$	$a \cdot b + a \cdot c$
Beispiel:	$8 \cdot (9 + 7)$	$=$	
		$=$	
		$=$	

[23] Siehe Rechengesetze.xlsx

Lösung:

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)			
der Addition:	$a + b$	$=$	$b + a$
Beispiel:	$4 + 19$	$=$	$19 + 4$
	23		23
der Multiplikation:	$a \cdot b$	$=$	$b \cdot a$
Beispiel:	$3 \cdot 16$	$=$	$16 \cdot 3$
	48		48
Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)			
der Addition:	$(a + b) + c$	$=$	$a + (b + c)$
Beispiel:	$(3 + 11) + 10$	$=$	$3 + (11 + 10)$
	$14 + 10$	$=$	$3 + 21$
	24	$=$	24
der Multiplikation:	$(a \cdot b) \cdot c$	$=$	$a \cdot (b \cdot c)$
Beispiel:	$(5 \cdot 20) \cdot 6$	$=$	$5 \cdot (20 \cdot 6)$
	$100 \cdot 6$	$=$	$5 \cdot 120$
	600	$=$	600
Distributivgesetz (Verteilungsgesetz):	$a \cdot (b + c)$	$=$	$a \cdot b + a \cdot c$
Beispiel:	$8 \cdot (9 + 7)$	$=$	$8 \cdot 9 + 8 \cdot 7$
	$8 \cdot 16$	$=$	$72 + 56$
	128	$=$	128

1.4.3 Auflösen einer Minusklammer[24]

"Beim Subtrahieren eines Summentermes kann man die Klammern weglassen, muss aber dann die Summanden einzeln subtrahieren." (Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, S. 41) - Man löst also eine Minusklammer auf, indem man das Minuszeichen vor der Klammer und die Klammer weglässt, dafür aber die Vorzeichen der einzelnen Summanden wechselt.

1. Fall: $a - (b + c) = a - b - c$

Wähle: $a = 20$, $b = 4$, $c = 20$

$$20 - (4 + 20) = 20 - 4 - 20$$
$$20 - 24 = 16 - 20$$
$$-4 = -4$$

2. Fall: $a - (b - c) = a - b - (-c) = a - b + c$

Wähle: $a = 13$, $b = 17$, $c = 9$

$$13 - (17 - 9) = 13 - 17 - (-9) = 13 - 17 + 9$$
$$13 - (8) = -4 + 9 = -4 + 9$$
$$5 = 5 = 5$$

3. Fall: $a - (-b + c) = a - (-b) - c = a + b - c$

Wähle: $a = 7$, $b = 11$, $c = 15$

$$7 - (-11 + 15) = 7 - (-11) - 15 = 7 + 11 - 15$$
$$7 - (4) = 18 - 15 = 18 - 15$$
$$3 = 3 = 3$$

4. Fall: $a - (-b - c) = a - (-b) - (-c) = a + b + c$

Wähle: $a = 6$, $b = 8$, $c = 13$

$$6 - (-8 - 13) = 6 - (-8) - (-13) = 6 + 8 + 13$$
$$6 - (-21) = 14 + 13 = 14 + 13$$
$$27 = 27 = 27$$

---

[24] Siehe: Termumformungen.xlsx

Übung:

"Beim Subtrahieren eines Summentermes kann man die Klammern weglassen, muss aber dann die Summanden einzeln subtrahieren." (Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, S. 41) - Man löst also eine Minusklammer auf, indem man das Minuszeichen vor der Klammer und die Klammer weglässt, dafür aber die Vorzeichen der einzelnen Summanden wechselt.

1. Fall: $a - (b + c) =$

Wähle: $a = 6$, $b = 12$, $c = 13$ $6 - (12 + 13) =$

2. Fall: $a - (b - c) =$

Wähle: $a = 2$, $b = 20$, $c = 7$ $2 - (20 - 7) =$

3. Fall: $a - (-b + c) =$

Wähle: $a = 8$, $b = 3$, $c = 13$ $8 - (-3 + 13) =$

4. Fall: $a - (-b - c) =$

Wähle: $a = 12$, $b = 17$, $c = 14$ $12 - (-17 - 14) =$

Lösung:

Minusklammer auflösen

"Beim Subtrahieren eines Summentermes kann man die Klammern weglassen, muss aber dann die Summanden einzeln subtrahieren." (Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, S. 41) - Man löst also eine Minusklammer auf, indem man das Minuszeichen vor der Klammer und die Klammer weglässt, dafür aber die Vorzeichen der einzelnen Summanden wechselt.

1. Fall:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Wähle: $a = 6$, $b = 12$, $c = 13$

$$6 - (12 + 13) = 6 - 12 - 13$$
$$6 - 25 = -6 - 13$$
$$-19 = -19$$

2. Fall:

$$a - (b - c) = a - b - (- c) = a - b + c$$

Wähle: $a = 2$, $b = 20$, $c = 7$

$$2 - (20 - 7) = 2 - 20 - (- 7) = 2 - 20 + 7$$
$$2 - (13) = -18 + 7 = -18 + 7$$
$$-11 = -11 = -11$$

3. Fall:

$$a - (- b + c) = a - (- b) - c = a + b - c$$

Wähle: $a = 8$, $b = 3$, $c = 13$

$$8 - (- 3 + 13) = 8 - (- 3) - 13 = 8 + 3 - 13$$
$$8 - (10) = 11 - 13 = 11 - 13$$
$$-2 = -2 = -2$$

4. Fall:

$$a - (- b - c) = a - (- b) - (- c) = a + b + c$$

Wähle: $a = 12$, $b = 17$, $c = 14$

$$12 - (- 17 - 14) = 12 - (- 17) - (- 14) = 12 + 17 + 14$$
$$12 - (-31) = 29 + 14 = 29 + 14$$
$$43 = 43 = 43$$

1.4.4 Zusammenfassen gleichartiger Summanden

a) Variablen[25]

Beispiel (nur positive Zahlen): $a \cdot x + b \cdot x = (a + b) \cdot x$

Wähle: $a = 2$, $b = 3$, $2 \cdot x + 3 \cdot x = (2 + 3) \cdot x$

$= 5 \cdot x$

Wähle: $x = 8$ $2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 5 \cdot 8$

$16 + 24 = 40$

Beispiel (rationale Zahlen): $a \cdot x + b \cdot x = (a + b) \cdot x$

Wähle: $a = -5$, $b = -2$, $-5 \cdot x + (-2) \cdot x = (-5 + (-2)) \cdot x$

$= -7 \cdot x$

Wähle: $x = -5$ $-5 \cdot (-5) + (-2) \cdot (-5) = -7 \cdot (-5)$

$25 + (10) = 35$

[25] Siehe: Termumformungen.xlsx

Übung:

Beispiel (nur positive Zahlen): $a \cdot x + b \cdot x =$

Wähle: $a = 6$, $b = 3$, $6 \cdot x + 3 \cdot x =$

Wähle: $x = 7$

Beispiel (rationale Zahlen): $a \cdot x + b \cdot x =$

Wähle: $a = 2$, $b = -3$, $2 \cdot x + (-3) \cdot x =$

Wähle: $x = -6$

Lösung:

Beispiel (nur positive Zahlen): $a \cdot x + b \cdot x = (a + b) \cdot x$

Wähle: $a = 6$, $b = 3$, $6 \cdot x + 3 \cdot x = (6 + 3) \cdot x$

$= 9 \cdot x$

Wähle: $x = 7$ $6 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 9 \cdot 7$

$42 + 21 = 63$

Beispiel (rationale Zahlen): $a \cdot x + b \cdot x = (a + b) \cdot x$

Wähle: $a = 2$, $b = -3$, $2 \cdot x + (-3) \cdot x = (2 + (-3)) \cdot x$

$= -1 \cdot x$

Wähle: $x = -6$ $2 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-6) = -1 \cdot (-6)$

$-12 + (18) = 6$

b) Komplexere Summanden[26]

$$a \cdot x^2 - b \cdot y \cdot x + c \cdot x + d \cdot x - e \cdot x^2 + f \cdot x \cdot y + g \cdot x^2 = (a - e + g) \cdot x^2 + (c + d) \cdot x + (-b + f) \cdot x \cdot y$$

Wähle : $a = 9$, $b = 3$, $c = 9$, $d = 4$, $e = 9$, $f = 4$, $g = 5$

$$9 \cdot x^2 - 3 \cdot y \cdot x + 9 \cdot x + 4 \cdot x - 9 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 5 \cdot x^2 = (9 - 9 + 5) \cdot x^2 + (9 + 4) \cdot x + (-3 + 4) \cdot x \cdot y$$

$$= 5 \cdot x^2 + 13 \cdot x + 1 \cdot x \cdot y$$

Wähle : $x = 7$, $y = 6$

$$9 \cdot 49 - 3 \cdot 6 \cdot 7 + 9 \cdot 7 + 4 \cdot 7 - 9 \cdot 49 + 4 \cdot 7 \cdot 6 + 5 \cdot 49 = 5 \cdot 49 + 13 \cdot 7 + 1 \cdot 7 \cdot 6$$

$$441 - 126 + 63 + 28 - 441 + 168 + 245 = 245 + 91 + 42$$

$$378 = 378$$

[26] Siehe: Termumformungen.xlsx

Übung:

$$a \cdot x^2 \quad - \quad b \cdot y \cdot x \quad + \quad c \cdot x \quad + \quad d \cdot x \quad - \quad e \cdot x^2 \quad + \quad f \cdot x \cdot y \quad + \quad g \cdot x^2 \quad =$$

Wähle : $a = 2$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 2$, $e = 3$, $f = 4$, $g = 3$

$$2 \cdot x^2 \quad - \quad 2 \cdot y \cdot x \quad + \quad 4 \cdot x \quad + \quad 2 \cdot x \quad - \quad 3 \cdot x^2 \quad + \quad 4 \cdot x \cdot y \quad + \quad 3 \cdot x^2 \quad =$$

Wähle : $x = 3$, $y = 3$

Lösung:

$$a\cdot x^2 - b\cdot y\cdot x + c\cdot x + d\cdot x - e\cdot x^2 + f\cdot x\cdot y + g\cdot x^2 = (a - e + g)\cdot x^2 + (c + d)\cdot x + (-b + f)\cdot x\cdot y$$

Wähle: $a = 2$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 2$, $e = 3$, $f = 4$, $g = 3$

$$2\cdot x^2 - 2\cdot y\cdot x + 4\cdot x + 2\cdot x - 3\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot y + 3\cdot x^2 = (2 - 3 + 3)\cdot x^2 + (4 + 2)\cdot x + (-2 + 4)\cdot x\cdot y$$

$$= 2\cdot x^2 + 6\cdot x + 2\cdot x\cdot y$$

Wähle: $x = 3$, $y = 3$

$$2\cdot 9 - 2\cdot 3\cdot 3 + 4\cdot 3 + 2\cdot 3 - 3\cdot 9 + 4\cdot 3\cdot 3 + 3\cdot 9 = 2\cdot 9 + 6\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 3$$

$$18 - 18 + 12 + 6 - 27 + 36 + 27 = 18 + 18 + 18$$

$$54 = 54$$

1.5 Gleichungen

Zwei Terme, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind, bilden eine *Gleichung*.[27]

Die Lösungsmenge der Gleichung ist die Menge an Elementen, die die Gleichung in eine wahre Aussage überführt.

Hinweis: In späteren Kapiteln werden die Begriffe *Aussage* (S. 67), *Aussageform*, *Lösungsmenge einer Aussageform* (S. 68), *Menge* (S. 88) und *Relation* (S. 110) näher erläutert.

Beispiel:

$5 \cdot x$	ist ein Term.
15	ist ein Term.
$5 \cdot x = 15$	ist eine Gleichung, da zwei Terme durch das *Relation*szeichen „=" verbunden worden sind.
$\mathbb{L} = \{3\}$	ist die Menge, die alle Elemente enthält, die die Gleichung in eine wahre Aussage überführt.

1.5.1 Äquivalenzumformungen von Gleichungen

Gleichungen heißen zueinander *äquivalent*, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen.

Bei einer *Äquivalenzumformung*[28] einer Gleichung bleibt ihre Lösungsmenge unverändert.

Es gibt folgende Äquivalenzumformungen, welche in der Schule oft mit dem Waage-Modell[29] erläutert werden:

a) Additions- und Subtraktionsregel[30]

Addiert oder subtrahiert man auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl, so ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht.

[27] Siehe auch: https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichung
[28] Siehe auch: https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84quivalenzumformung
[29] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/L%C3%B6sen_von_Gleichungen#Umformung_von_Gleichungen
[30] Aus: Elemente 7, 2006, S. 244

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcll} & 5\cdot x & = & 15 & \mid +5 \\ \Leftrightarrow & 5\cdot x+5 & = & 15+5 & \mid -2 \\ \Leftrightarrow & 5\cdot x+3 & = & 20-2 & \end{array}$$

b) Multiplikations- und Divisionsregel

Multipliziert (dividiert) man beide Seiten einer Gleichung mit derselben (durch dieselbe) Zahl ungleich 0, so ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht.

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcll} & 5\cdot x & = & 15 & \mid \cdot 3 \\ \Leftrightarrow & 5\cdot x\cdot 3 & = & 15\cdot 3 & \\ \Leftrightarrow & 15\cdot x & = & 45 & \mid :5 \\ \Leftrightarrow & 3\cdot x & = & 9 & \end{array}$$

Hinweis: Das „⇔“-Zeichen wird auf S. 77 näher erläutert.

c) Wurzelziehen

Beispiel:

$$\begin{array}{llrcll} (1) & & x^2 & = & 4 & \mid \sqrt[2]{} \\ (2) & \Leftrightarrow & \sqrt[2]{x^2} = |x| & = & \sqrt[2]{4} = 2 & \\ (3) & \Leftrightarrow & x_{1,2} & = & \pm\sqrt{4} = \pm 2 & \\ (4) & \Leftrightarrow & x_1 & = & +\sqrt{4} = +2 & \\ & & \wedge\ x_2 & = & -\sqrt{4} = -2 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge für (1), (2), (3) und (4) ist $\mathbb{L} = \{2, -2\}$.

Hinweis: Das „∧“-Zeichen wird auf S. 73 näher erläutert.

d) *Keine* Äquivalenzumformung: Quadrieren

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcll} (1) & x & = & 2 & \mid (\,)^2 \\ (2) & x^2 & = & 4 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung (1) ist $\mathbb{L} = \{2\}$.
Die Lösungsmenge der Gleichung (2) ist $\mathbb{L} = \{2, -2\}$.

Durch das Quadrieren ist also eine Lösung hinzugekommen. Daher darf man hier kein „ ⇔ “-Zeichen setzen.

1.5.2 Lösen linearer Gleichungen

a) Lineare Gleichungen mit *einer* Variablen

Eine Gleichung mit einer Variablen x heißt *linear*[31], wenn sie durch Umformungen in die Form

$$a \cdot x + b = 0 \qquad (a \neq 0)$$

gebracht werden kann[32], wobei a und b Konstanten[33] sind. a wird als Koeffizient[34] der Lösungsvariablen x und b als absolutes Glied bezeichnet.

Beispiel:
Die Gleichung $5x - 3 + 2x = 3x - 5 - 2$ ist eine *lineare* Gleichung mit einer Unbekannten (Variablen), da sie durch Umformungen

$$\begin{aligned} & 5x - 3 + 2x &=& \; 3x - 5 - 2 & \quad | \text{ Zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow \quad & 7x - 3 &=& \; 3x - 7 & \quad |-3x \\ \Leftrightarrow \quad & 4x - 3 &=& \; -7 & \quad |+7 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x + 4 &=& \; 0 & \end{aligned}$$

in die Form

$$a \cdot x + b = 0$$

gebracht werden kann, wobei $a = 4$ und $b = 4$ sind.

Man löst eine lineare Gleichung mit einer Variablen x, indem man sie äquivalent so umformt, dass auf einer Seite nur noch die Variable x stehen bleibt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 4x + 4 &=& \; 0 & \quad | - 4 \\ & 4x &=& \; -4 & \quad | : 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x &=& \; \frac{-4}{4} & \\ \Leftrightarrow \quad & x &=& \; -1 & \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-1\}$. Das Element der Lösungsmenge ist eine Zahl.

---

[31] Siehe auch: https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Gleichung#Lineare_Gleichungen_mit_einer_Unbekannten
[32] Auch die Form $a \cdot x = b$ wäre möglich, wobei das b dann aber ein anderes wäre.
[33] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Konstante_(Logik)
[34] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Koeffizient#Mathematik

b) Lineare Gleichungen mit *zwei* Variablen

Eine Gleichung mit zwei Variablen x und y heißt *linear*[35], wenn sie durch Umformungen in die Form

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \qquad (a, b \neq 0)$$

gebracht werden kann[36], wobei a, b und c Konstanten sind. a und b werden auch als Koeffizienten der Lösungsvariablen x bzw. y und c als absolutes Glied bezeichnet[37].

Beispiel:

Die Gleichung $y = 3x - 5$ ist eine *lineare* Gleichung mit zwei Unbekannten (Variablen), da sie durch Umformungen

$$\begin{array}{lrcll} & y & = & 3x - 5 & \mid -3x \\ \Leftrightarrow & y - 3x & = & -5 & \mid \text{Kommutativgesetz} \\ \Leftrightarrow & -3x + 1y & = & -5 & \mid +5 \\ \Leftrightarrow & -3x + 1y + 5 & = & 0 & \end{array}$$

in die Form

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

gebracht werden kann, wobei $a = -3$, $b = 1$ und $c = +5$ sind.

Man löst eine lineare Gleichung mit zwei Variablen x und y, indem man sie z.B. so umformt, dass auf einer Seite nur noch die Variable y stehen bleibt.

Die Lösungsmenge besteht dann aus den Paaren x und y, wobei y in Abhängigkeit zu x steht.

Beispiel:
Die Gleichung $y = 3x - 5$ besitzt folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{(x, y) \mid y = 3x - 5\}$$

Ein Element der Lösungsmenge wäre z.B.

$$(x = 1, y = 3 \cdot 1 - 5) = (1, -2)$$

Ein weiteres Element der Lösungsmenge wäre z.B.

$$(x = 2, y = 3 \cdot 2 - 5) = (2, 1)$$

Die Lösungsmenge enthält noch *unendlich viele* weitere Lösungen. Jede Lösung ist ein *geordnetes Paar* (siehe S. 104) zweier Zahlen.

[35] Siehe auch: https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Gleichung#Lineare_Gleichungen_mit_zwei_Unbekannten
[36] Auch die Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ wäre möglich, wobei das c dann aber ein anderes wäre.
[37] Siehe: Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, 2015, S. 53

Hinweise auf nachfolgende Kapitel:

- Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit *zwei* Variablen x und y ist eine Teilmenge des *kartesischen Produkts* (siehe S. 106).

- Eine lineare Gleichung mit *zwei* Variablen x und y der Form
$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$
lässt sich durch die Umformungen
$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y + c &= 0 && |-c \\ a \cdot x + b \cdot y &= -c && |-a \cdot x \\ b \cdot y &= -c - a \cdot x && |: b \neq 0 \\ y &= \frac{-c - a \cdot x}{b} \\ y &= \frac{-c}{b} + \frac{-a}{b} \cdot x \end{aligned}$$
in die Form
$$y = mx + n \qquad \text{(mit } m = \tfrac{-a}{b} \text{ und } n = \tfrac{-c}{b}\text{)}$$
umwandeln und stellt damit eine Funktionsgleichung für *lineare Funktionen* (siehe S. 124) dar.

1.5.3 Lösen quadratischer Gleichungen

Eine Gleichung, die sich in der Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

darstellen lässt, heißt *quadratische* Gleichung. Hierbei werden

$a \cdot x^2$ als quadratisches Glied,
$b \cdot x$ als lineares Glied und
c als absolutes Glied

bezeichnet.

Das Lösen einer quadratischen Gleichung wird auf Seite 145 im Zusammenhang mit der Nullstellenermittlung quadratischer Funktionen behandelt werden.

2 Aussagen

2.1 Aussage

Eine *Aussage* (nach dem Prinzip der Zweiwertigkeit[38]) ist ein sprachliches Gefüge, von dem objektiv feststeht, ob es wahr oder falsch ist.[39]

Eine wahre Aussage nennt man eine Tatsache.

Aussagen werden oft mit A, B, C … oder A_1, A_2, A_3 … bezeichnet.

Beispiel:

A: Ein Elefant ist ein Tier. (wahre Aussage)

B: Ein Hund ist eine Katze. (falsche Aussage)

Gegenbeispiele:

A: Regnet es morgen? (keine Aussage)

B: $3 \cdot a = 6$ (keine Aussage)

Übungen:

Entscheiden Sie für jedes der folgenden Beispiele, ob es eine Aussage ist.

A: Paris ist die Hauptstadt Frankreichs.

B: Ein Würfel hat sechs Ecken.

C: $3 \cdot 4 = 12$

D: Morgen werde ich im Lotto gewinnen.

Lösungen:

A: (wahre) Aussage B: (falsche) Aussage C: (wahre) Aussage D: keine Aussage

[38] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Prinzip_der_Zweiwertigkeit
[39] Nach: Benölken/Gorski/Müller-Phillip: Leitfaden Arithmetik, 2018, S. 8

2.2 Aussageform

Eine *Aussageform* ist „ein Ausdruck, der eine (oder mehrere) freie Variable […] enthält und durch die Belegung aller freien Variablen in eine (wahre oder falsche) Aussage übergeht.“[40]

Die freien Variablen dürfen mit Elementen aus einer Grundmenge zu dieser Aussageform belegt werden.

Die Lösungsmenge der Aussageform ist die Menge an Elementen, die die Aussageform in eine wahre Aussage überführt.[41]

Aussageformen werden oft mit A(x), B(x) … oder $A_1(x)$, $A_2(x)$ … bezeichnet, wobei x Element der Grundmenge G ist ($x \in G$).

Die Lösungsmenge von A(x) wird mit $\mathbb{L}$ bezeichnet, $\mathbb{L} = \{a \in G \mid A(a) \text{ ist wahr}\}$.

Beispiel:

A(x): $5 \cdot x > 20$ mit $x \in \mathbb{N}$ (Die Grundmenge G ist die Menge der natürlichen Zahlen.)

Für $x = 8$ geht A(x) über in die *wahre* Aussage A(8): $5 \cdot 8 > 20$

Für $x = 3$ geht A(x) über in die *falsche* Aussage A(3): $5 \cdot 3 > 20$

Lösungsmenge der Aussageform A(x): $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 4\}$

Übungen:

Geben Sie für die folgenden Aussageformen jeweils ein Beispiel an, dass die Aussageform in eine wahre Aussage und eines, dass die Aussageform in eine falsche Aussage überführt. Geben Sie außerdem jeweils die Lösungsmenge an.

A(x): 3 ist ein Teiler von x, wobei $x \in \mathbb{N}$

B(x): $5\,x + 3 = 20$, wobei $x \in \mathbb{Z}$ (Hinweis: $\mathbb{Z}$ steht für die Menge der ganzen Zahlen.)

[40] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Aussage_(Logik)#Aussageform
[41] Nach: Benölken/Gorski/Müller-Phillip: Leitfaden Arithmetik, 2018, S. 9

Lösungen:

Für x = 12 wird A(x) eine wahre Aussage. A(12): 3 ist ein Teiler von 12.
Für x = 10 wird A(x) eine falsche Aussage. A(10): 3 ist ein Teiler von 10.
$\mathbb{L}_{A(x)} = \{ x \in \mathbb{N} \mid$ Es gibt eine natürliche Zahl a mit $3 \cdot a = x$.$\}$

Für kein x ∈ $\mathbb{Z}$ wird $5 \cdot x + 3 = 20$ eine wahre Aussage.
Für jedes x ∈ $\mathbb{Z}$ wird $5 \cdot x + 3 = 20$ eine falsche Aussage, z.B. $A(1)$: $5 \cdot 1 = 20$
$\mathbb{L}_{B(x)} = \{\ \}$ (Hinweis: { } steht für die leere Menge.)

2.2.1 Bezeichnungshinweis

Oft spricht man in der Mathematik auch von einer „Aussage“, wenn es sich eigentlich um eine „Aussageform“ handelt, siehe hierzu auch https://youtu.be/vy0sGAYEcs8 .

2.3 Allaussage

Sei x ein Element aus einer Menge M und H(x) eine Aussageform. Die Schreibweise

$$\bigwedge_{x \in M} H(x)$$ bedeutet dann „*Für alle* x aus der Menge M gilt H(x).“

Beispiel:

$\bigwedge_{x \in \mathbb{N}} x \cdot 0 = 0$ bedeutet: Für alle natürlichen Zahlen x gilt $x \cdot 0 = 0$.

Übungen:

Schreiben Sie eine wahre und eine falsche Allaussage auf.

Lösungen:

Beispiel für wahre Allaussage: $\bigwedge_{x \in \mathbb{N}} x \cdot 1 = x$

Beispiel für falsche Allaussage: $\bigwedge_{x \in \mathbb{N}} x \cdot 0 = x$

2.4 Existenzaussage

Sei x ein Element aus einer Menge M und H(x) eine Aussageform. Die Schreibweise

$\bigvee\limits_{x \in M} H(x)$ bedeutet dann „*Es* existiert *mindestens* ein x aus der Menge M, für das H(x) gilt.“

Beispiel:

$\bigvee_{x \in \mathbb{N}} 3 \cdot x = 9$ bedeutet Es gibt eine natürliche Zahl x, für die $3 \cdot x = 9$ zu einer wahren Aussage wird.

Übungen:

Schreiben Sie eine wahre und eine falsche Existenzaussage auf.

Lösungen:

Beispiel für wahre Existenzaussage: $\bigvee_{x \in \mathbb{N}} x \cdot 1 = 5$

Beispiel für falsche Existenzaussage: $\bigvee_{x \in \mathbb{N}} x \cdot 0 = 5$

3 Logik (I)[42]

3.1 Vorbemerkung

Das nun folgende Kapitel wirkt auf den ersten Blick vielleicht etwas abstrakt. Es soll jedoch die Grundlagen für das Verständnis der

Mengenrelationen

- Mengengleichheit ($M = N$) (S. 91)
- (Echte) Teilmenge ($M \subset N$ bzw. $M \subseteq N$) (S. 92)
- Gleichmächtigkeit ($M \sim N$) (S. 93)

Mengenoperationen

- Durchschnitt ($A \cap B$) (S. 96)
- Vereinigung ($A \cup B$) (S. 96)
- Differenz ($A \setminus B$) (S. 97)
- Komplement ($\overline{A}$) (S. 97)

sowie der Funktionsweise der *Beweisverfahren*

- direkter Beweis: $((A \Rightarrow C) \land (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (S. 218)
- indirekter Beweis: $\neg(\neg B \land A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (S. 222)
- Beweis durch Kontraposition: $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (S. 226)
- Beweis durch vollständige Induktion

$$\left[H(0) \land \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left[H(n) \Rightarrow H(n+1) \right] \right] \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} H(n) \qquad \text{(S. 259)}$$

legen, welche Sie z.B. zum Beweis von

- Aussagen zur Teilbarkeit (S. 235)

benötigen.

Sie können (je nach Lerntyp) dieses Kapitel vorerst auch nur kurz überfliegen, um dann später an entsprechender Stelle hierher zurückzukehren. Bitte beachten Sie auch die Videos von Prof. Spannagel[43].

[42] „In der Logik verwenden wir die Begriffe ‚Satz', ‚Aussage' und ‚Aussageform' gleichbedeutend und meinen damit eine logische Aussageform;" (Schurz, G.: Logik, 2018, Kapitel 1.5.2)
[43] Siehe: https://youtu.be/fDHippqDhVE

3.2 Verknüpfungen von Aussagen

Verknüpft man Aussagen, entsteht eine neue Aussage. In welchen Fällen diese neue Aussage wahr oder falsch ist, erkennt man durch eine *Wahrheitstafel*[44], in welcher alle Kombinationsmöglichkeiten der einzelnen Wahrheitswerte aufgelistet sind.

Man unterscheidet verschiedene Verknüpfungen.

a) Die Negation (Verneinung)

b) Die Konjunktion (Und-Verknüpfung)

c) Die Alternative (Oder-Verknüpfung)

d) Die Implikation (Wenn-dann-Verknüpfung)

e) Die Äquivalenz (Genau-dann-wenn-Verknüpfung)

a) Negation

Die *Negation* (Zeichen „¬“) ist die Verneinung und bedeutet „nicht“.
Negiert bzw. verneint man eine wahre Aussage, wird diese falsch.
Negiert bzw. verneint man eine falsche Aussage, wird diese wahr.

Die entsprechende Wahrheitstafel sieht folgendermaßen aus:

A	¬A
w	f
f	w

Beispiele:

Aussage: Ein Elefant ist ein Tier. (wahre Aussage)
Verneinung dieser Aussage: Ein Elefant ist kein Tier. (falsche Aussage)

Aussage: Ein Hund ist eine Katze. (falsche Aussage)
Verneinung dieser Aussage: Ein Hund ist keine Katze. (wahre Aussage)

[44] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Wahrheitstabelle

Übungen:

Nennen Sie zwei Beispiele, die verdeutlichen, dass aus einer wahren Aussage durch Negation eine falsche Aussage wird.

Nennen Sie zwei Beispiele, die verdeutlichen, dass aus einer falschen Aussage durch Negation eine wahre Aussage wird.

b) Konjunktion

Die *Konjunktion* (Zeichen: „∧“) ist die Verbindung und bedeutet „und“. Die Konjunktion zweier Aussagen ist nur dann wahr, wenn beide Einzelaussagen wahr sind. Ansonsten ist sie falsch.

Die entsprechende Wahrheitstafel sieht folgendermaßen aus:

A	B	A ∧ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiele:

Aussage A: 2 ist eine gerade Zahl. (wahr)
Aussage B: 3 ist eine ungerade Zahl. (wahr)
Aussage C: 4 ist eine ungerade Zahl. (falsch)
Aussage D: 5 ist eine gerade Zahl. (falsch)

A ∧ B: 2 ist eine gerade Zahl und 3 ist eine ungerade Zahl. (wahr)
A ∧ C: 2 ist eine gerade Zahl und 4 ist eine ungerade Zahl. (falsch)
C ∧ A: 4 ist eine ungerade Zahl und 2 ist eine gerade Zahl. (falsch)
C ∧ D: 4 ist eine ungerade Zahl und 5 ist eine gerade Zahl. (falsch)

Übungen:

Stellen Sie zwei wahre und zwei falsche Aussagen auf.
Verknüpfen Sie jeweils zwei dieser Aussagen durch eine Konjunktion.

Machen Sie sich anhand Ihrer Beispiele die Wahrheitstafel der Konjunktion klar.

c) Alternative

Die *Alternative* (Zeichen: „V“) bedeutet „oder“. (Sie bedeutet nicht „entweder oder“.)

Die Verknüpfung „A oder B“ ist genau dann wahr, wenn einer der drei Fälle eintritt:

- A ist wahr.
- B ist wahr.
- A und B sind beide wahr.

Das bedeutet, dass „A oder B“ nur dann falsch ist, wenn A und B beide falsch sind.

Die entsprechende Wahrheitstafel sieht folgendermaßen aus:

A	B	A V B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiele:

Aussage A: 2 ist eine gerade Zahl. (wahr)
Aussage B: 3 ist eine ungerade Zahl. (wahr)
Aussage C: 4 ist eine ungerade Zahl. (falsch)
Aussage D: 5 ist eine gerade Zahl. (falsch)

A V B: 2 ist eine gerade Zahl oder 3 ist eine ungerade Zahl. (wahr)
A V C: 2 ist eine gerade Zahl oder 4 ist eine ungerade Zahl. (wahr)
C V A: 4 ist eine ungerade Zahl oder 2 ist eine gerade Zahl. (wahr)
C V D: 4 ist eine ungerade Zahl oder 5 ist eine gerade Zahl. (falsch)

Übungen:

Stellen Sie zwei wahre und zwei falsche Aussagen auf.
Verknüpfen Sie jeweils zwei dieser Aussagen durch eine Konjunktion.

Machen Sie sich anhand Ihrer Beispiele die Wahrheitstafel der Konjunktion klar.

d) Implikation

Die *Implikation* (Zeichen: „⇒“) ist die „Einbeziehung“ und bedeutet „wenn …, dann …“ (bzw. „impliziert“).

Die Verknüpfung „wenn A, dann B“ bzw. „A impliziert B“ ist nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie wahr.

Die entsprechende Wahrheitstafel sieht folgendermaßen aus:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wird man den beiden ersten Zeilen intuitiv sofort zustimmen, so verwundern die beiden letzten Zeilen auf den ersten Blick doch ein wenig. Hierzu sei nachfolgendes Beispiel betrachtet. Vorweg eine Vereinbarung: Natürlich gibt es in Wirklichkeit sehr viele Arten von Wetter. Für das Beispiel[45] soll aber gelten: Es gibt entweder schlechtes Wetter oder nicht schlechtes Wetter, also gutes Wetter, damit das Zweiwertigkeitsprinzip erfüllt bleibt.

A: Das Wetter ist schlecht.
B: Man hat einen Schirm dabei.

Die durch die Verknüpfung entstandene Aussage „$A \Rightarrow B$“ lautet dann: „Wenn das Wetter schlecht ist, dann hat man einen Schirm dabei.“

Die zielführende Frage ist nun: Wann in den möglichen vier Fällen wird unserem intuitiven Verständnis nach gelogen bzw. mathematisch formuliert: Wann ist die Aussage falsch? Man betrachte alle möglichen Fälle:

Wetter	Schirm	Wenn Wetter schlecht, dann Schirm dabei?
schlecht	dabei	wahr
schlecht	nicht dabei	falsch
gut	dabei	nicht falsch (also wahr)
gut	nicht dabei	nicht falsch (also wahr)

Antwort: Nur in dem *einen* Fall, in dem das Wetter schlecht ist und man keinen Schirm dabei hat, ist die Aussage „$A \Rightarrow B$“ falsch. (Wenn das Wetter nicht schlecht (also gut) ist, ist es egal, ob man einen Schirm dabei hat. Man hat ja schließlich nur behauptet, dass man einen Schirm dabei hat, *wenn* das Wetter *tatsächlich* schlecht ist.) Und da die Aussage in *allen drei anderen* Fällen nicht falsch ist, muss sie jeweils wahr sein.

[45] Siehe Spannagel: https://youtu.be/-7ecaD19Ixo?t=94

e) Zum Begriff der „logischen Folgerung“ *)

Es sei folgendes Zitat vorangestellt:

„Definition 11.2

Ist A ein Satz[46] von AL[47] und M eine Menge von Sätzen von AL, dann **folgt** der Satz A genau dann **logisch** aus M, wenn sich allein aus der Bedeutung der in diesen Sätzen vorkommenden Junktoren[48] ergibt, dass für alle Bewertungen[49] V gilt: Sind die Sätze von M alle wahr bzgl. V, dann ist auch A wahr bzgl. V.“[50]

Übertragen auf die Vorgehensweise in diesem Skript bedeutet dies, dass man bei der Implikation die Formulierung „Aus M **folgt** A.“ genau dann benutzt, wenn man die Zeile meint, in der „M“, „A“ und „M ⇒ A“ wahr sind:

M	A	M ⇒ A
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Statt „Aus M **folgt** A.“ kann auch „Aus M **schließt** man auf A.“ oder „eine **Schlussfolgerung** von M auf A“ verwendet werden.

[46] Satz: Verknüpfungen von Aussagen
[47] AL: Aussagenlogik
[48] Junktoren: ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔
[49] Bewertung: Zuordnung von Wahrheitsbedingungen
[50] Beckermann, A.: Einführung in die Logik, 2014, Kapitel 11

f) Äquivalenz

Die *Äquivalenz* (Zeichen: „⇔") ist die „Gleichwertigkeit"[51] und bedeutet „ … genau dann, wenn …"

Die Verknüpfung „A genau dann, wenn B" bzw. „A ist äquivalent zu B" ist genau dann wahr, wenn

- A und B beide wahr sind.
- A und B beide falsch sind.

In allen anderen Fällen ist sie falsch.

Die entsprechende Wahrheitstafel sieht folgendermaßen aus:

A	B	A ⇔ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiel:

Aussage A: Die Frau hat ein Kind geboren.
Aussage B: Die Frau ist eine Mutter.
A ⇔ B bedeutet: Genau dann, wenn die Frau ein Kind geboren hat, ist sie eine Mutter.

Die Frau hat ein Kind geboren.	⇔	Die Frau ist eine Mutter.	(äquivalent)
Die Frau hat ein Kind geboren.	⇎	Die Frau ist keine Mutter.	(nicht äquivalent)
Die Frau hat kein Kind geboren.	⇎	Die Frau ist eine Mutter.	(nicht äquivalent)
Die Frau hat kein Kind geboren.	⇔	Die Frau ist keine Mutter.	(äquivalent)

Übung:

Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen A und B äquivalent sind.
A: Ein ebenes n-Eck hat drei Seiten.
B: Ein ebenes n-Eck hat drei Ecken.

[51] Siehe: Raudies, M.: Grundbegriffe der Mathematik, 2017, S. 23

Lösungen:

A und B sind äquivalent, denn sobald ein ebenes n-Eck drei Ecken hat, hat es auch drei Seiten. Hat es dagegen nicht drei Ecken, so hat es auch nicht drei Seiten.
Ein ebenes n-Eck mit drei Ecken und mehr oder weniger als drei Seiten gibt es nicht.
Ein ebenes n-Eck mit drei Seiten und mehr oder weniger als drei Ecken gibt es nicht.

3.3 Übersicht: Wahrheitstafel der klassischen Aussagenverknüpfungen

Alle bisher behandelten Verknüpfungen werden in diesem Screenshot[52] dargestellt:

A	B		¬ A	¬ B		(A ∨ B)	(A ∧ B)	(A ⇒ B)	(A ⇔ B)
w	w		f	f		w	w	w	w
w	f		f	w		w	f	f	f
f	w		w	f		w	f	w	f
f	f		w	w		f	f	w	w

[52] Siehe: Logische Operationen per Wahrheitstafel.xlsx

3.4 Wahrheitstafeln von zusammengesetzten Aussagen *)

Es ist möglich, Wahrheitstafeln von beliebig verknüpften Aussagen zu erstellen, z.B. von der zusammengesetzten Aussage „¬(¬A)“ (doppelte Negation). Man betrachte den Screenshot:

A	(¬ A)	(¬ (¬ A))
w	f	w
f	w	f

Es ist erkennbar, dass

„¬(¬A)“ genau dann wahr ist, wenn A wahr ist und

„¬(¬A)“ genau dann falsch ist, wenn A falsch ist.

Die Aussage „¬(¬A)“ lässt sich nun wiederum erweitern, z.B. zu dieser: „¬(¬A) ⇔ A“.

Man betrachte die zugehörige Wahrheitstafel:

A	(¬ A)	(¬ (¬ A))	(¬ (¬ A) ⇔ A)
w	f	w	w
f	w	f	w

Es ist erkennbar, dass „¬(¬A) ⇔ A“ genau dann wahr ist, wenn „¬(¬A)“ und „A“ die gleichen Wahrheitswerte besitzen, also immer!

3.5 Gleichwertige Aussagen *)

Gleichwertige Aussagen sind Aussagen, die in allen Fällen die gleichen Wahrheitswerte besitzen.

„¬(¬A)“ und „A“ sind also gleichwertige Aussagen.

3.6 Tautologien *)

Tautologien sind allgemeingültige Aussagen. „Der Wahrheitswert einer Tautologie ist bei jeder Belegung stets *wahr*, unabhängig davon, welchen Wahrheitswert die Teilausdrücke dabei annehmen.“[53]

Die Aussage „¬(¬A) ⇔ A“ ist also eine Tautologie.

[53] https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/tautologie/10252

3.7 Zur Implikation (alternative Ersetzung) *)

Den Ausdruck „A ⇒ B“ kann man gleichwertig ersetzen durch „¬A ∨ B“, was durch folgende Wahrheitstafel belegt wird[54]:

A	B	¬ A	(A ⇒ B)	(¬ A ∨ B)	((A ⇒ B) ⇔ (¬ A ∨ B))
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Dies wird beim *indirekten Beweis* (S. 222) eine Rolle spielen.

Beispiel:

A: Die natürliche Zahl n ist Teiler von 6.
B: Die natürliche Zahl n ist Teiler von 12.

A ⇒ B: Wenn die natürliche Zahl n Teiler von 6 ist, dann ist sie auch Teiler von 12.

¬A ∨ B: Die natürliche Zahl n ist nicht Teiler von 6 oder sie ist Teiler von 12.

Übung:

Überprüfen Sie die Fälle n=1, n=4 und n=5. Welche Aussagen sind dann wahr? Welche sind äquivalent?

[54] Siehe: Implikation (alternative Ersetzung).xlsx

Lösung:

n=1:

A: Die natürliche Zahl 1 ist Teiler von 6. (w)
B: Die natürliche Zahl 1 ist Teiler von 12. (w)

$A \Rightarrow B$: Wenn die natürliche Zahl 1 Teiler von 6 ist, dann ist sie auch Teiler von 12. (w)

$\neg A \vee B$: Die natürliche Zahl 1 ist nicht Teiler von 6 oder sie ist Teiler von 12. (w)

Dieser Fall entspricht der 1. Zeile in der Wahrheitstafel.

n=4:

A: Die natürliche Zahl 4 ist Teiler von 6. (f)
B: Die natürliche Zahl 4 ist Teiler von 12. (w)

$A \Rightarrow B$: Wenn die natürliche Zahl 4 Teiler von 6 ist, dann ist sie auch Teiler von 12. (w)

$\neg A \vee B$: Die natürliche Zahl 4 ist nicht Teiler von 6 oder sie ist Teiler von 12. (w)

Dieser Fall entspricht der 3. Zeile in der Wahrheitstafel.

n=5:

A: Die natürliche Zahl 5 ist Teiler von 6. (f)
B: Die natürliche Zahl 5 ist Teiler von 12. (f)

$A \Rightarrow B$: Wenn die natürliche Zahl 5 Teiler von 6 ist, dann ist sie auch Teiler von 12. (w)

$\neg A \vee B$: Die natürliche Zahl 5 ist nicht Teiler von 6 oder sie ist Teiler von 12. (w)

Dieser Fall entspricht der 4. Zeile in der Wahrheitstafel.

Hinweis zur 2. Zeile in der Wahrheitstafel: Es gibt kein n, für das A wahr ist und B falsch.

Die Ausdrücke „$A \Rightarrow B$“ und „$\neg A \vee B$“ sind in allen möglichen Fällen äquivalent.

3.8 Zur Implikation (Kontraposition) *)

Den Ausdruck „$A \Rightarrow B$“ kann man gleichwertig ersetzen durch „$\neg B \Rightarrow \neg A$“, was durch folgende Wahrheitstafel belegt wird:

A	B	¬ A	¬ B	$(A \Rightarrow B)$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$	$((\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B))$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Dies wird beim *Beweis durch Kontraposition* (S. 226) eine Rolle spielen.

Beispiel:

A: Die natürliche Zahl n ist Teiler von 6.
B: Die natürliche Zahl n ist Teiler von 12.

$A \Rightarrow B$: Wenn die natürliche Zahl n Teiler von 6 ist, dann ist sie auch Teiler von 12.

$\neg B \Rightarrow \neg A$: Wenn die natürliche Zahl n kein Teiler von 12 ist, dann ist sie auch kein Teiler von 6.

Übung:

Überprüfen Sie die Fälle n=1, n=4 und n=5. Welche Aussagen sind dann wahr? Welche sind äquivalent?

Lösung:

n=1:

A: Die natürliche Zahl 1 ist Teiler von 6. (w)
B: Die natürliche Zahl 1 ist Teiler von 12. (w)

$A \Rightarrow B$: Wenn die natürliche Zahl 1 Teiler von 6 ist, dann ist sie auch Teiler von 12. (w)

$\neg B \Rightarrow \neg A$: Wenn die natürliche Zahl 1 kein Teiler von 12 ist, dann ist sie auch kein Teiler von 6. (w)

Dieser Fall entspricht der 1. Zeile in der Wahrheitstafel.

n=4:

A: Die natürliche Zahl 4 ist Teiler von 6. (f)
B: Die natürliche Zahl 4 ist Teiler von 12. (w)

$A \Rightarrow B$: Wenn die natürliche Zahl 4 Teiler von 6 ist, dann ist sie auch Teiler von 12. (w)

$\neg B \Rightarrow \neg A$: Wenn die natürliche Zahl 4 kein Teiler von 12 ist, dann ist sie auch kein Teiler von 6. (w)

Dieser Fall entspricht der 3. Zeile in der Wahrheitstafel.

n=5:

A: Die natürliche Zahl 5 ist Teiler von 6. (f)
B: Die natürliche Zahl 5 ist Teiler von 12. (f)

$A \Rightarrow B$: Wenn die natürliche Zahl 5 Teiler von 6 ist, dann ist sie auch Teiler von 12. (w)

$\neg B \Rightarrow \neg A$: Wenn die natürliche Zahl 5 kein Teiler von 12 ist, dann ist sie auch kein Teiler von 6. (w)

Dieser Fall entspricht der 4. Zeile in der Wahrheitstafel.

Hinweis zur 2. Zeile in der Wahrheitstafel: Es gibt kein n, für das A wahr ist und B falsch.

Die Ausdrücke „$A \Rightarrow B$“ und „$\neg B \Rightarrow \neg A$“ sind in allen möglichen Fällen äquivalent.

3.9 Gesetze zum logisch gleichwertigen Umformen von Aussagen *)

Wie in Kapitel 3.8 und 1.1 bereits gezeigt, gibt es gleichwertige Aussagen, die, wenn man sie durch „⇔" verknüpft, eine Tautologie bilden. Diese Tautologien sind also Gesetze für das logisch gleichwertige Umformen von Aussagen.

Eine Liste solcher Gesetze finden Sie z.B. bei Wikipedia[55] oder Wikibooks[56]. Sie können diese Gesetze mit der Exceldatei „Logische Operationen per Wahrheitstafel.xlsx" überprüfen.

Zwei weitere Beispiele (die de Morganschen Gesetze[57]) sollen jedoch, jeweils mit Wahrheitstafel, gegeben werden:

a) Negation einer Konjunktion[58]: $\neg (A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$

A	B	¬ A	¬ B	(A ∧ B)	(¬ (A ∧ B))	(¬ A ∨ ¬ B)	((¬ (A ∧ B)) ⇔ (¬ A ∨ ¬ B))
w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	w	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	w	w	w

Beispiel:

A: Die Lehrkraft ist eine Frau.
B: Die Lehrkraft trägt eine Brille.
A ∧ B: Die Lehrkraft ist eine Frau und trägt eine Brille.

¬ (A ∧ B): Es stimmt nicht, dass die Lehrkraft eine Frau ist und eine Brille trägt.
¬ A ∨ ¬ B: Die Lehrkraft ist keine Frau oder die Lehrkraft trägt keine Brille.

Die beiden Aussagen (¬ (A ∧ B)) und (¬ A ∨ ¬ B) sind äquivalent.

Übungen:

Verknüpfen Sie die beiden folgenden Aussagen zu einer Negation der Konjunktion (Verneinung der Und-Verknüpfung) und geben Sie eine dazu äquivalente Aussage an:

A: Die natürliche Zahl n ist gerade.
B: Die natürliche Zahl n ist durch drei teilbar.

[55] https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Logik#Logische_Grundgesetze
[56] https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Gesetze_der_Logik
[57] https://de.wikipedia.org/wiki/De_Morgansche_Gesetze
[58] Siehe: Negation einer Konjunktion.xlsx

Lösungen:

$A \wedge B$:	Die natürliche Zahl n ist gerade und durch drei teilbar.
$\neg (A \wedge B)$:	Es stimmt nicht, dass die natürliche Zahl n gerade und durch drei teilbar ist.
$\neg A \vee \neg B$:	Die natürliche Zahl n ist nicht gerade oder sie ist nicht durch drei teilbar.

Die beiden Aussagen $(\neg (A \wedge B))$ und $(\neg A \vee \neg B)$ sind äquivalent.

b) Negation einer Alternative[59]: ¬ (A ∨ B) ⇔ ¬ A ∧ ¬ B

A	B	¬ A	¬ B	(A ∨ B)	¬ (A ∨ B)	(¬ A ∧ ¬ B)	(¬ (A ∨ B) ⇔ (¬ A ∧ ¬ B))
w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	f	w	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	f	w	w	w

Beispiel:

A: Das n-Eck hat drei Ecken.
B: Das n-Eck hat vier Ecken.
A ∨ B: Das n-Eck hat drei oder vier Ecken.

¬ (A ∨ B): Es stimmt nicht, dass das n-Eck drei oder vier Ecken hat.
¬ A ∧ ¬ B: Das n-Eck hat weder drei noch vier Ecken.

Die beiden Aussagen (¬ (A ∨ B)) und (¬ A ∧ ¬ B) sind äquivalent.

Übung für BigBlueButton:

1. Veranschaulichen Sie das Beispiel, indem Sie durch die Belegung der Variablen n mit speziellen Werten (z.B. n=4 und n=5) die Aussageform in eine Aussage überführen.
2. Bereiten Sie einen Vortrag vor und finden Sie jemanden, der ihn ggf. halten wird.

[59] Siehe: Negation einer Alternative.xlsx

Übungen:

a) A: Die Farbe meiner Schuhe ist rot.
B: Die Farbe meiner Schuhe ist schwarz.
Verneinen Sie die Alternative dieser beiden Aussagen und stellen Sie eine dazu äquivalente Aussage auf.

b) Begründen Sie, dass die Aussage „Die Farbe meiner Schuhe ist weiß.“ nicht äquivalent ist zur Aussage „Die Farbe meiner Schuhe ist weder rot noch schwarz“.

Lösungsbeispiel:

a) $\neg (A \vee B)$: Es stimmt nicht, dass die Farbe meiner Schuhe rot oder schwarz ist.
$\neg A \wedge \neg B$: Die Farbe meiner Schuhe ist weder rot noch schwarz.

b) Angenommen, die Farbe meiner Schuhe ist blau. Dann ist die Aussage „Die Farbe meiner Schuhe ist weder rot noch schwarz.“ wahr, aber die Aussage „Die Farbe meiner Schuhe ist weiß.“ ist falsch. Das bedeutet, dass die beiden Aussagen nicht äquivalent sein können.

4 Mengenlehre

4.1 Mengenbeschreibung nach Cantor

Nach Cantor ist eine Menge „jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente genannt werden) zu einem Ganzen."[60]

(Dass dies auch zu Problemen führen kann, wird auf S. 108 näher erläutert.)

4.2 Prinzip der Mengenbildung

„Prinzip der Mengenbildung: Für alle diejenigen Objekte x, auf die eine gegebene Aussageform H(x) zutrifft, gibt es stets eine Menge M, die genau jene x als Elemente besitzt."[61]

Diese Menge M wird auch als „Lösungsmenge der Aussageform" bezeichnet (siehe Kapitel 2.2).

4.3 Darstellung von Mengen

Es gibt verschiedene Darstellungsmöglichkeiten von Mengen[62].

a) Darstellung durch eine erzeugende Aussageform

Sei H(x) := „x teilt 24"[63], dann schreibt man

$M = \{x \in \mathbb{N}: H(x)\}$ bzw. $M = \{x \in N: x \text{ teilt } 24\}$.

Oft wird statt des „:" auch ein „|" geschrieben:

$M = \{x \in N \mid x \text{ teilt } 24\}$.

Gemeint ist in allen Fällen die Menge über dem Grundbereich der natürlichen Zahlen, für deren Elemente gilt, dass sie Teiler von 24 sind, also die Menge mit den Elementen 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24.

b) Elementweise Darstellung

$M = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

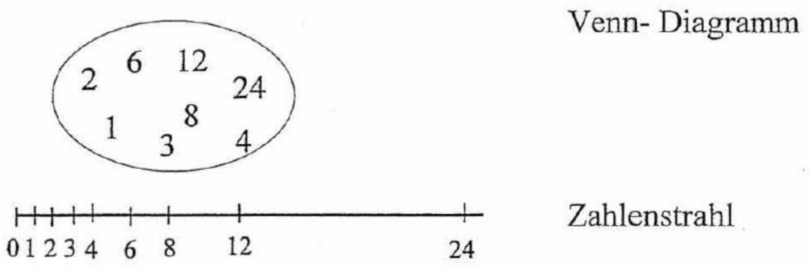
---

[60] Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 9
[61] Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 10
[62] Siehe: Raudies, M.: Grundlegende Begriffe der Mathematik, 2017, S. 34
[63] Auf die Teiler-Relation wird auf S. 141 genauer eingegangen.

c) Verbale Darstellung

„M ist die Menge aller Teiler von 24.“

d) Anschauliche Darstellung[64]



4.4 Zahlbereiche

„Aus dem Zusammenhang lässt sich im Allgemeinen auch immer erkennen, aus welchem *Grundbereich* (oder aus welcher *Grundmenge*) G die Objekte für die Mengenbildung genommen werden. Bei Mengen, die aus Zahlen bestehen, kann man z. B. die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen als Grundmenge wählen.“[65]

Aus der Schulzeit dürften Ihnen folgende Mengen, auf deren Konstruktion noch in späteren Kapiteln eingegangen wird, bekannt sein[66]:

$\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$	$:=$ Menge aller natürlichen Zahlen (*inklusive* der Null)[67]
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$	$:=$ Menge aller von Null verschiedenen natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	$:=$ Menge aller ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	$:=$ Menge aller rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}_+ \ (=\mathbb{B})$	$:=$ Menge aller gebrochenen Zahlen oder Bruchzahlen (*inklusive* der Null)
$\mathbb{Q}_+^*(=\mathbb{B})$	$:=$ Menge aller positiven gebrochenen Zahlen oder Bruchzahlen (*ohne* Null)
$\mathbb{R}$	$:=$ Menge aller reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	$:=$ Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen

[64] Aus: Raudies, M.: Grundlegende Begriffe der Mathematik, 2017, S. 34
[65] Aus: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 10
[66] Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 11
[67] Ob die Null zu den natürlichen Zahlen gehört, ist letztendlich eine Definitionsfrage, die andere Autoren auch anders beantworten.

4.5 Mächtigkeit endlicher Mengen

Eine Menge M mit endlich vielen Elementen wird als endliche Menge bezeichnet. Die *Mächtigkeit* (oder Kardinalität) einer endlichen Menge gibt die Anzahl ihrer Elemente an. [68]

Schreibweise: |M|

Eine Menge, die nicht endlich ist, ist eine unendliche Menge.

Beispiel:

$M = \{1, 2\}$

$|M| = 2$

[68] Siehe Wikipedia: Mächtigkeit bei endlichen Mengen

4.6 Mengenrelationen

In welchem Verhältnis Mengen zu einander stehen, wird durch Relationen ausgedrückt:

a) Mengengleichheit ($M = N$)

„Prinzip der Mengengleichheit: Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn sie aus denselben Elementen bestehen.“[69]

In Zeichen: $$M = N \;:\Leftrightarrow \bigwedge_x (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

Hierbei steht das „$:\Leftrightarrow$" für „... ist definiert als ...“.

Beispiel: $\{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{2,1,3\} = \{2,3,1\} = \{3,1,2\} = \{3,2,1\}$

Weiterhin gilt: $\{1,2,3\} = \{1,1,2,3\}$

Gleiche Elemente werden also zusammengefasst. Demnach ist $|\{1,1,2,3\}| = 3$.

Hinweis: Eine Menge mit n Elementen ist nicht zu verwechseln mit einem n-Tupel.

„Ein n-Tupel ist eine Zusammenfassung von n mathematischen Objekten $x_1, x_2, \dots, x_n$ in einer Liste. Im Gegensatz zu Mengen müssen die Objekte dabei nicht notwendigerweise voneinander verschieden sein und ihre Reihenfolge ist von Bedeutung.

Tupel werden meist mittels runder Klammern notiert, wobei zwei aufeinander folgende Objekte durch ein Komma getrennt werden“[70]:

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Beispiele:

$\{1,2,3\} \neq (1,2,3)$

$(1,2,3) \neq (1,3,2)$

$(1,2,3) \neq (1,1,2,3)$

[69] Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 14
[70] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Tupel#Notation

b) Echte Teilmenge ($M \subset N$)

Eine Menge M heißt genau dann eine *echte Teilmenge* von N, wenn alle Elemente, die zu M gehören, auch zu N gehören, aber es gibt wenigstens ein Element, das zu N und nicht zu M gehört.[71]

In Zeichen:

$$M \subset N \;:\Leftrightarrow \bigwedge_x (x \in M \Rightarrow x \in N) \wedge \bigvee_x (x \in N \wedge x \notin M)$$

$$M \subset N \;:\Leftrightarrow M \subseteq N \wedge M \neq N$$ (wenn „⊆“ bereits definiert wurde)

c) Teilmenge ($M \subseteq N$)

Eine Menge M heißt genau dann eine *Teilmenge* von N, wenn alle Elemente, die zu M gehören, auch zu N gehören.

In Zeichen:

$$M \subseteq N \;:\Leftrightarrow \bigwedge_x (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

$$M \subseteq N \;:\Leftrightarrow M \subset N \vee M = N$$ (wenn „⊂“ bereits definiert wurde)

Der Unterschied zwischen *echter Teilmenge* und *Teilmenge* liegt darin, dass sich die *echte Teilmenge* M von der anderen Menge N *unterscheiden* muss, die *Teilmenge* M darf jedoch auch *gleich* der Menge N sein.

Beispiel: Seien $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ und $C = \{1, 2, 3\}$.

Die Menge A ist eine *Teilmenge* von B ($A \subseteq B$), weil alle Elemente in A (die 1 und die 2) auch in B enthalten sind.

Die Menge A ist sogar eine *echte Teilmenge* von B ($A \subset B$), weil alle Elemente in A (die 1 und die 2) auch in B enthalten sind, aber die 3 nur in B und nicht in A enthalten ist.

Die Menge B ist <u>keine</u> *echte Teilmenge* von C ($B \not\subset C$), weil zwar alle Elemente in B (die 1, die 2 und die 3) auch in C enthalten sind, aber es *kein* Element gibt, welches nur in C enthalten ist.

Die Menge B ist eine *Teilmenge* von C ($B \subseteq C$), weil alle Elemente in B (die 1 und die 2) auch in C enthalten sind. In diesem Fall sind die Mengen B und C sogar gleich.

[71] Siehe: Raudies, M.: Grundlegende Begriffe der Mathematik, 2017, S. 36

d) Gleichmächtigkeit *endlicher* Mengen ($M \sim N$)

Seien M und N Mengen mit endlich vielen Elementen. Dann ist M genau dann *gleichmächtig* zu N, wenn M und N die gleiche Anzahl von Elementen besitzen.[72]

[72] Die Gleichmächtigkeit von *unendlichen* Mengen wird z.B. bei Wikipedia definiert.

4.7 Spezielle Mengen

a) Leere Menge (∅)

Bildet man eine Menge M derart, dass man eine Aussageform wählt, für die es kein x gibt, welches sie erfüllt (also eine *nicht erfüllbare* Aussageform[73]), so enthält diese Menge keine Elemente.

Die Menge M, die keine Elemente enthält, wird als *leere Menge* bezeichnet.

Schreibweise: M = ∅ (oder auch: M = {})

Hinweis[74]: Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge M: ∅ ⊆ M

b) Potenzmenge von A ($\wp(A)$) *)

Gegeben sei eine endliche Menge A. Bildet man eine Menge M über die Aussageform H(X):= „X ist *Teilmenge* von A“, so ist M die *Menge aller Teilmengen* von A.
(Die Elemente der Menge M sind also *keine Zahlen*, sondern *Mengen*.)

Die Menge M aller Teilmengen der Menge A, wird als die *Potenzmenge* von A bezeichnet.

Schreibweise: M = $\wp(A)$

Beispiel:

$A = \{1, 2\}$

Es gilt:

$\emptyset \subseteq A$
$\{1\} \subseteq A$
$\{2\} \subseteq A$
$\{1, 2\} \subseteq A$

Die Potenzmenge von A, also die Menge aller Teilmengen von A, ist die Menge $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

$\wp(A) = \wp(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

[73] Siehe: Raudies, M.: Grundbegriffe der Mathematik, 2017, S. 13
[74] Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 22

c) Beschränkte Intervalle[75]

Betrachten wir Mengen über dem Grundbereich (oder der *Trägermenge*) der *reellen* Zahlen, die beispielsweise *zwischen den Grenzen* 1 und 2 liegen. Hierfür gibt es vier verschiedene Möglichkeiten:

Menge	Intervall	Schreibweise 1	Schreibweise 2
$B_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$	abgeschlossen	[1 ; 2]	[1 ; 2]
$B_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$	offen	] 1 ; 2 [	(1; 2)
$B_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$	halboffen	[1 ; 2 [	[1 ; 2)
$B_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$	halboffen	] 1 ; 2]	(1 ; 2]

Die Mengen B_1, B_2, B_3 und B_4 unterscheiden sich jeweils paarweise voneinander, da die linke bzw. die rechte Intervallgrenze zur Menge dazugehört oder auch nicht.

[75] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_(Mathematik)

4.8 Mengenoperationen

Mengen*operationen* unterscheiden sich von Mengen*relationen* folgendermaßen:

- Bei einer *Relation* fragt man, *ob* die Mengen zueinander auf eine bestimmte Weise *in Beziehung stehen*. Das Ergebnis ist ein „ja“ oder „nein“. Zum Beispiel kann die Aussage „M=N“ nur wahr („ja“) oder falsch („nein“) sein. Die Mengen M und N stehen hinsichtlich der Gleichheit zueinander in Relation oder nicht.

- Bei einer *Operation* hingegen *passiert* etwas mit den Mengen. Das Ergebnis einer Mengenoperation ist eine neue Menge. Zum Beispiel erhält man durch die Vereinigung der Mengen {1, 2} und {3, 4} die Menge {1, 2, 3, 4}.

a) Durchschnitt $(A \cap B)$[76]

Der *Durchschnitt* A ∩ B (gelesen: „A geschnitten B“) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl Element von A als auch von B sind.[77]

In Zeichen: $A \cap B :\Longleftrightarrow \{\, x \mid x \in A \;\wedge\; x \in B \}$

Ergibt der Durchschnitt der Mengen A und B die leere Menge $(A \cap B = \emptyset)$, so werden die Mengen A und B als unvereinbar oder disjunkt bezeichnet.

b) Vereinigung $(A \cup B)$[78]

Die *Vereinigung* A ∪ B (gelesen: „A vereinigt B“) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die Element von A oder Element von B sind. (Sie sind also entweder Element von A oder Element von B oder Element von beiden, also von A ∩ B.)

In Zeichen: $A \cup B :\Longleftrightarrow \{\, x \mid x \in A \;\vee\; x \in B \}$

[76] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Menge_(Mathematik)#Schnittmenge_(Schnitt,_auch_„Durchschnitt“)
[77] Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 26
[78] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Menge_(Mathematik)#Vereinigung_(Vereinigungsmenge)

c) Differenz $(A \setminus B)$[79]

Die *Differenzmenge* A \ B (gelesen: „A ohne B“) ist die Menge aller Elemente aus A, die nicht in B liegen.[80]

In Zeichen: $A \setminus B :\Leftrightarrow \{ x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

d) Komplement [81]

Die *Komplementärmenge* $\overline{A}$ (gelesen: „A Komplement“) der Menge A enthält genau die Elemente aus der Grundmenge G, die nicht in A enthalten sind.[82]

In Zeichen: $\overline{A} \ :\Leftrightarrow \{ x \mid x \in G \ \wedge \ x \notin A\}$

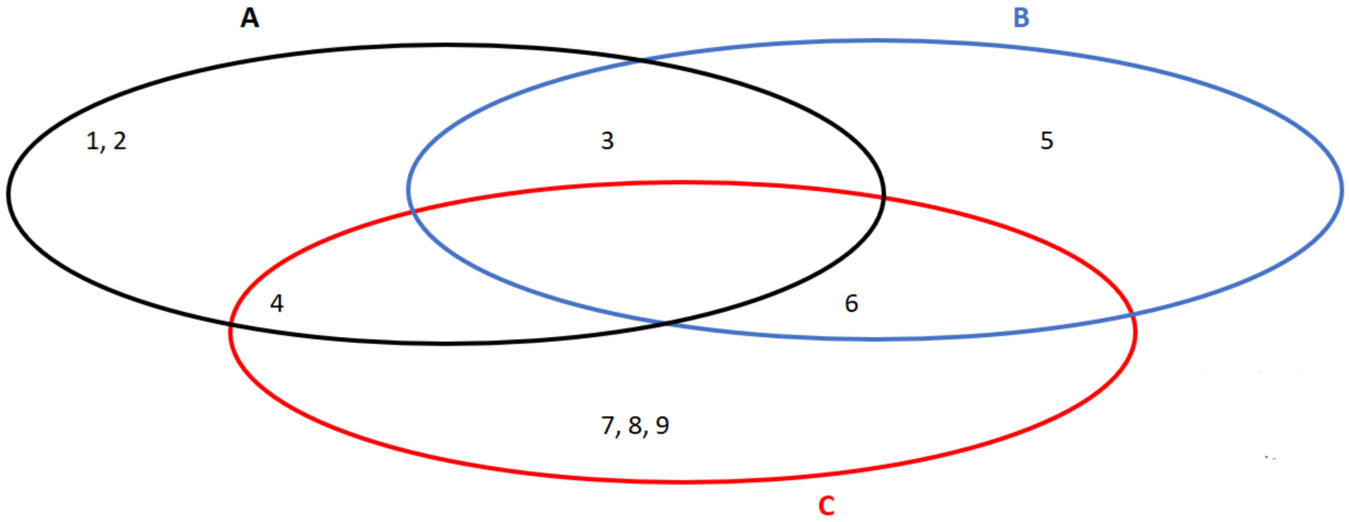
$\overline{A} \ :\Leftrightarrow G \setminus A$

Hinweis: Anstatt „$\overline{A}$" kann auch „A^C" geschrieben werden.

[79] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Menge_(Mathematik)#Differenz_und_Komplement
[80] Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 28
[81]Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Komplement_(Mengenlehre)
[82] Siehe auch: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 28

4.9 Mengenoperationen und Venn-Diagramme[83]

Man betrachte als Grundmenge die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Weiterhin seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 6\}$ und $C = \{4, 6, 7, 8, 9\}$ gegeben. Betrachten Sie bitte das Venn-Diagramm und die Ergebnisse der Mengenoperationen:



$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A \setminus B = \{1, 2, 4\}$

$A \setminus C = \{1, 2, 3\}$

$C \setminus (A \cup B) = \{7, 8, 9\}$

$A \cap C = \{4\}$

$B \cap C = \{6\}$

$A \cap B \cap C = \{\}$

1. Versuchen Sie, aus den gegebenen Mengen das Venn-Diagramm und die Ergebnisse der Mengenoperationen nachzuvollziehen.
2. Schließen Sie von den Ergebnissen der Mengenoperationen auf die Mengen.

Hinweis: Mit der Datei „Mengenoperationen und Venn-Diagramme.xlsx“ können Sie per Zufall Übungsaufgaben mit Lösungen generieren.

[83] Siehe: Mengenoperationen und Venn-Diagramme.xlsx

Übung: Gegeben sind folgende Mengen:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

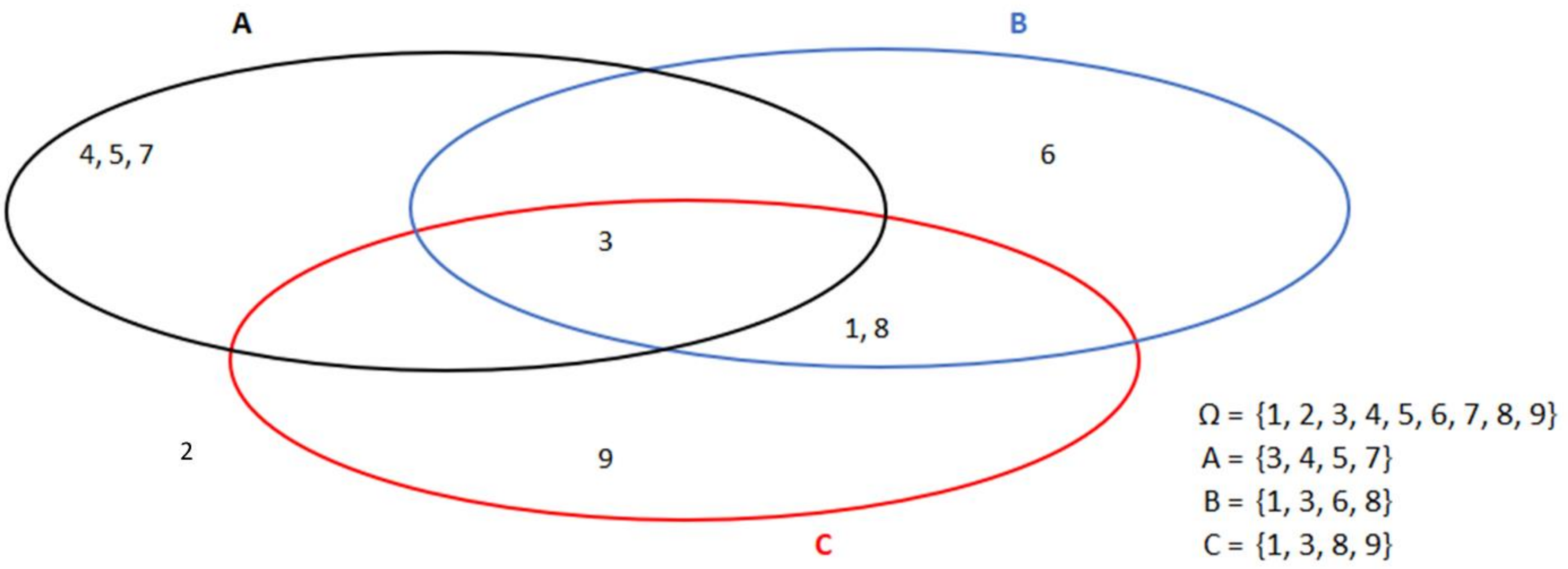
$A = \{3, 4, 5, 7\}$

$B = \{1, 3, 6, 8\}$

$C = \{1, 3, 8, 9\}$

Zeichnen Sie das dazugehörige Venn-Diagramm.

Lösung:



Übung:

Gegeben sind folgende Mengen:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{2, 3, 4, 5\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Hinweis zur Schreibweise: „A^C“ bedeutet „A Komplement“.

Bilden Sie:

$A^C =$	$A^C \cup B^C =$	$C \setminus B =$
$B^C =$	$A^C \cup C^C =$	$C \setminus (A \cup B) =$
$C^C =$	$B^C \cup C^C =$	$A \setminus (B \cup C) =$
$(A \cup B)^C =$	$A \cup B =$	$B \setminus (A \cup C) =$
$(A \cup C)^C =$	$A \cup C =$	$A \cap C =$
$(B \cup C)^C =$	$B \cup C =$	$B \cap C =$
$A^C \cap B^C =$	$A \cup B \cup C =$	$A \cap B =$
$A^C \cap C^C =$	$A \setminus B =$	$A \cap B \cap C =$
$B^C \cap C^C =$	$A \setminus C =$	$(A \cap B) \setminus C =$
$(A \cap B)^C =$	$B \setminus C =$	$(A \cap C) \setminus B =$
$(A \cap C)^C =$	$B \setminus A =$	$(B \cap C) \setminus A =$

Lösung:

Gegeben sind folgende Mengen:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{2, 3, 4, 5\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Hinweis zur Schreibweise: „A^C" bedeutet „A Komplement".

Bilden Sie:

$A^C =$	$\{1, 6, 7, 8, 9\}$	$A^C \cup B^C =$	$\{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$	$C \setminus B =$	$\{2, 8\}$
$B^C =$	$\{1, 2, 8, 9\}$	$A^C \cup C^C =$	$\{1, 6, 7, 8, 9\}$	$C \setminus (A \cup B) =$	$\{8\}$
$C^C =$	$\{1, 6, 7, 9\}$	$B^C \cup C^C =$	$\{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$	$A \setminus (B \cup C) =$	$\{\}$
$(A \cup B)^C =$	$\{1, 8, 9\}$	$A \cup B =$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$B \setminus (A \cup C) =$	$\{6, 7\}$
$(A \cup C)^C =$	$\{1, 6, 7, 9\}$	$A \cup C =$	$\{2, 3, 4, 5, 8\}$	$A \cap C =$	$\{2, 3, 4, 5\}$
$(B \cup C)^C =$	$\{1, 9\}$	$B \cup C =$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$B \cap C =$	$\{3, 4, 5\}$
$A^C \cap B^C =$	$\{1, 8, 9\}$	$A \cup B \cup C =$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$A \cap B =$	$\{3, 4, 5\}$
$A^C \cap C^C =$	$\{1, 6, 7, 9\}$	$A \setminus B =$	$\{2\}$	$A \cap B \cap C =$	$\{3, 4, 5\}$
$B^C \cap C^C =$	$\{1, 9\}$	$A \setminus C =$	$\{\}$	$(A \cap B) \setminus C =$	$\{\}$
$(A \cap B)^C =$	$\{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$	$B \setminus C =$	$\{6, 7\}$	$(A \cap C) \setminus B =$	$\{2\}$
$(A \cap C)^C =$	$\{1, 6, 7, 8, 9\}$	$B \setminus A =$	$\{6, 7\}$	$(B \cap C) \setminus A =$	$\{\}$

Übung:

Gegeben sind folgende Mengenoperationen:

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \setminus B = \{3, 8\}$$

$$A \setminus C = \{2\}$$

$$C \setminus (A \cup B) = \{1\}$$

$$A \cap C = \{3, 6, 8\}$$

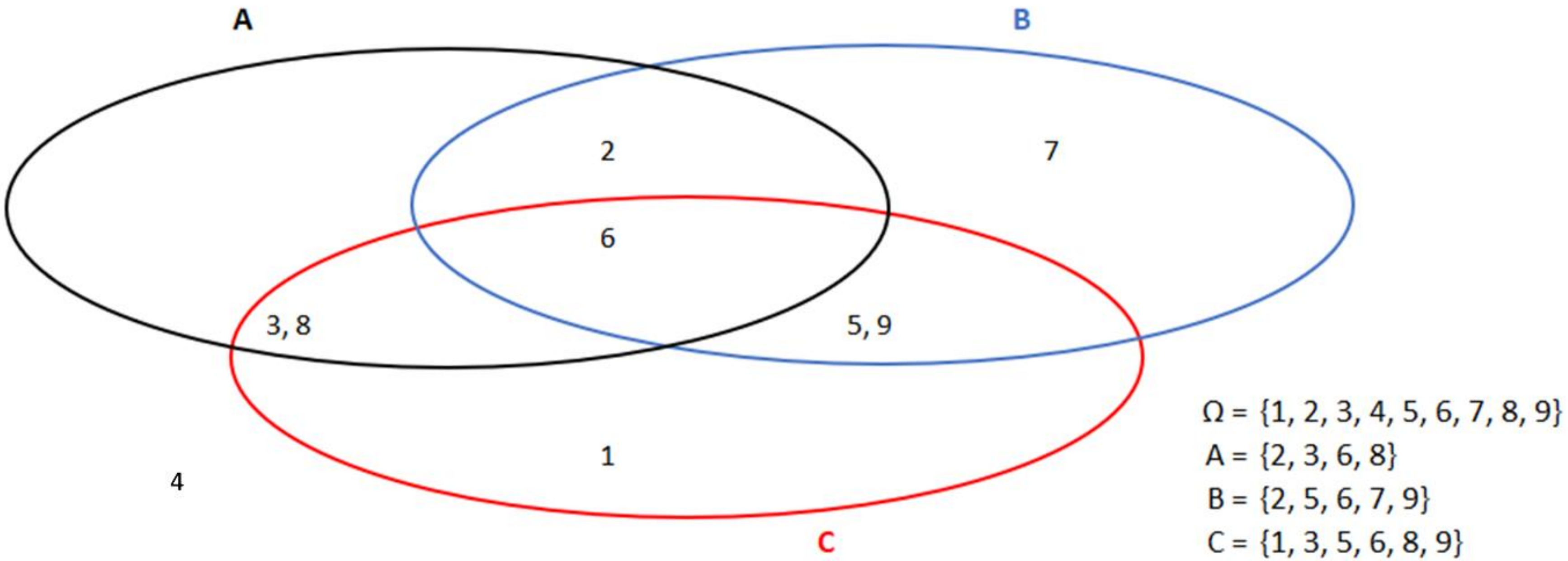
$$B \cap C = \{5, 6, 9\}$$

$$A \cap B \cap C = \{6\}$$

Geben Sie die Mengen A, B und C elementweise an. Tipp: Ein Venn-Diagramm kann helfen.

Lösung:

$A \cup B \cup C =$ {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9}
$A \setminus B =$ {3, 8}
$A \setminus C =$ {2}
$C \setminus (A \cup B) =$ {1}
$A \cap C =$ {3, 6, 8}
$B \cap C =$ {5, 6, 9}
$A \cap B \cap C =$ {6}



Erläuterung der Lösung:

Gegeben waren folgende Informationen:

Zeile 1: $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Zeile 2: $A \setminus B = \{3, 8\}$

Zeile 3: $A \setminus C = \{2\}$

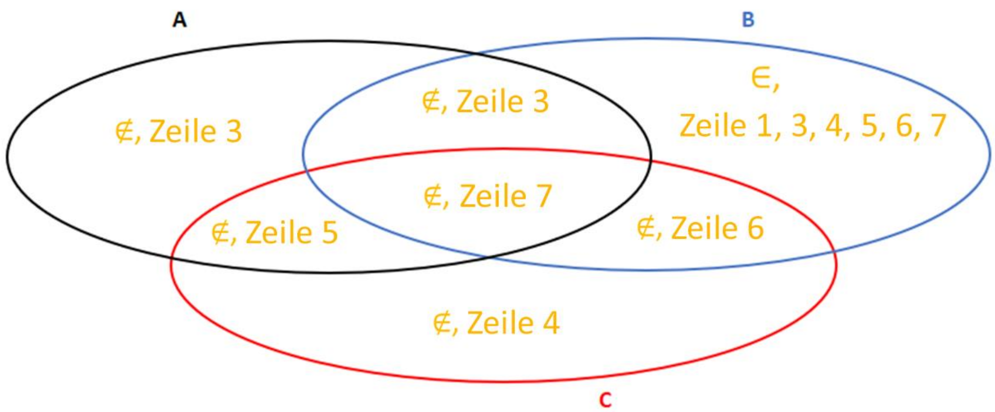
Zeile 4: $C \setminus (A \cup B) = \{1\}$

Zeile 5: $A \cap C = \{3, 6, 8\}$

Zeile 6: $B \cap C = \{5, 6, 9\}$

Zeile 7: $A \cap B \cap C = \{6\}$

Man gehe nun die Zahlen 1 - 9 einzeln durch:

Zahl	A	B	C
1	∉, siehe Zeilen 4, 5	∉, siehe Zeilen 4, 6	∈, siehe Zeile 4
2	∈, siehe Zeile 3	∈, siehe Zeilen 3, 2	∉, siehe Zeile 3, 2, 7
3	∈, siehe Zeile 2	∉, siehe Zeile 2	∈, siehe Zeile 2, 3
4	∉, siehe Zeile 1	∉, siehe Zeile 1	∉, siehe Zeile 1
5	∉, siehe Zeilen 6, 7	∈, siehe Zeile 6	∈, siehe Zeile 6
6	∈, siehe Zeile 7	∈, siehe Zeile 7	∈, siehe Zeile 7
7			
8	∈, siehe Zeile 5	∉, siehe Zeile 5, 7	∈, siehe Zeile 5
9	∉, siehe Zeile 6, 5	∈, siehe Zeile 6	∈, siehe Zeile 6

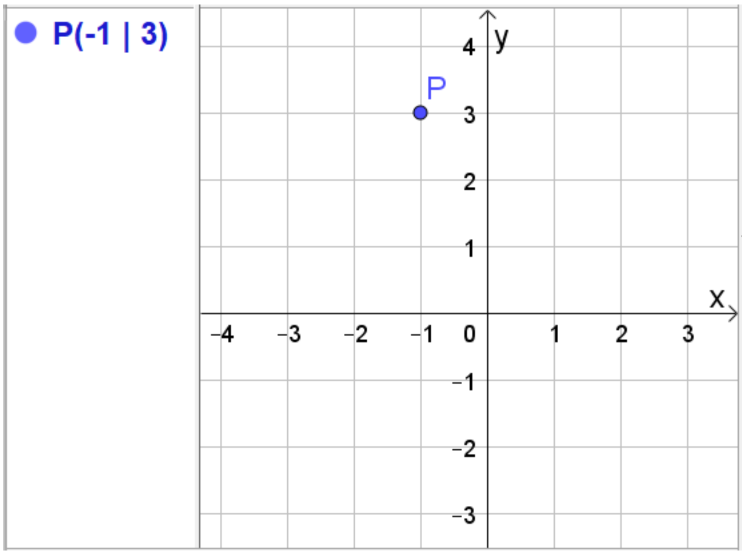
4.10 Geordnetes Paar

Es seien x und y zwei beliebige Elemente aus einer Menge M. Ein *geordnetes Paar* (x, y) ist ein 2-Tupel[84] (siehe n-Tupel, S. 91)[85]. Hierbei wird x als 1. Komponente oder x-Koordinate[86] und y als 2. Komponente oder y-Koordinate bezeichnet.

Beispiel[87]:

Das geordnete Paar (-1, 3) stellt den Punkt P mit der x-Koordinate -1 und der y-Koordinate 3 dar.

Schreibweise: P(-1, 3) oder P(-1|3)



Übung:

Stellen Sie den Punkt Q(5|-3) mit GeoGebra dar!

[84] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Tupel#Besondere_Bezeichnungen_f%C3%BCr_n-Tupel_mit_kleinem_n
[85] Es lässt sich auch so definieren: (a, b) := { {a, b}, {a}}, siehe Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 30
[86] Diese Bezeichnung bezieht sich auf Koordinatensysteme, bei denen die Abszisse als x-Achse und die Ordinate als y-Achse bezeichnet werden (siehe auch: kartesisches Koordinatensystem).
[87] Siehe: Punkt P.ggb

4.11 Kartesisches Produkt

Das *kartesische Produkt* X × Y (gelesen: „X Kreuz Y“) von X und Y ist die Menge aller geordneten Paare (x, y), deren erste Komponente x ein Element aus X und deren zweite Komponente y ein Element aus Y ist.[88]

In Zeichen: $X \times Y := \{ (x, y) | \, x \in X \wedge y \in Y \}$

(Synonyme für das kartesische Produkt sind z.B. Kreuzprodukt oder Produktmenge.)

Beispiel:

Seien X und Y Teilmengen der *natürlichen* Zahlen:

X = {1, 2}   und   Y = {1, 2, 3}

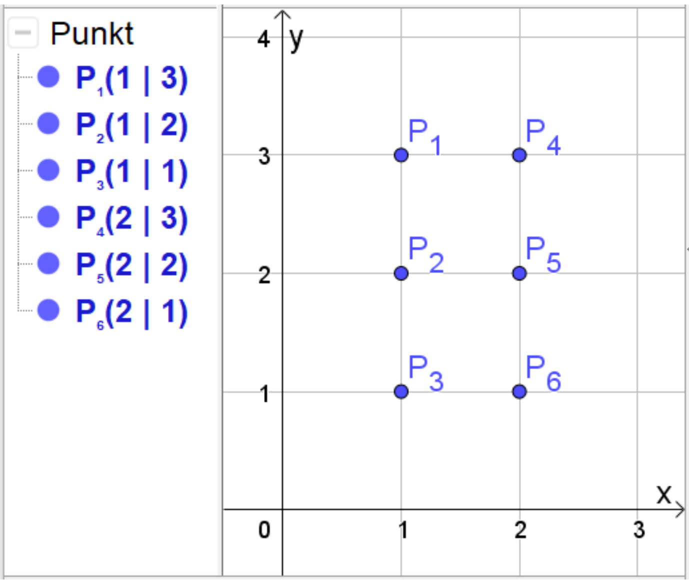
Dann ist das kartesische Produkt X × Y die Menge aller möglichen geordneten Paaren:

X × Y = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

Es gibt insgesamt sechs geordnete Paare:

|X × Y| = 6

Fasst man die geordneten Paare als Koordinaten von Punkten auf, ergibt sich folgende Darstellung[89]:



[88] Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 32
[89] Siehe: kartesisches Produkt.ggb

Beispiel:

Seien X und Y Teilmengen der *reellen* Zahlen:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

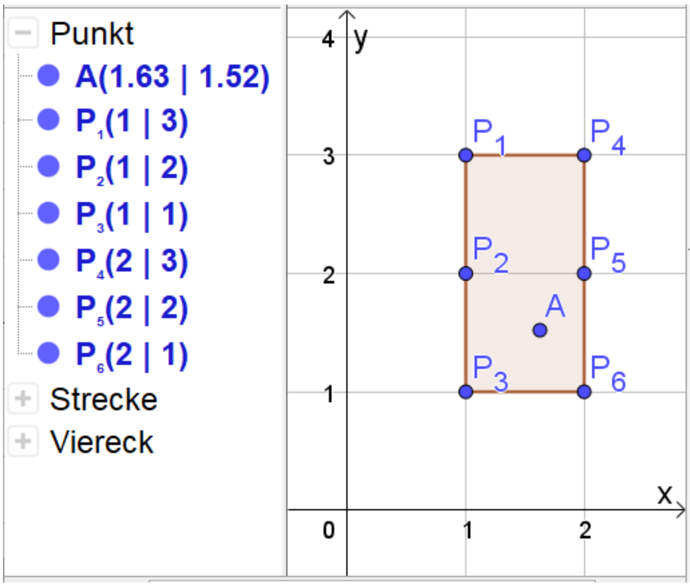
$$Y = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$$

Dann beinhaltet das kartesische Produkt

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

ebenfalls alle möglichen geordneten Paaren. Das kartesische Produkt lässt sich jedoch *nicht* mehr *vollständig elementweise* darstellen, da es *unendlich viele Paare* gibt. Denn zwischen 1 und 2 bzw. zwischen 1 und 3 liegen *unendlich viele reelle Zahlen*.

Fasst man die geordneten Paare als Koordinaten von Punkten auf, ergibt sich folgende Darstellung[90]:



Die Punkte P_1, P_2, …, P_6 sind weiterhin enthalten. Es gibt jedoch noch unendlich viele weitere Punkte, z.B. den Punkt A(1,63|1,52)[91], so dass das kartesische Produkt in diesem Falle durch die Fläche eines Rechtecks dargestellt wird.

[90] Siehe: kartesisches Produkt (Fläche).ggb

[91] An dieser Stelle sei auf unterschiedliche Schreibweisen hingewiesen: In GeoGebra wird bei der Zahldarstellung statt eines Kommas ein Punkt verwendet. Excel hingegen nutzt ein Komma.

4.12 Russellsche Antinomie *)

Für besonders interessierte Personen soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, dass die Mengendefinition nach *Cantor* (siehe S. 88) zu Problemen führen kann. *Russel* formulierte 1918:

„Man kann einen Barbier als einen definieren, der all jene und nur jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren."

Nimmt man als Grundmenge z.B. alle Einwohner eines Dorfes, in welchem es genau einen Barbier gibt. Nun möchte man die Menge M definieren, in welcher nur der Barbier enthalten ist.

Dies versucht man folgendermaßen:

M = { x | x rasiert all jene und nur jene, die sich nicht selbst rasieren.}

Die Frage ist: „Rasiert der Barbier sich selbst?"[92]

Folgende Fälle scheinen möglich:

1. Fall: Der Barbier rasiert sich selbst.
   (Dies ergibt jedoch einen Widerspruch, denn, wenn der Barbier sich selbst rasieren würde, wäre er kein Barbier. Der Barbier rasiert schließlich nur diejenigen, die sich nicht selbst rasieren.)

2. Fall: Der Barbier rasiert sich nicht selbst.
   (Dies ergibt auch einen Widerspruch, denn, wenn der Barbier sich *nicht* selbst rasieren würde, würde er vom Barbier rasiert werden, weil dieser alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren.)

Diese Widersprüchlichkeit wird als *Russellsche Antinomie*[93] bezeichnet.

Die Darstellung der Menge M

M = { x | x rasiert all jene und nur jene, die sich nicht selbst rasieren.}

wird abstrakt auch so vorgenommen:

$M = \{ x \mid x \notin x \}$

Diese wird dann als *Russellsche Klasse* oder „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten" bezeichnet.

---

[92] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Barbier-Paradoxon
[93] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Russellsche_Antinomie

4.12.1 Vermeidung der Russellschen Antinomie *)

Nach *Lehmann / Schulz* kann die *Russellsche Antinomie* folgendermaßen vermieden werden:

"Bei der Bildung einer Menge M werden bestimmte Individuen (Elemente) x, y, ... aus einem gegebenen Grundbereich zu dieser Menge M (*Menge erster Stufe*) zusammengefasst. Mengen (erster Stufe) M, N, ... können nun ihrerseits wieder als Objekte zu einer neuen Menge $\mathfrak{M}$ zusammengefasst werden. Eine solche Menge $\mathfrak{M}$ (*Menge zweiter Stufe*) nennt man ein Mengensystem. Dieser Prozess der Mengenbildung lässt sich fortsetzen. Die nächste Stufe, also eine Menge von Mengensystemen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, ..., nennt man dann eine Mengenfamilie μ (*Menge dritter Stufe*)."

"Beachtet man, dass in einer Menge M stets nur lndividuen (als Elemente), in einem Mengensystem $\mathfrak{M}$ stets nur Mengen (als Elemente) und in einer Mengenfamilie μ stets nur Mengensysteme (als Elemente) usw. vorkommen, also die Mengenbildung in dieser Weise eingeschränkt wird, kann es zu keinen Widersprüchen, den sogenannten Antinomien kommen."[94]

In diesem Skript soll dieser Hinweis beachtet werden, sodass auf der Mengendefinition nach Cantor (siehe S. 88) aufgebaut werden kann und Fälle, in denen die Russellsche Antinomie eine Rolle spielen könnte, umgangen werden.

[94] Aus: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 12

5 Relationen

Es gibt verschiedene Arten von Relationen[95]. Stehen zwei mathematische Objekte in Relation zueinander, dann gilt für sie eine gewisse Beziehung.

Beispiel:

Man betrachte die „ist kleiner als“-Relation (Zeichen: „$<$“).

Es gilt:	$5 < 7$	(wahre Aussage)
Es gilt nicht:	$7 < 5$	(falsche Aussage)

Dies lässt sich folgendermaßen schreiben:

$(5,7) \in <$
$(7,5) \notin <$

Eine solche Schreibweise wird erst dann verständlich, wenn man erkennt, dass sich hinter „$<$“ eine Teilmenge des kartesischen Produkts verbirgt. Denn die „$<$“-Relation lässt sich z.B. in $\mathbb{N}$ wie folgt definieren:

$$< \; := \; \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{N} \wedge \bigvee_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} y = x + n \}$$

Die „$<$“-Relation ist also die Menge aller Paare (x,y), für die gilt, dass immer eine natürliche Zahl $n \neq 0$ existiert, so dass gilt: $y = x + n$.

(Es muss immer noch eine natürliche Zahl $\neq 0$ zu x dazu addiert werden, um y zu erhalten, wenn $x < y$ ist.)

Eine Relation lässt sich also dadurch definieren, indem man angibt, *welche* Paare in dieser Relation enthalten sind. Hieraus ergibt sich nachfolgende Definition.

5.1 Zweistellige Relation

R ist eine zweistellige Relation zwischen X und Y genau dann, wenn R eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times Y$ ist.[96]

In Zeichen: $R \subseteq X \times Y$

[95] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik)
[96] Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 54

6 Funktionen

Funktionen sind Relationen, für die eine bestimmte Eigenschaft gilt. Dies soll an einem Beispiel erläutert werden:

Auf Seite 110 wurde näher auf die „ist kleiner als“-Relation (Zeichen:„<“) eingegangen. Es gilt z.B.

$$5 < 7$$
$$5 < 8$$
$$5 < 9$$
$$5 < 10$$

usw.

Die 5 steht demnach hinsichtlich „<“ zu *unendlich* vielen Zahlen in Relation.

Es sollen nun spezielle Arten von Relationen betrachtet werden. Z.B. kann man auch die Anzahl von Äpfeln und ihren Preis in Relation setzen. Man nehme an, ein Bio-Apfel kostet 1,60 €. Nennen wir diese Relation „kosten“, so ergeben sich folgende Beziehungen:

3	Äpfel	kosten	4,80 €
4	Äpfel	kosten	6,40 €
5	Äpfel	kosten	8,00 €
6	Äpfel	kosten	9,60 €
7	Äpfel	kosten	11,20 €

usw.

Die 5 steht demnach hinsichtlich „kosten“ *nur* zur 8,00 in Relation. Man spricht daher von einer *rechtseindeutigen* Relation. (Auf der rechten Seite von der 5 dürfen keine anderen Werte stehen.)

Rechtseindeutige Relationen nennt man *Funktionen*.

Übung: Trainieren Sie Ihre Excel-Kenntnisse und stellen Sie obige Preistabelle unter Zuhilfenahme von Formeln[97] und absolutem[98] Zellbezug dar. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis.[99]

[97] Siehe. Verwenden von Zellbezügen in einer Formel
[98] Siehe: Wechseln zwischen relativen, absoluten und gemischten Bezügen
[99] Siehe: Apfelkosten.xlsx

6.1 Schultypische Definition

In der Schule spielt der Relationsbegriff eine untergeordnete Rolle. Daher wird dort eine Funktion wie folgt definiert:

Eine Funktion (oder Abbildung[100]) f von X in Y ist eine Vorschrift, die jedem Element x aus X eindeutig ein Element y aus Y zuordnet.

6.2 Bezeichnungen und Schreibweisen

Hinsichtlich des Bio-Apfel-Beispiels wird die Relation „kosten“ nun in die Funktion „f“ umbenannt, und es soll folgender Ausdruck verwendet und erläutert werden:

$$f\colon\begin{cases} X \;\to\; f(X) \subseteq Y \\ x \;\mapsto\; f(x) = 1{,}6 \cdot x = y \end{cases}$$

Sprechweise
„f ist eine Funktion von X *in* Y (bzw. von X *auf* $f(X)$). Hierbei wird jedem Element x aus dem Definitionsbereich genau ein Element $f(x)$ aus dem Wertebereich zugeordnet (bzw. jedes x wird auf genau ein $f(x)$ abgebildet), wobei $f(x)$ mithilfe der Funktionsgleichung $f(x) = 1{,}6x$ berechnet wird. Statt $f(x)$ schreibt man auch y.“

Begriffsklärungen

Zeichen	Begriff	Hinweis
f	Funktions*name*	$f(x)$ ist nicht f !
$X\ (= D(f))$	Definitionsbereich	Menge mit genau den Elementen, unter denen die Funktion definiert ist.
x	Argument	Element des Definitionsbereichs
$f(x) = y$	Funktions*wert*	Wert, auf den x abgebildet (bzw. der x zugeordnet) wird.
$f(x) = 1{,}6 \cdot x$	Funktions*gleichung*	Berechnung der Funktionswerte
$f(X)$	Wertebereich	Menge aller Funktionswerte (Menge, *auf*[101] die abgebildet wird)
Y	Wertevorrat	Menge, *in* die abgebildet wird
$x \;\mapsto\; f(x) = 1{,}6 \cdot x$	Funktions*vorschrift*	In der Schule unüblich

Kurzform: „Die Funktion f mit $f(x) = \ldots$“

[100] Nach: Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis, 1991, S. 104
[101] Siehe: Siehe: Raudies, M.: Grundbegriffe der Mathematik, 2017, S. 55

6.3 Wahl des Definitionsbereichs

Abhängig vom Sachverhalt ist bei einer Funktion f der Definitionsbereich $D(f)$ zu wählen. Für das Bio-Apfel-Beispiel gilt $D(f) = \mathbb{N}$, da einzelne Äpfel verkauft werden. Würde man die Äpfel in kg angeben, könnten auch die positiven reellen Zahlen gewählt werden.
Meistens geht man in der Schule unausgesprochen davon aus, dass es sich um eine Funktion von $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ handelt, sofern dies sinnvoll ist und es keine Definitionslücken gibt.

Beispiel:

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ kann nur für alle reellen Zahlen ungleich 0 definiert werden, da durch 0 nicht dividiert werden darf.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6.4 Darstellungen von Funktionen

Es gibt z.B. folgende Darstellungsmöglichkeiten:

a) Verbale Darstellung

„Jedem x wird das 1,6-Fache seines Wertes zugeordnet."

b) Funktionsgleichung

$$f(x) = 1{,}6 \cdot x$$

c) Wertetabelle[102]

x	f(x)
-3,1	f(-3,1) = 1,6 · (-3,1) = -4,96
0,5	f(0,5) = 1,6 · 0,5 = 0,8
0	f(0) = 1,6 · 0 = 0
1,2	f(1,2) = 1,6 · 1,2 = 1,92
5	f(5) = 1,6 · 5 = 8
...	

oder

x	-3,1	0,5	0	1,2	5	...
f(x)	-4,96	0,8	0	1,92	8	...

Statt „f(5) = 1,6 · 5 = 8" schreibt man meist nur „8". Für Schülerinnen und Schüler ist es jedoch hilfreich, wenn erkennbar ist, wie die „8" entstanden ist.

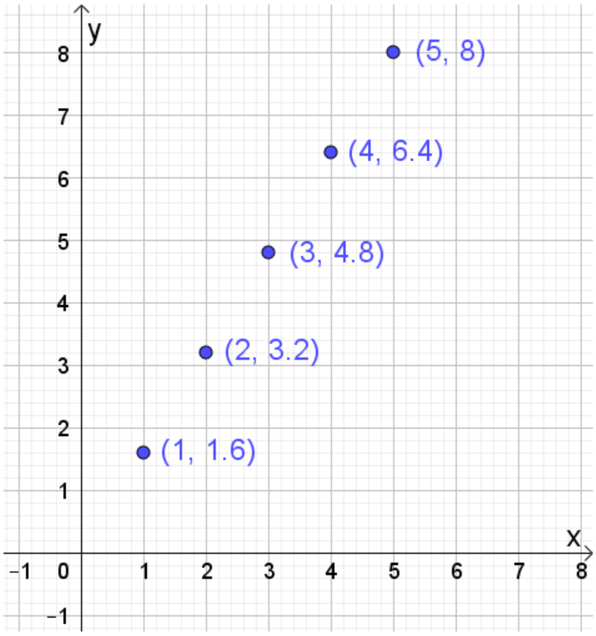
Eine Wertetabelle ist meist eine *unvollständige* Darstellung, wenn darin nicht alle x aufgeführt werden, für die die Funktion definiert ist. So gibt es beispielsweise zwischen 0 und 0,5 noch unendlich viele weitere reelle Zahlen.

[102] Siehe: Wertetabelle.xlsx

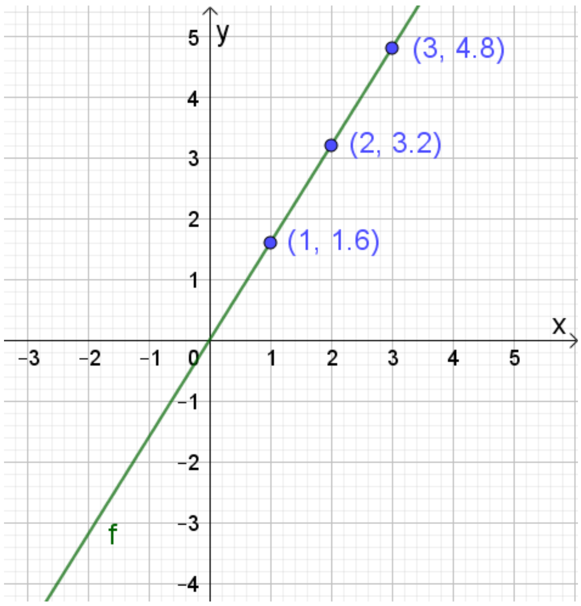
d) Funktionsgraph

Als Funktionsgraph oder kurz Graph einer Funktion f bezeichnet man die Menge aller geordneten Paare $(\,x\,, f(x)\,)$ aus den Elementen x des Definitionsbereichs und den zugehörigen Funktionswerten $f(x)$.[103]

Diese Paare können in der Zeichenebene interpretiert werden:



Handelt es sich um eine Funktion f von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, *kann* der Graph[104] auch wie eine ‚zusammenhängende Linie oder Kurve' aussehen (sofern die Funktion stetig[105] ist):



Sprechweise: An der *Stelle* $x = 1$ besitzt die Funktion f den *Funktionswert* $f(1) = 1{,}6$.

---

[103] Siehe auch: https://de.wikipedia.org/wiki/Funktionsgraph
[104] Siehe: Funktionsgraph.ggb
[105] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Stetige_Funktion

6.5 Umkehrfunktionen

Statt einer Definition soll nur eine Eigenschaft einer Umkehrfunktion genannt werden:

Wendet man auf ein x die Funktion f an, so erhält man $f(x)$. Wendet man auf $f(x)$ (falls sie existiert) die Umkehrfunktion f^{-1} an, erhält man wieder x.

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

Beispiel: Die Funktion f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} seien gegeben durch:

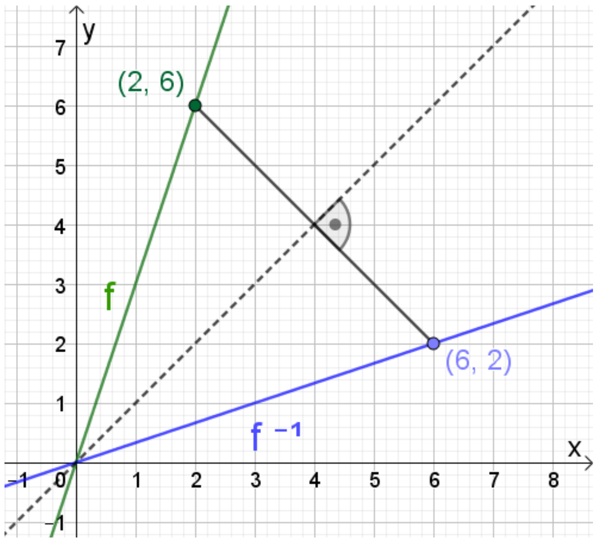
$$f(x) = 3x \quad \text{und} \quad f^{-1}(x) = \tfrac{1}{3}x$$

Man wähle $x = 2$. Dann ist $f(2) = 3 \cdot 2 = 6$.

Wendet man auf die 6 nun f^{-1} an, ergibt sich:

$$f^{-1}(6) = \tfrac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

Man hat also wieder den Ausgangswert 2 erhalten. Hierzu kann man sich die Funktionsgraphen von f und Funktionen f und f^{-1} anschauen[106]:



Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht, indem man alle Punkte auf dem Graph der Funktion f an der Ursprungsgeraden (mit der Steigung 1) spiegelt. So wird z.B. der Punkt (2, 6) nach der Spiegelung zum Punkt (6, 2).

Nur *bijektive*[107] (oder *eineindeutige*) Funktionen besitzen eine *Umkehrfunktion*[108]. Für das vertiefende Studium sei auf *Lehmann / Schulz* verwiesen[109].

---

[106] Siehe: Umkehrfunktion.ggb
[107] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Bijektive_Funktion#Definition
[108] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Umkehrfunktion
[109] Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 128

7 Eine Auswahl schulrelevanter Funktionen

Im Folgenden soll nur ein kurzer Überblick gegeben werden. Zur Vertiefung wird eine Recherche in den Quellenangaben empfohlen. Alle GeoGebra- und Excel-Dateien lassen sich zur Übung mit anderen Zahlen versehen und weiterbearbeiten.

7.1 Proportionale Funktionen[110]

Eine *proportionale Funktion* f besitzt folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = m \cdot x$$

Hierbei wird m als *Proportionalitätsfaktor* bezeichnet.

Hinweise:

- Es ist auch die Darstellung $y = m \cdot x$ möglich[111].
- Es gilt für alle $x \neq 0$ und die dazugehörigen $f(x)$ bzw. y:

$$m = \frac{f(x)}{x} \quad \text{bzw.} \quad m = \frac{y}{x}$$

Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Quotientengleichheit*[112]. Erstellt man für die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 1{,}6 \cdot x$$

für ausgewählte x eine Wertetabelle, wird dies bestätigt:

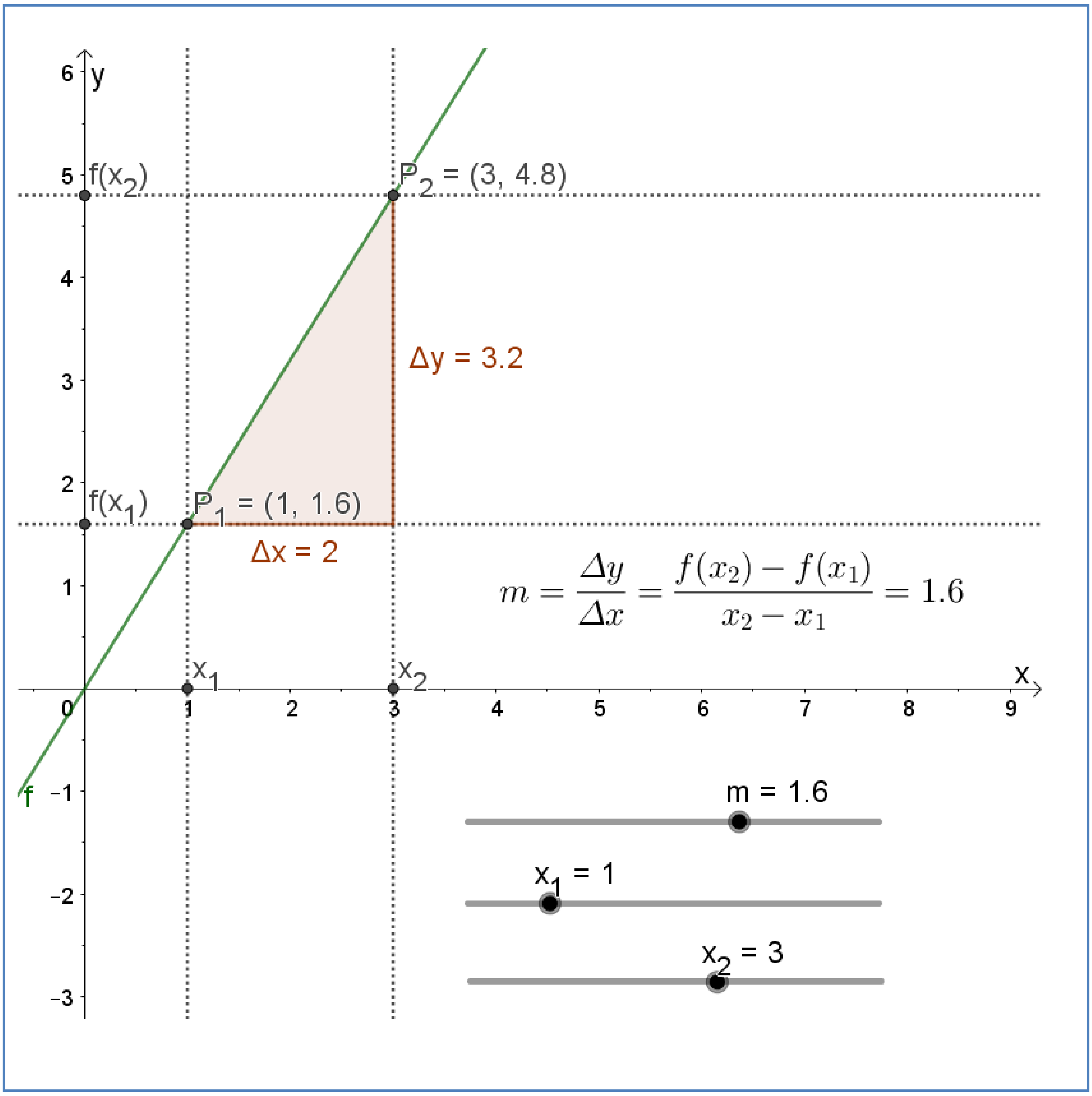
x	1	2	3	4	5
f(x)	1,6	3,2	4,8	6,4	8
m = f(x) : x	1,6 : 1 = 1,6	3,2 : 2 = 1,6	4,8 : 3 = 1,6	6,4 : 4 = 1,6	8 : 5 = 1,6

- Der Graph einer proportionalen Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung (0|0).
- Der Proportionalitätsfaktor m gibt die *Steigung* dieser Geraden an.
- Die Steigung einer Geraden kann man mithilfe eines *Steigungsdreiecks* und des *Differenzenquotienten* ermitteln.

---

[110] https://de.wikipedia.org/wiki/Proportionalit%C3%A4t#Mathematische_Definition
[111] Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, 2015, S. 74
[112] Siehe auch: Verhältnisgleichungen, S. 227

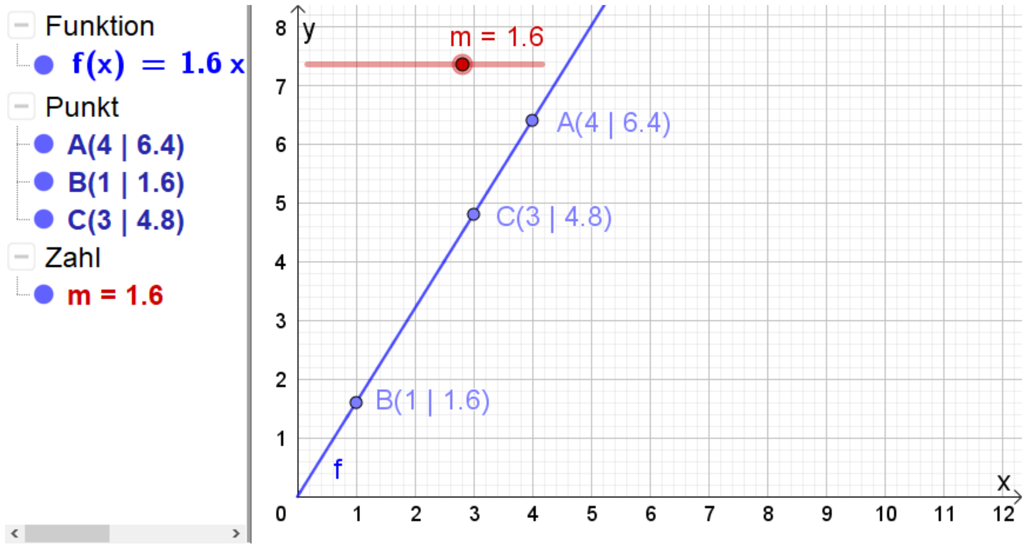
a) Veranschaulichung Steigungsdreieck und Differenzenquotient[113]



[113] Siehe: Steigungsdreieck und Differenzenquotient.ggb

b) Beispiel Bio-Äpfel[114]

4 Bio-Äpfel kosten 6,40 €. Wieviel kosten 3 Bio-Äpfel?[115]



Lösung mit dem Dreisatz[116]:

4 Äpfel kosten 6,40€ (siehe Punkt A).
1 Apfel kostet 1,60€ (siehe Punkt B).
3 Äpfel kosten 4,80€ (siehe Punkt C).

Lösung mit einer Funktionsgleichung:

$f(3) = 1{,}6 \cdot 3 = 4{,}8$

Dreisatz (proportional)

	Anzahl	Preis in €	
	4	6,4	
: 4			: 4
	1	1,6	
· 3			· 3
	3	4,8	

[114] proportionale Funktion.ggb

[115] Zu sehen ist der Graph einer Funktion $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Für das Bio-Apfel-Beispiel nutzen wir davon nur die Punkte mit einer x-Koordinate, die Element der natürlichen Zahlen ist.

[116] Siehe: Dreisatz (proportional).xlsx

c) Beispiel Prozentrechnung[117]

Berechnen Sie den Prozentwert W (Grundwert G = 295 und Prozentsatz p% = 75%)!

Berechnung über die Formel[118]:

Geg.:	Prozentsatz:	p% =	75,00%
	Grundwert:	G =	295,00

Ges.: Prozentwert: W

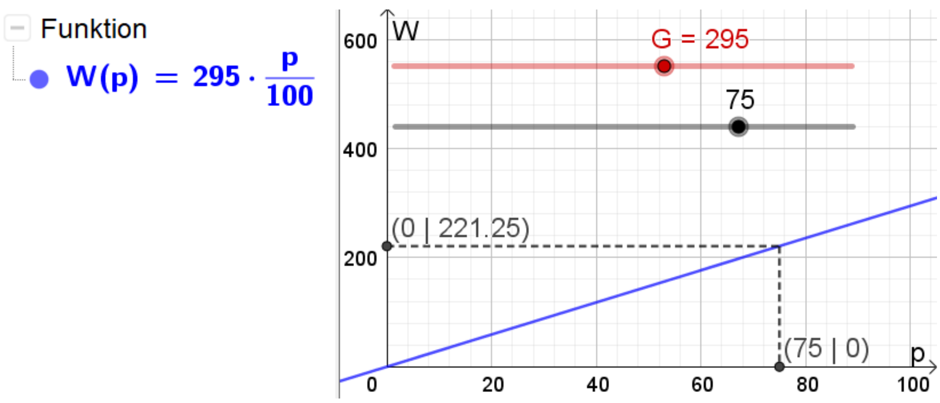
Ansatz: W = G · p%

Rechnung: W = 295,00 · 75,00% = 221,25

Berechnung mit dem Dreisatz:

295,00	≙	100,00%	|	:	100
2,95	≙	1,0000%	|	·	75,00
221,25	≙	75,00%			

Darstellung mit einer proportionalen Funktion[119]:



Der Prozentwert verhält sich bei festem Grundwert proportional zum Prozentsatz.

[117] Wichtig: „%“ bedeutet „1/100“.
[118] Siehe: Prozentrechnung.xlsx
[119] Siehe: proportionale Funktion - Prozentwert.ggb

7.2 Antiproportionale Funktionen[120]

Eine *antiproportionale* Funktion f besitzt folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = m \cdot \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

Hierbei wird m als *Proportionalitätsfaktor* bezeichnet.

Hinweise:

- Es ist auch die Darstellung $y = m \cdot \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ möglich[121].
- Es gilt für alle x und die dazugehörigen f(x) bzw. y:

  $$m = f(x) \cdot x \qquad \text{bzw.} \qquad m = y \cdot x$$

  Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Produktgleichheit*. Erstellt man für die Funktion f mit der Funktionsgleichung

  $$f(x) = 1{,}6 \cdot \frac{1}{x}$$

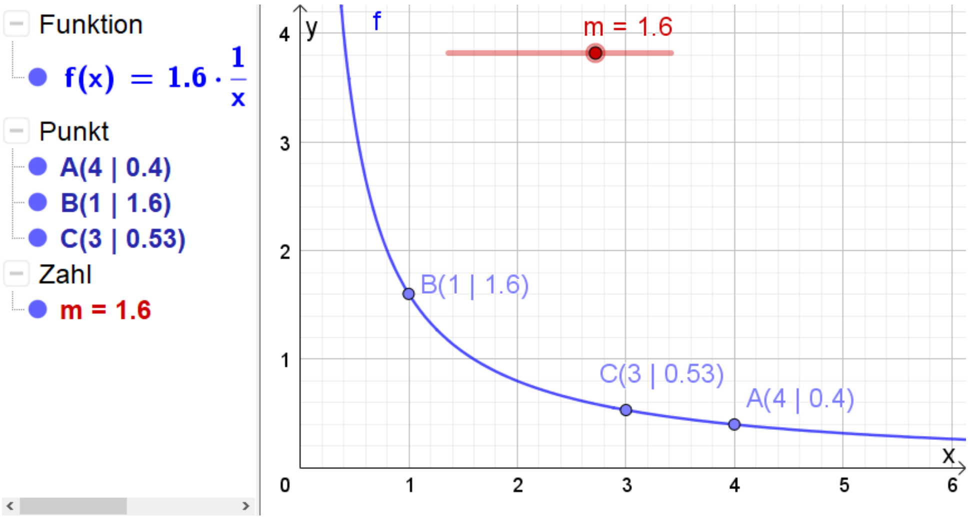
  für ausgewählte x eine Wertetabelle, wird dies bestätigt:

x	1	2	3	4
f(x)	1,6	0,8	≈ 0,533	0,4
m = f(x) · x	1,6 · 1 = 1,6	0,8 · 2 = 1,6	0,533 · 3 ≈ 1,6	0,4 · 4 = 1,6

- Der Graph einer antiproportionalen Funktion ist eine Hyperbel.

[120] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Reziproke_Proportionalit%C3%A4t
[121] Siehe: Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, 2015, S. 77

Beispiel[122]: 4 Kinder wollen sich zusammen einen Bio-Apfel kaufen. Jedes Kind zahlt 0,4 €. Wieviel würde jedes Kind zahlen, wenn sich nur noch 3 Kinder beteiligen wollten?



Lösung mit dem Dreisatz[123]:

4 Kinder zahlen jeweils 0,40€ (siehe A).
1 Kind zahlt 1,60€ (siehe B).
3 Kinder zahlen jeweils 0,53€ (siehe C).

Dreisatz (antiproportional)

	Anzahl	Preis in €	
: 4	4	0,4	· 4
· 3	1	1,6	: 3
	3	0,53333333	

Lösung mit einer Funktionsgleichung:

$$f(3) = 1{,}6 \cdot \frac{1}{3} \approx 0{,}53$$

[122] Siehe: antiproportionale Funktion.ggb
[123] Siehe: Dreisatz (antiproportional).xlsx

Übung[124]: Familie Neumann hat ein neues Auto gekauft. Für den Benzinverbrauch sind in den Fahrzeugpapieren Richtwerte angegeben.

Bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h reicht eine Tankfüllung etwa 900 km. Wie viel Kilometer können die Neumanns jeweils bei den angegebenen Geschwindigkeiten mit einer Tankfüllung zurücklegen?

Benzinverbrauch:	8,2 l pro 100 km bei Tempo 60
	7,8 l pro 100 km bei Tempo 100
	8,0 l pro 100 km bei Tempo 120
	8,3 l pro 100 km bei Tempo 140

[124] Siehe Übungsaufgaben von Cornelsen im Ordner Übungsaufgaben auf Schulniveau

Lösung[125]:

Man erstelle eine Tabelle:

Geschwindigkeit in km/h	Strecke in km	Verbrauch in l/100km	Verbrauch in l/km	Tankfüllung in l
120	900	8	0,08	900*0,08=72

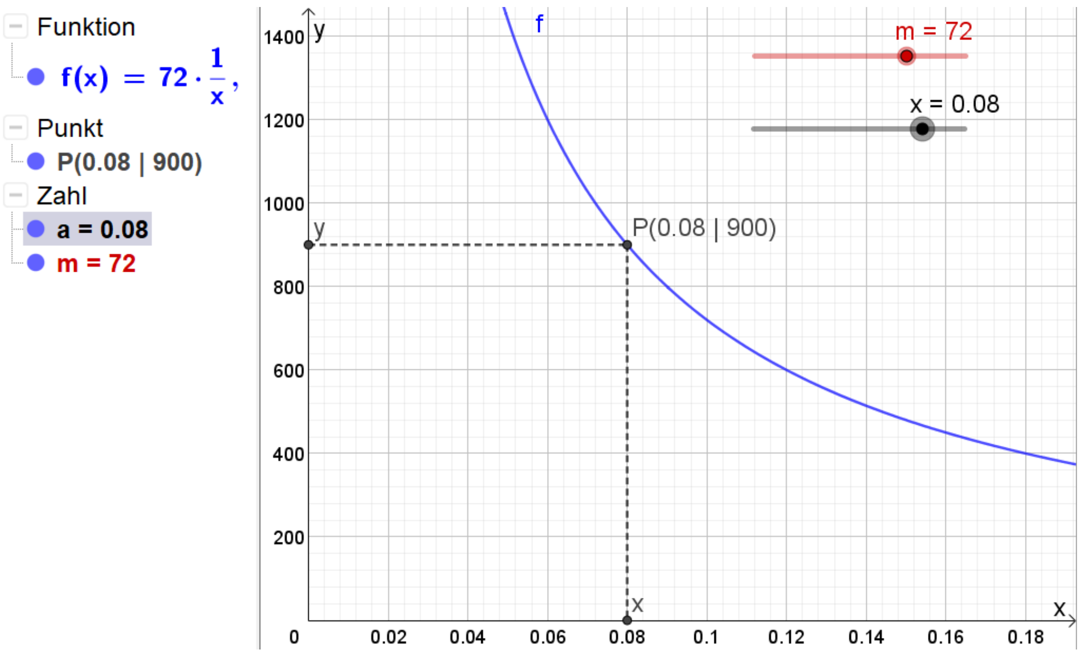
Die *Geschwindigkeit* verhält sich zum *Verbrauch* weder proportional noch antiproportional. Zwischen dem *Verbrauch* und der zurücklegbaren *Strecke* besteht jedoch Antiproportionalität: Je höher der Verbrauch, desto geringer die Strecke, die zurückgelegt werden kann.

Per Dreisatz wird folgendermaßen gerechnet:

Dreisatz (antiproportional)

	Verbrauch in l/km	Strecke in km	
	0,08	900	
: 0,08			· 0,08
	1	72	
· 0,082			: 0,082
	0,082	878,0487805	

Mit GeoGebra wird der Sachverhalt so dargestellt:



[125] Siehe: „Dreisatz (antiproportional) Tankfüllung.xlsx“ und „Kilometer mit Tankfüllung.ggb“

7.2.1 Übungsaufgaben auf Schulniveau

Übungen:

Nutzen Sie bitte den Ordner „Proportionale und antiproportionale Funktionen (heranführende Übungsaufgaben auf Schulniveau)“.

7.3 Lineare Funktionen

Eine lineare Funktion[126,127] besitzt folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = m \cdot x + n$$

Übung:

Stellen Sie mithilfe von GeoGebra die Funktion f mit obiger Funktionsgleichung dar. Nutzen Sie dafür die Schieberegler.

1. Welche Bedeutung haben die Parameter m und n?
2. *Berechnen* Sie, an welcher Stelle der Graph die x-Achse schneidet.
3. Geben Sie eine weitere Funktionsgleichung ein: $g(x) = q \cdot x + r$
4. Wählen Sie für m=-0,2, n=2, q=1 und r=-4 und bestimmen Sie *rechnerisch* den Schnittpunkt S der Graphen von f und g.

[126] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Funktion
[127] Siehe: Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, 2015, S. 85

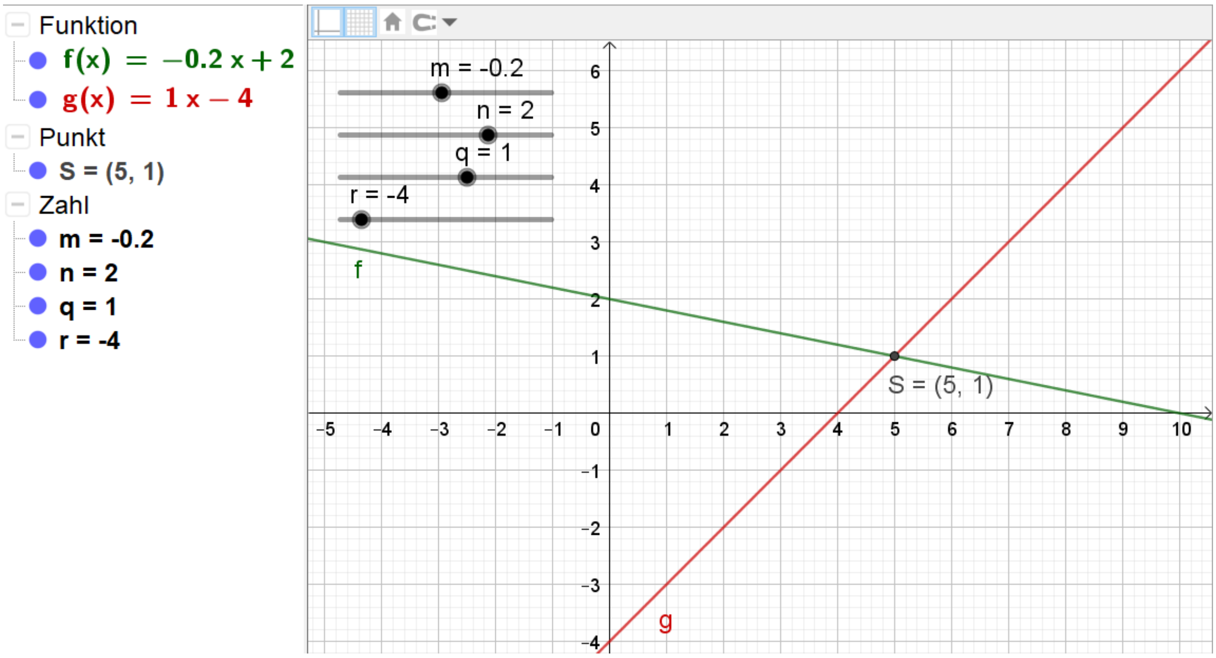
Lösung:

1. m ist die Steigung (Siehe S. 117) und n der y-Achsenabschnitt.

2. $f(x) = 0 = m \cdot x + n$ liefert $x = \frac{-n}{m}$.

3. Siehe Datei „Schnittpunkt.ggb“.

4. $f(x) = g(x)$ liefert S(5|1).



Hinweis: Aus zeitlichen Gründen war es mir bisher leider nicht möglich, das Skript an dieser Stelle zu vervollständigen. Stattdessen sei auf folgende Links verwiesen:

- Lineare Funktion
    - Graph
    - Bestimmung des Funktionsterms aus zwei Punkten (siehe auch S. 128)
    - Funktionsgleichung
    - Achsenschnittpunkte
    - Steigung
    - Funktionsgleichung aufstellen
    - Schnittpunkt zweier Geraden

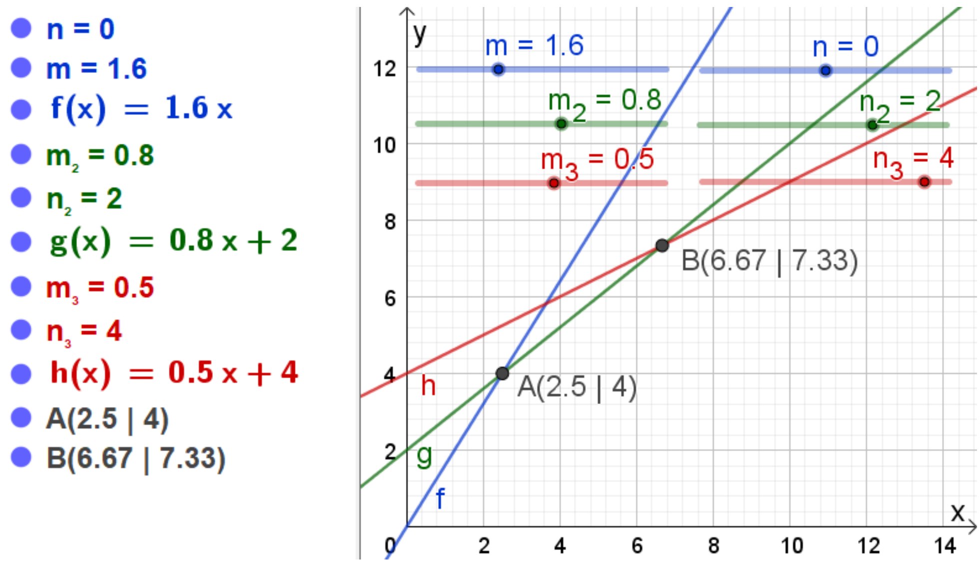
a) Beispiel Bio-Äpfel

Es gibt 3 Möglichkeiten, Bio-Äpfel zu kaufen:

1. Im Onlinehandel kostet das Stück 1,60 €.
2. Beim Bauern G darf man das Stück für 0,8 € pflücken, zahlt aber 2 € Eintritt.
3. Der Nachbar H verkauft das Stück für 50 Cent, verlangt aber eine Grundgebühr von 4 €.

Frage: Wann ist welches Angebot am günstigsten?

GeoGebra-Lösung[128]:



Übung:

Beantworten Sie die Aufgabe mit Hilfe obiger Abbildung. Finden Sie danach auch rechnerische Lösungsansätze und ermitteln Sie die Ergebnisse „per Hand“.

Hinweis:
Lineare Funktionen lassen sich auf ganz $\mathbb{R}$ definieren. Dies war für dieses Beispiel jedoch nicht sinnvoll. Auch kann die Steigung m natürlich negativ sein.

[128] Siehe: lineare Funktionen (Aufgabe).ggb

b) Erstellung einer Geradengleichung aus 2 gegebenen Punkten

Beispiel[129]:

Geg.: Punkt A (-4 | 2)

Punkt B (6 | -1)

Ges.: Geradengleichung (lineare Funktionsgleichung)

$$f(x) = m \cdot x + n$$

1. Steigung bestimmen:

Ansatz: $$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{(2) - (-1)}{(-4) - (6)} = \frac{3}{-10} = \frac{3}{-10}$$

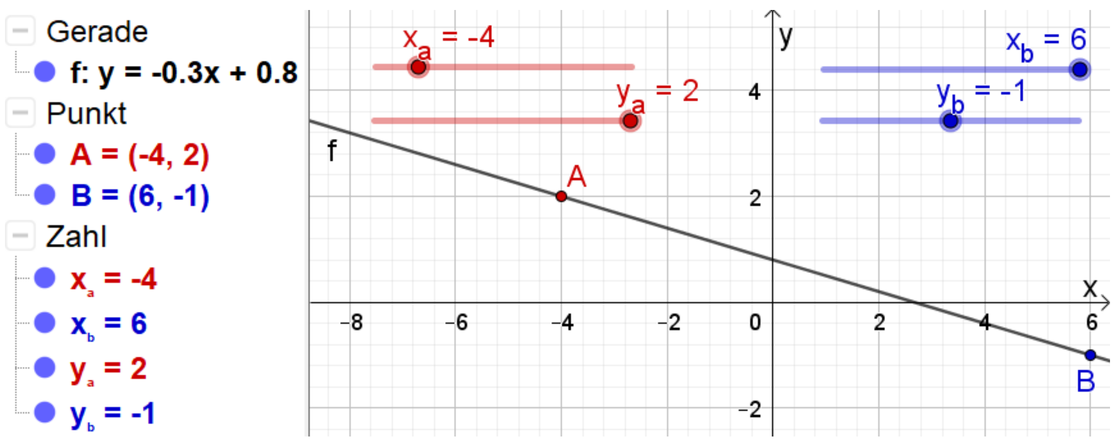
2. Gegebenen Punkt (z.B. A) einsetzen:

Ansatz: $$f(x) = \frac{3}{-10} \cdot x + n$$

$$2 = \frac{3}{-10} \cdot (-4) + n$$

$$n = 0{,}8$$

Veranschaulichung in GeoGebra[130]:

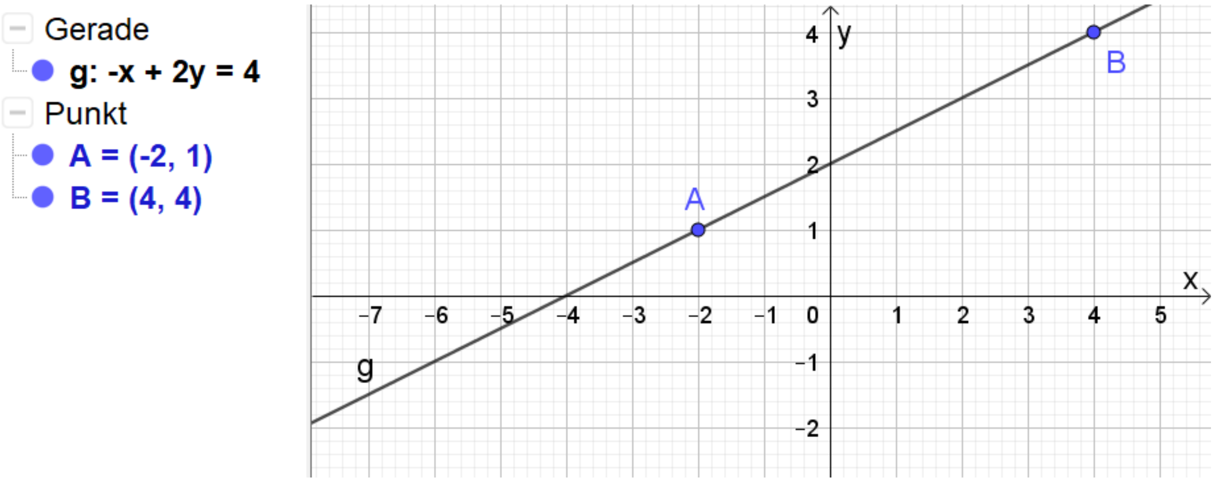


[129] Siehe: Geradengleichung (2 Punkte), Umwandlung allg. Form in Scheitelpunktform, pq-Formel.xlsx
[130] Siehe: Geradengleichung aus zwei Punkten erstellen.ggb

c) Alternative Darstellung einer Geraden im Koordinatensystem

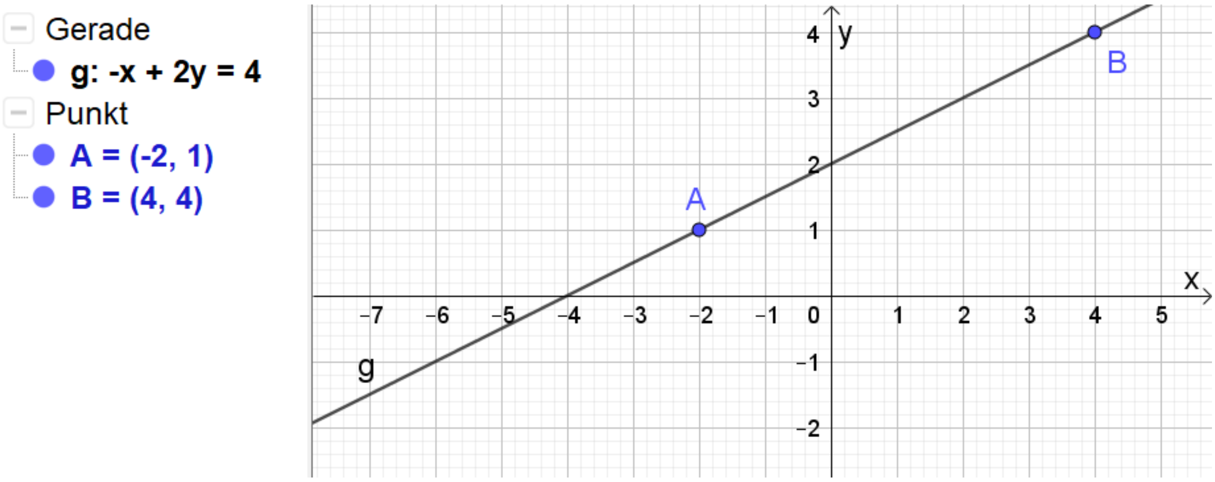
Übung:

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B (siehe Abbildung).



Warum kann man die Gerade g mit Hilfe der Gleichung $-x + 2y = 4$ beschreiben?

Lösung:



Man weiß, dass die Funktionsgleichung die Form $g(x) = mx + n$ besitzt.

Aus den Punkten A und B ermittelt man per Differenzenquotient die Steigung m der Geraden:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1-4}{-2-4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Es ergibt sich:

$$g(x) = 0{,}5x + n$$

Nun setzt man die Koordinaten eines Punktes, z.B. von Punkt A ein

$$1 = 0{,}5 \cdot (-2) + n \quad \Leftrightarrow \quad n = 2$$

und erhält:

$$g(x) = 0{,}5x + 2$$

Es lässt sich $g(x)$ durch y ersetzen:

$$y = 0{,}5x + 2$$

Diese Gleichung ist äquivalent zur Gleichung $-x + 2y = 4$, wie man leicht zeigt:

$$-x + 2y = 4 \qquad | + x$$

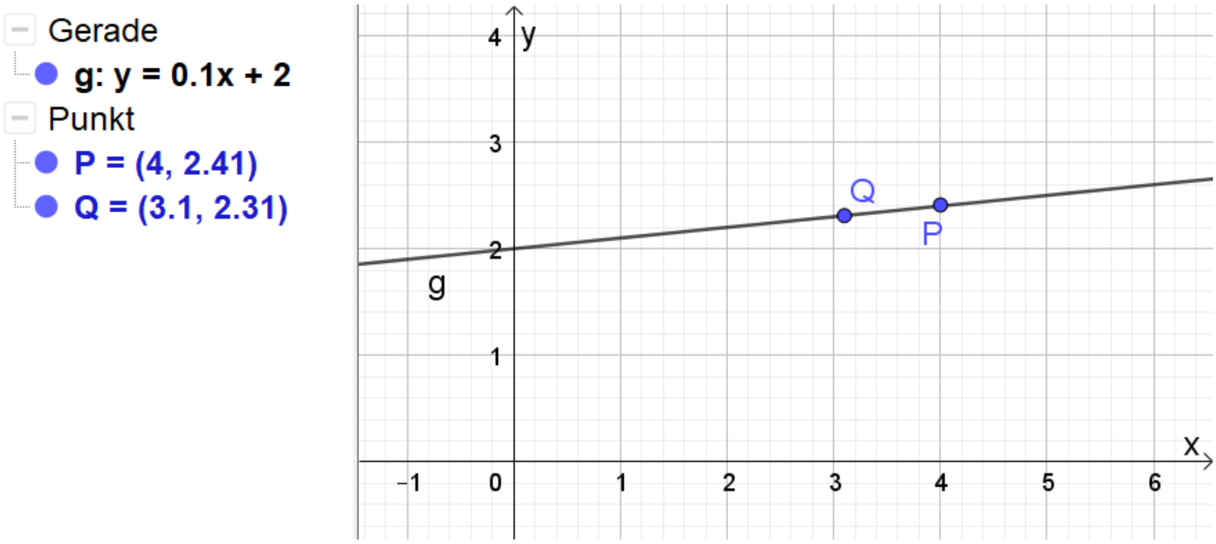
$$\Leftrightarrow \quad 2y = x + 4 \qquad |: 2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 0{,}5x + 2$$

d) Punktprobe

Beispiel:

Überprüfen Sie *rechnerisch*, ob die Punkte P und Q auf der Geraden g liegen.



Lösung:

Man setzt die Koordinaten der Punkte in die Geradengleichung ein und überprüft, ob eine wahre Aussage entsteht.

Punkt P:

$$2{,}41 \neq 0{,}1 \cdot 4 + 2 = 2{,}4$$

Der Punkt P liegt demnach nicht auf der Geraden g.

Punkt Q:

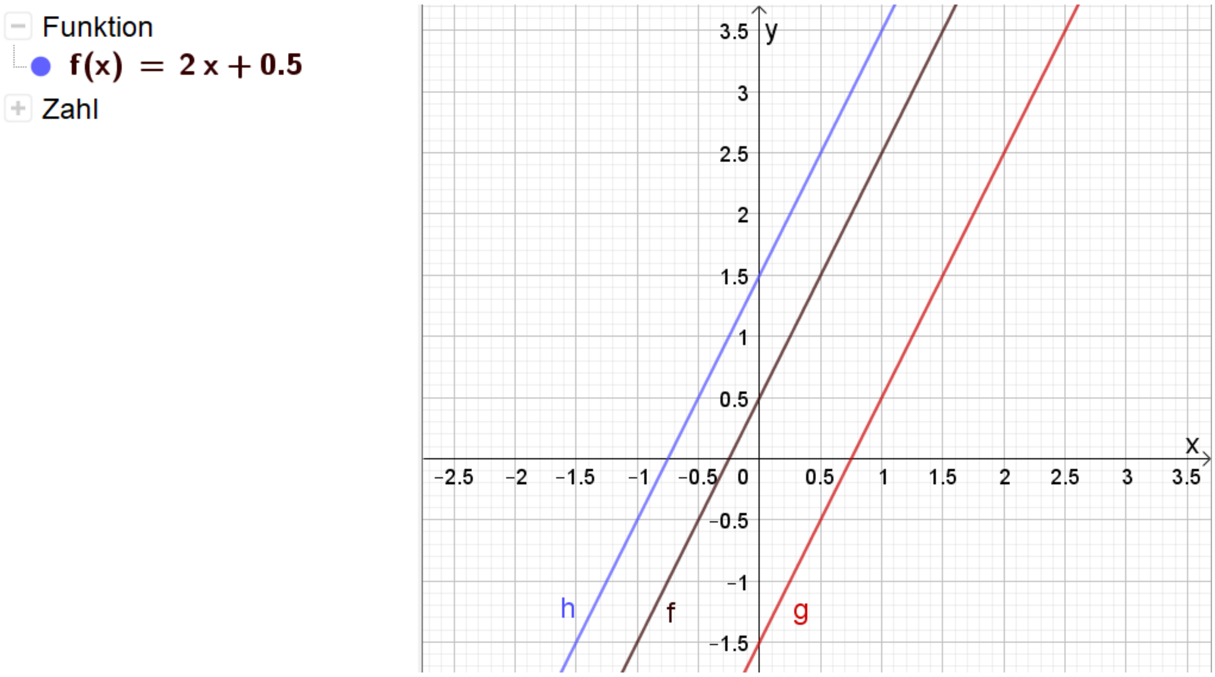
$$2{,}31 = 0{,}1 \cdot 3{,}1 + 2 = 0{,}31 + 2 = 2{,}31$$

Der Punkt Q liegt demnach auf der Geraden g.

e) Verschieben einer Geraden

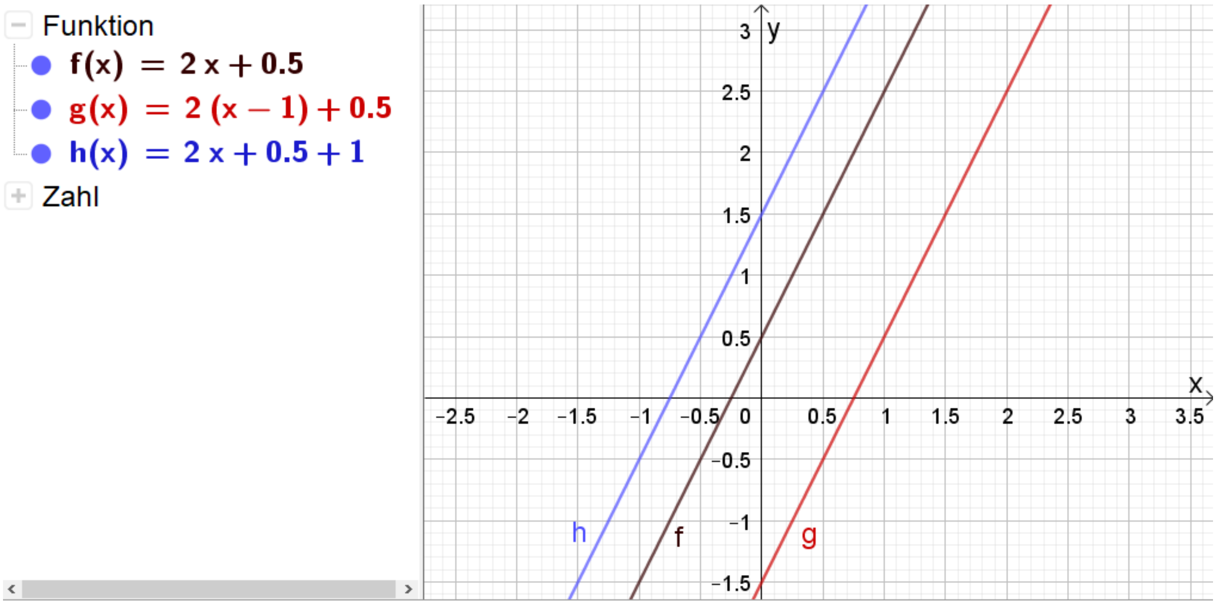
Übung:

Eine Gerade ist gegeben durch den Graphen der Funktion f:



1. Durch Verschiebung der Gerade um eine Einheit in y-Achsenrichtung erhält man den Graphen der Funktion h. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.
2. Durch Verschiebung der Gerade um eine Einheit in x-Achsenrichtung erhält man den Graphen der Funktion g. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

Lösung:



Zu 1. Die Verschiebung um 1 in y-Achsenrichtung erzielt man, indem man zu allen Funktionswerten 1 addiert:

$$h(x) = 2x + 0{,}5 + 1 = 2x + 1{,}5$$

Zu 2. Die Verschiebung um 1 in x-Achsenrichtung erzielt man, indem man anstelle von x den Term $(x - 1)$ einsetzt.

$$g(x) = 2(x - 1) + 0{,}5 = 2x - 2 + 0{,}5 = 2x - 1{,}5$$

Dies lässt sich dadurch erklären, dass sich mit dem Graphen auch die Nullstelle der Funktion verschiebt. Der bisherige x-Wert, der zu einem $f(x) = 0$ führt, soll nun um 1 größer sein. Also muss man von ihm 1 abziehen.

7.3.1 Übungsaufgaben auf Schulniveau

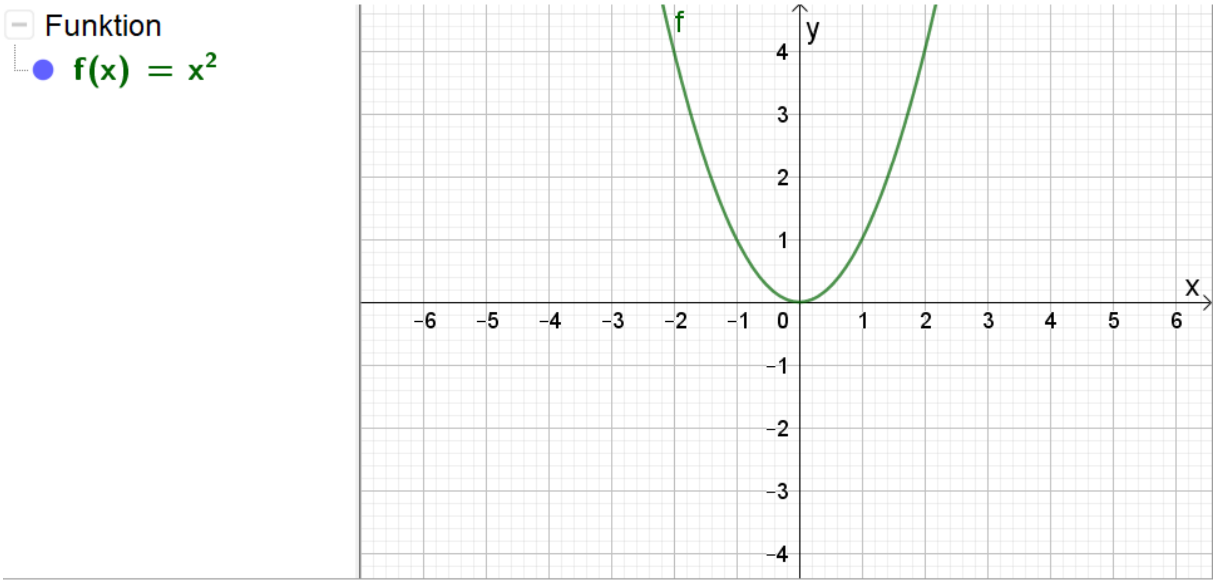
Übungen:

Nutzen Sie bitte den Ordner „Lineare Funktionen (heranführende Übungsaufgaben auf Schulniveau)“

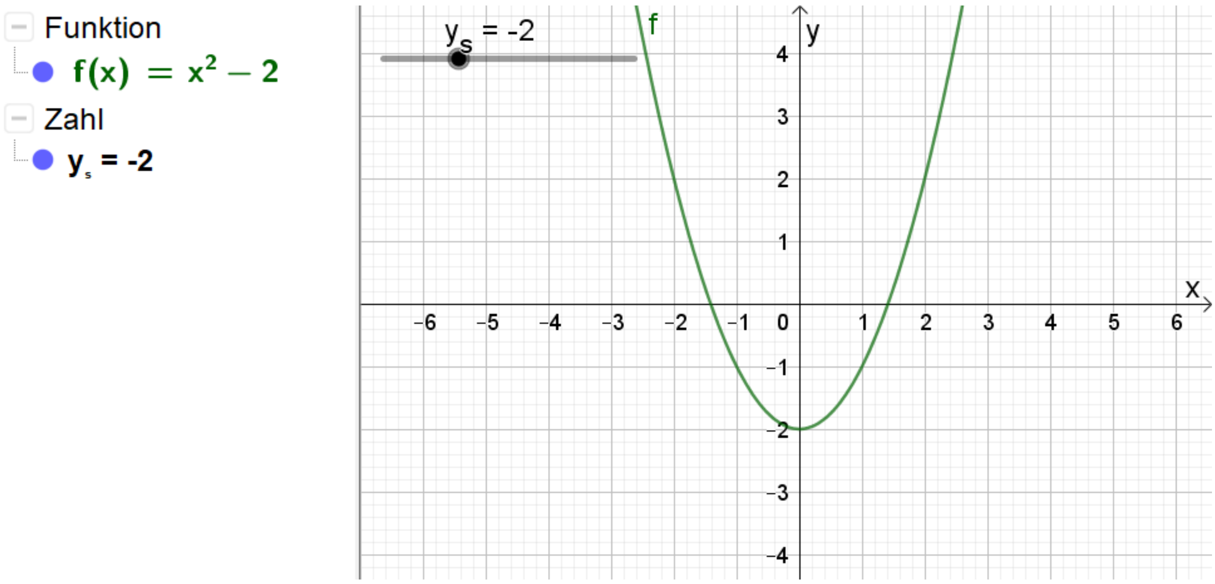
7.4 Quadratische Funktionen

a) Vorbetrachtungen

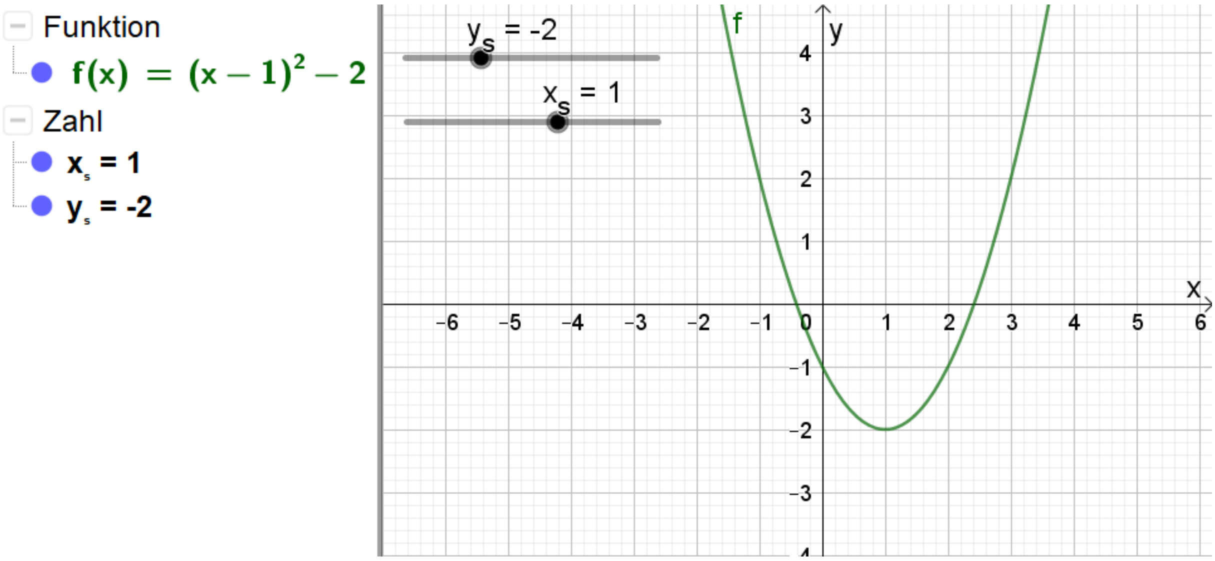
Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = x^2$ wird als *Normalparabel* bezeichnet und sieht folgendermaßen aus:



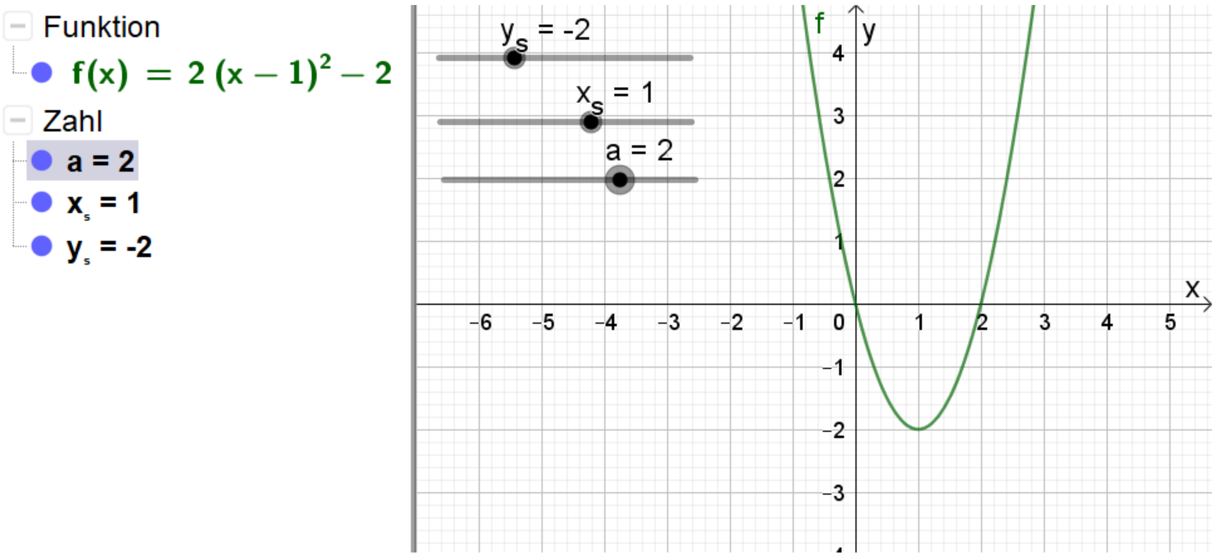
Eine Verschiebung des Scheitelpunktes parallel zur y-Achse erreicht man durch Addition eines Wertes y_s :



Eine Verschiebung des Scheitelpunktes parallel zur x-Achse erreicht man durch den Parameter x_s :



Eine Streckung/Stauchung/Spiegelung erreicht man durch den Parameter a:



b) Allgemeine Form und Scheitelpunktform

Wir betrachten vorerst zwei Formen von quadratischen Funktionsgleichungen:

Allgemeine Form[131]:	Scheitelpunktform[132]:
$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$	$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \quad (a \neq 0)$

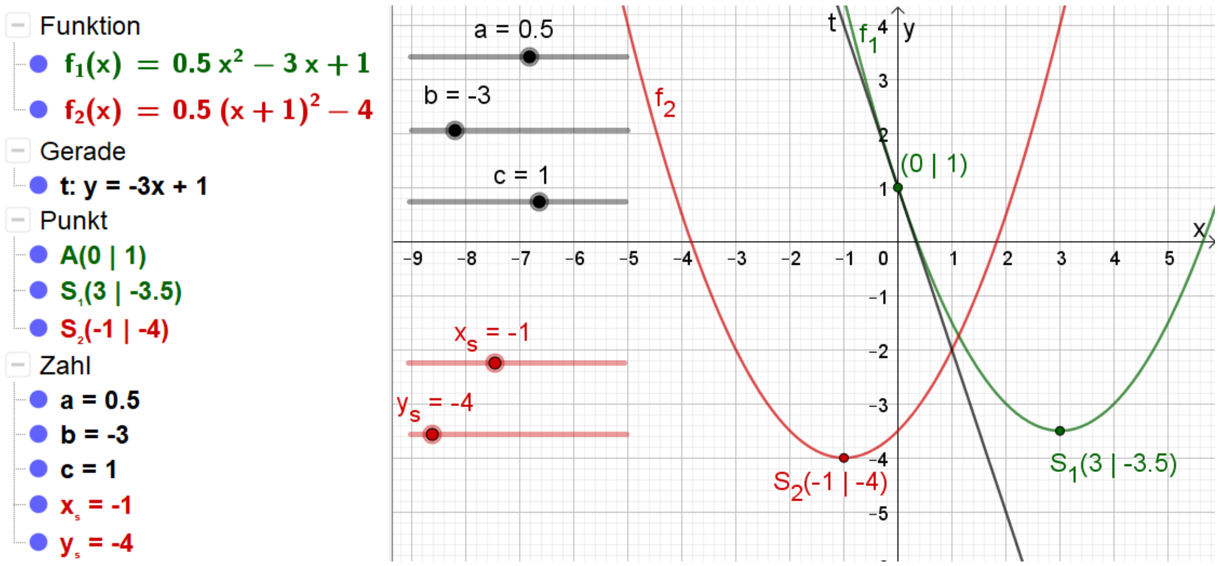
Beispiel: Die Funktion f_1 liegt in der allgemeinen Form

$$f_1(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a = 0{,}5; b = -3; c = 1)$$

und die Funktion f_2 in der Scheitelpunktform

$$f_2(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \quad (a = 0{,}5;\ x_s = -1;\ y_s = -4)$$ vor[133].

Betrachten Sie die Parameter[134] a, b, c, x_s und y_s und welche Rolle sie hinsichtlich des Graphen der jeweiligen Funktion spielen.



Bedeutung der Parameter:

a: Streckung/Stauchung/Spiegelung

b: Parabelsteigung im Schnittpunkt mit der y-Achse / negative x-Koordinate des S.-Punkts

c: y-Koordinate des Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse

x_s: x-Koordinate des Scheitelpunkts

y_s: y-Koordinate des Scheitelpunkts

[131] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Funktion#Allgemeine_quadratische_Funktion

[132] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Funktion#Scheitelpunkt

[133] Siehe: allgemeine Form und Scheitelpunktform.ggb

[134] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Funktion#Parameter_a

In obigem Bespiel gilt offensichtlich, dass $f_1(x) \neq f_2(x)$ ist. Dies muss jedoch nicht zwangsläufig so sein: Es ist möglich, die Parameter so zu wählen, dass *die allgemeine Form und die Scheitelpunktform dieselbe Funktion darstellen*, d.h. dass die Funktionsgraphen von f_1 und f_2 identisch sind.

c) Umwandlung von der Scheitelpunktform in die allgemeine Form

Beispiel:

Eine quadratische Funktion f liegt in der *Scheitelpunktform* vor:

$$f(x) = 0{,}5(x + 1)^2 - 4$$

Diese soll in die *allgemeine Form* überführt werden.

Dies erreicht man durch Ausmultiplizieren des Funktionsterms:

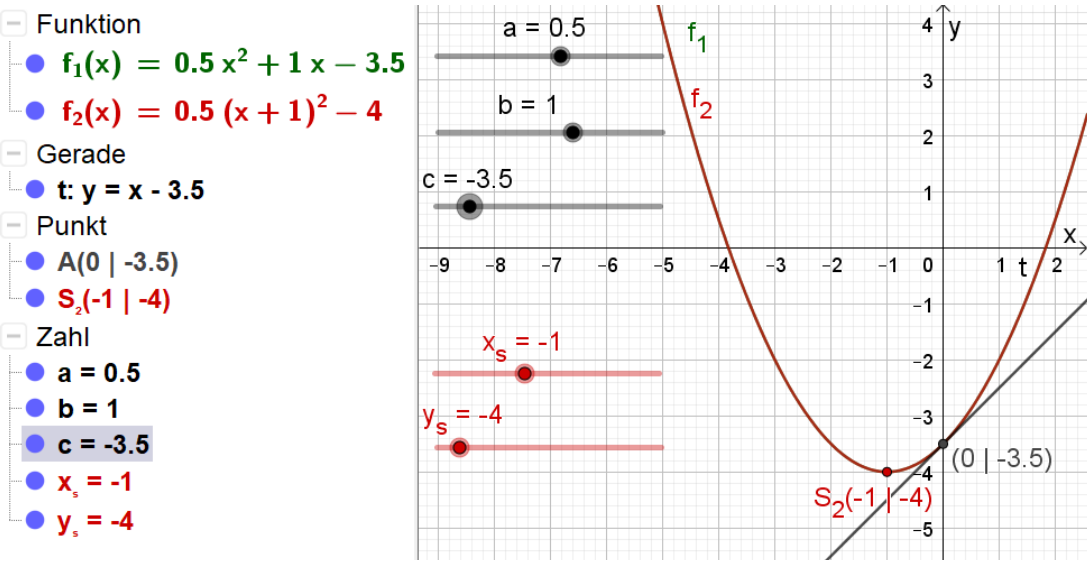
$$0{,}5(x + 1)^2 - 4 \overset{bin.Formel}{\triangleq} 0{,}5(x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2) - 4 = 0{,}5x^2 + x + 0{,}5 - 4$$

$$= 0{,}5x^2 + x - 3{,}5$$

Die *allgemeine Form* der quadratischen Funktion f ist also:

$$f(x) = 0{,}5x^2 + x - 3{,}5$$

GeoGebra bestätigt dies[135]:



Es ist auch möglich, eine Umwandlung von der allgemeinen Form in die Scheitelpunktform vorzunehmen. Hierfür benötigt man jedoch die *quadratische Ergänzung*.

[135] Siehe: allgemeine und Scheitelpunktform (identisch).ggb

d) Quadratische Ergänzung[136].

Zum Term $x^2 + p \cdot x$ heißt der Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ die *quadratische Ergänzung* .

Es gilt aufgrund der binomischen Formeln : $x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

Beispiel:

☐ Rechnungen ausblenden

Die quadratische Ergänzung zu $x^2 + \frac{9}{6}x$ ist $\left(\frac{\frac{9}{6}}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{6 \cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{9}{12}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

Es gilt demnach: $x^2 + \frac{9}{6}x = \left(x^2 + \frac{9}{6}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$

$= \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$

---

[136] Siehe: Geradengleichung (2 Punkte), Umwandlung allg. Form in Scheitelpunktform, pq-Formel.xlsx

Übung:

Zum Term $x^2 + p \cdot x$ heißt der Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ die *quadratische Ergänzung* .

Es gilt aufgrund der binomischen Formeln : $x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

Beispiel:

☑ Rechnungen ausblenden

Die quadratische Ergänzung zu $x^2 + \frac{1}{3} x$ $\left(\quad \right) \left(\quad \right) \left(\quad \right) \left(\quad \right)$

Es gilt demnach: $x^2 + \frac{1}{3} x$ $\left(\quad \right)$

$\left(\quad \right)$

Lösung:

Zum Term $x^2 + p \cdot x$ heißt der Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ die *quadratische Ergänzung* .

Es gilt aufgrund der binomischen Formeln : $x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

Beispiel:

☐ Rechnungen ausblenden

Die quadratische Ergänzung zu $x^2 + \frac{1}{3}x$ ist $\left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3 \cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$.

Es gilt demnach: $x^2 + \frac{1}{3}x = \left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) - \frac{1}{36}$

$= \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}$

e) Umwandlung von der allgemeinen Form in die Scheitelpunktform [137]

allgemeine Form: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{1} \cdot x + \frac{-7}{2}$

Faktor vor x^2 ausklammern

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot x + \frac{2}{1} \cdot \frac{-7}{2} \right)$$

zusammenfassen

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{2}{1} \cdot x + \frac{-7}{1} \right)$$

quadratische Ergänzung addieren und subtrahieren

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{2}{1} \cdot x + \frac{4}{4} - \frac{4}{4} + \frac{-7}{1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\left(x + \frac{2}{2} \right)^2}_{\text{wurde durch bin. Formel erzeugt}} - \frac{4}{4} + \frac{-7}{1} \right)$$

Scheitelpunktform: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{2} \right)^2 + \frac{-4}{1}$

[137] Siehe: Geradengleichung (2 Punkte), Umwandlung allg. Form in Scheitelpunktform, pq-Formel.xlsx

Übung:

allgemeine Form: $f(x) = \frac{2}{1} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}$

Faktor vor x² ausklammern

zusammenfassen

quadratische Ergänzung addieren und subtrahieren

wurde durch bin. Formel erzeugt

Scheitelpunktform:

Scheitelpunktform:

Lösung:

allgemeine Form: $f(x) = \frac{2}{1} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}$

Faktor vor x^2 ausklammern

$$f(x) = \frac{2}{1} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right)$$

zusammenfassen

$$f(x) = \frac{2}{1} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{8} \right)$$

quadratische Ergänzung addieren und subtrahieren

$$f(x) = \frac{2}{1} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{64} - \frac{1}{64} + \frac{1}{8} \right) = \frac{2}{1} \cdot \left(\underbrace{\left(x + \frac{1}{8} \right)^2}_{\text{wurde durch bin. Formel erzeugt}} - \frac{1}{64} + \frac{1}{8} \right) = \frac{2}{1} \cdot \left(\left(x + \frac{1}{8} \right)^2 + \frac{56}{512} \right)$$

Scheitelpunktform: $f(x) = \frac{2}{1} \cdot \left(x + \frac{1}{8} \right)^2 + \frac{112}{512}$

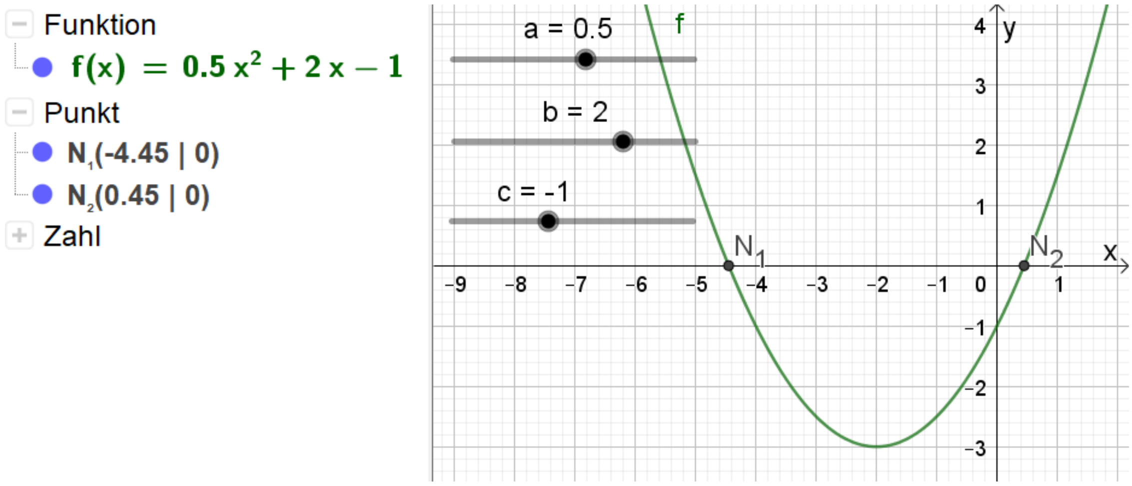
Scheitelpunktform: $f(x) = \frac{2}{1} \cdot \left(x + \left(1/8 \right) \right)^2 + \left(7/32 \right)$

f) Nullstellen einer quadratischen Funktion

Die *Nullstellen* einer Funktion f sind die x-Werte, für die gilt: $f(x) = 0$.

Beispiel[138]:

Sei eine Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1$ gegeben. GeoGebra stellt diese folgendermaßen dar:



Per Ablesen erhält man folgende Nullstellen:

$x_1 \approx -4{,}45$

$x_2 \approx 0{,}45$

Wichtiger Hinweis:
Die Null*stellen* sind nur die *x-Koordinaten* der Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse. Eine Nullstelle ist also eine Zahl und kein Zahlenpaar.

Eine quadratische Funktion kann, abhängig von der Parabelöffnung (nach oben oder unten) und der Lage des Scheitelpunktes (unterhalb, oberhalb oder genau auf der x-Achse)

- 2 Nullstellen besitzen
- 1 Nullstelle besitzen oder
- keine Nullstelle besitzen.

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion berechnet man mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (kurz: p-q-Formel)[139]:

[138] Siehe: allgemeine Form (Nullstellen).ggb
[139] Siehe: Geradengleichung (2 Punkte), Umwandlung allg. Form in Scheitelpunktform, pq-Formel.xlsx

g) p-q-Formel

Lösungsformel zur Bestimmung der Nullstellen quadratischer Funktionen

☐ Rechnungen ausblenden

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{1}x + \frac{-1}{1} = 0$$

p/q-Formel ist **noch nicht** anwendbar, da vor dem x^2 ein Faktor ungleich 1 steht. Also wird mit dem Reziproken des Faktors multipliziert.

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1}x + \frac{2}{1} \cdot \frac{-1}{1} = 0$$

zusammenfassen

$$f(x) = x^2 + \underbrace{\frac{4}{1}}_{p}x + \underbrace{\frac{-2}{1}}_{q} = 0$$

Vorraussetzung für p/q-Formel ist erfüllt.

$$x_{1,2} = -\frac{\frac{4}{1}}{2} \pm \left(\left(\frac{\frac{4}{1}}{2} \right)^2 - \frac{-2}{1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Die Nullstellen der Funktion liegen, *falls vorhanden (!)*, bei

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$x_1 =$	-2	+	2,449489743	=	0,449489743
$x_2 =$	-2	-	2,449489743	=	-4,449489743

1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ $\Rightarrow$ Wurzel nicht definiert $\Rightarrow$ *keine* Nullstellen

2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ $\Rightarrow$ genau *eine* Nullstelle

3. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ $\Rightarrow$ genau *zwei* Nullstellen

Übung: Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f, g und h.

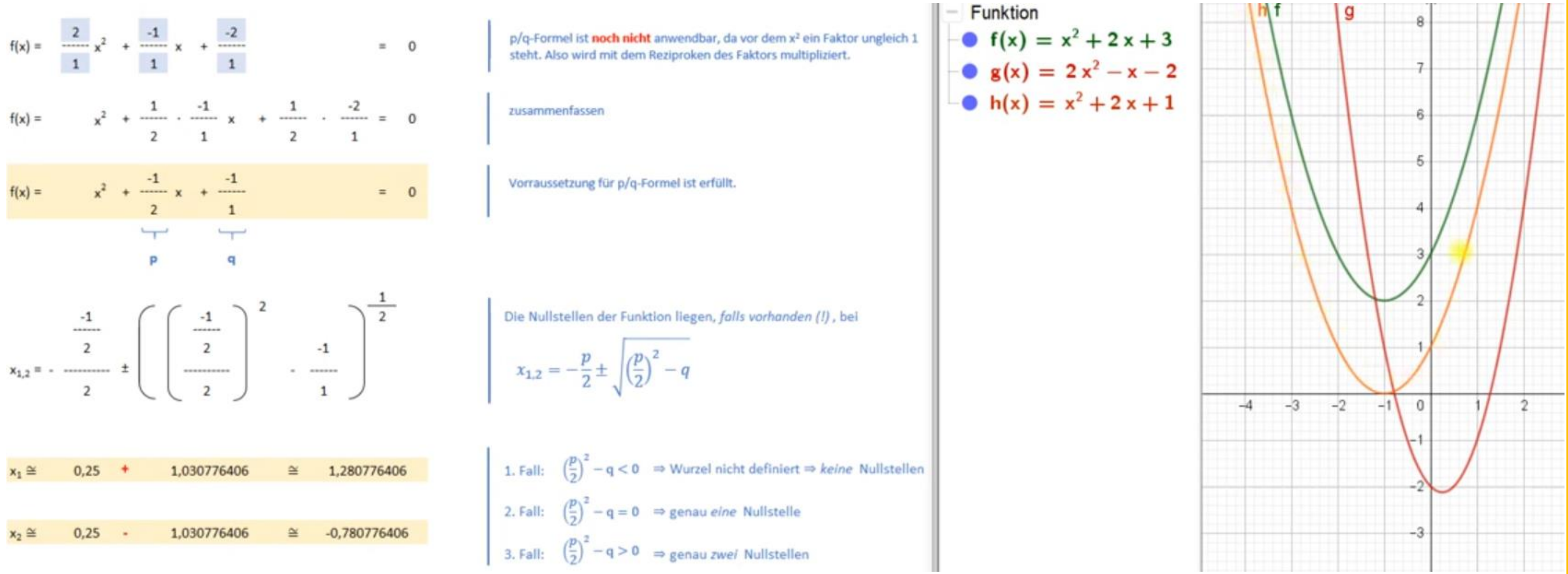
Funktion

$f(x) = x^2 + 2x + 3$

$g(x) = 2x^2 - x - 2$

$h(x) = x^2 + 2x + 1$

Lösung (siehe auch https://youtu.be/AxyL9SNSzGM):



h) Allgemeine Form, Scheitelpunktform und faktorisierte Form

Für $a \neq 0$ gibt es neben der *allgemeinen Form* und *Scheitelpunktform* auch noch die *faktorisierte Form:*

Allgemeine Form:	Scheitelpunktform:	Faktorisierte Form:
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
	Es können direkt abgelesen werden:	
Schnittpunkt mit y-Achse: $(0\|c)$ Streckfaktor a	Scheitelpunkt: $(x_s\|y_s)$ Streckfaktor a	Nullstellen: x_1 und x_2 Streckfaktor a

Beispiel:

Sei eine Funktion f in der *faktorisierten Form* mit $f(x) = 0{,}5(x - 3)(x + 4)$ gegeben.

Man liest die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -4$ ab.

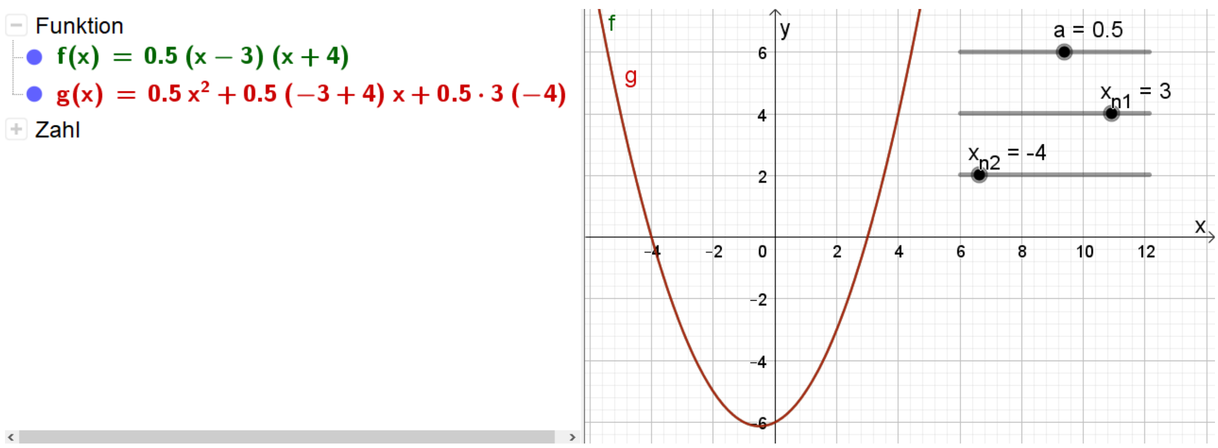
Durch Ausmultiplizieren den Funktionsterms ergibt sich die *allgemeine Form*:

$$f(x) = 0{,}5(x - 3)(x + 4) = 0{,}5(x^2 + 4x - 3x - 12) = 0{,}5(x^2 + x - 12)$$

$$= 0{,}5x^2 + 0{,}5x - 6$$

An dieser kann man erkennen, dass die y-Achse im Punkt $(0| - 6)$ geschnitten wird.

GeoGebra[140] liefert:



[140] Siehe faktorisierte Form.ggb

7.4.1 Übungsaufgaben auf Schulniveau

Bitte beachten Sie auch den Ordner „Quadratische Funktionen (heranführende Übungsaufgaben auf Schulniveau)“

7.5 Übungsaufgabe zu den linearen und quadratischen Funktionen

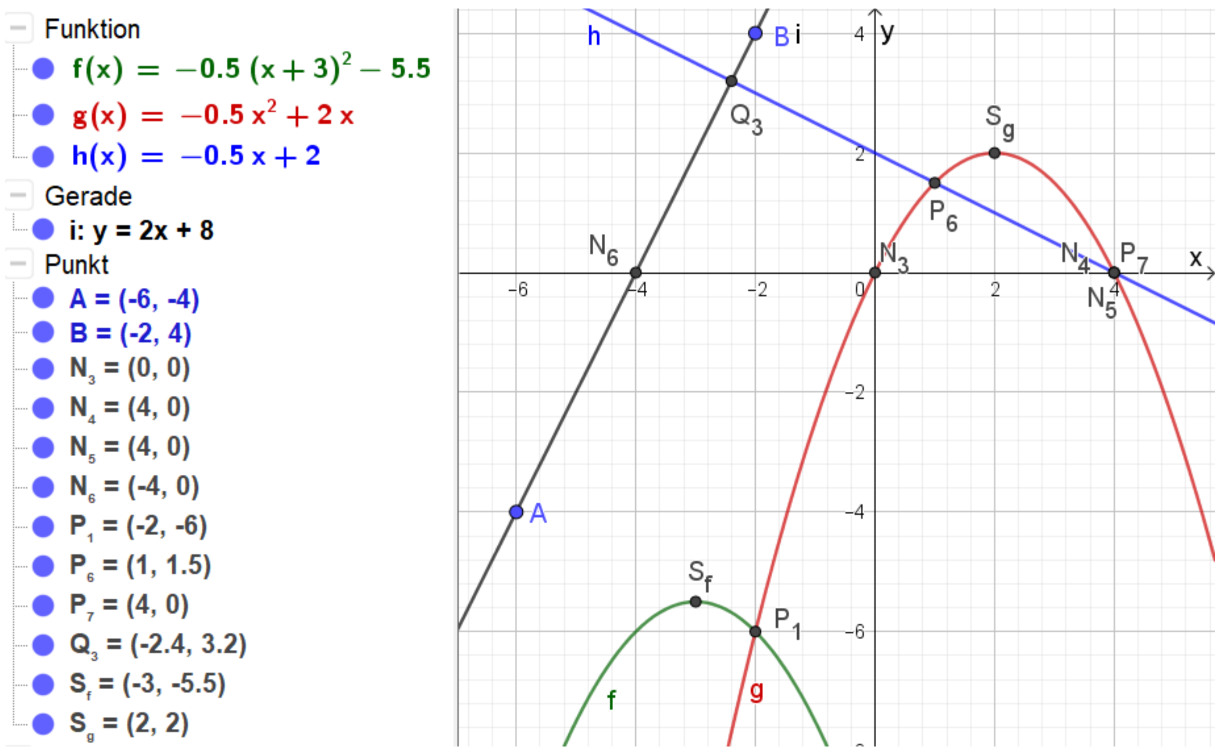
Es seien die Funktionen f, g, h und i gegeben durch:

- $f(x) = -0{,}5(x+3)^2 - 5{,}5$
- $g(x) = -0{,}5x^2 + 2x$
- $h(x) = -0{,}5x + 2$
- Der Graph von i ist eine Gerade, die durch die Punkte A(-6|-4) und B(-2|4) verläuft.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von i sowie alle Nullstellen, alle Schnittpunkte und die Scheitelpunkte der Parabeln.

Hinweis: Einige Lösungs*wege* können Sie sich über die Exceldatei „Geradengleichung (2 Punkte), quadrat. Erg., Umwandlung allg. Form in Scheitelpunktform, pq-Formel.xlsx“ (siehe Skriptordner) generieren.

Lösung[141]:



141 Siehe: Übungsaufgabe Funktionen.ggb

7.6 Potenz- und Wurzelfunktionen

Eine Potenzfunktion f (mit natürlichem Exponenten) besitzt folgende Funktionsgleichung:

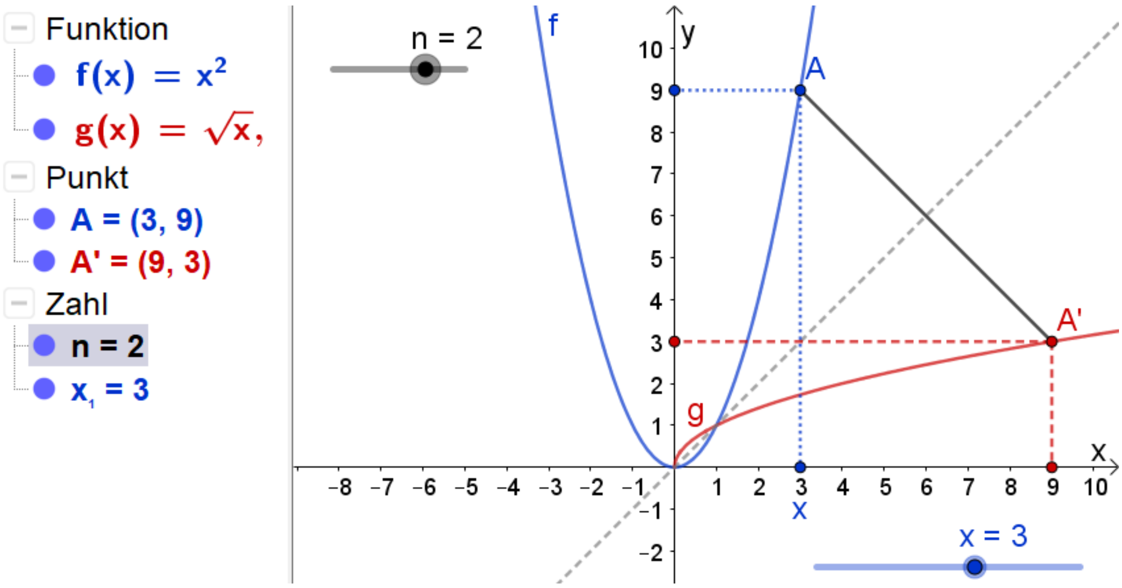
$$f(x) = ax^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Es seien exemplarisch folgende Funktionsgleichungen von Potenzfunktionen[142] und ihren Umkehrfunktionen, den Wurzelfunktionen[143], betrachtet:

Potenzfunktion f	Umkehrfunktion $f^{-1} =: g$
$f(x) = x^2$	$g(x) = \sqrt[2]{x}$
$f(x) = x^3$	$g(x) = \sqrt[3]{x}$

Achtung: Die Umkehrfunktionen sind nur für $x \geq 0$ definiert, wobei der Graph im 1. Quadranten an der Winkelhalbierenden gespiegelt wird.

Beispiel[144]: $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt[2]{x}$



Man erkennt: $f(3) = 3^2 = 9$ und $g(3^2) = g(9) = \sqrt[2]{9} = 3$.

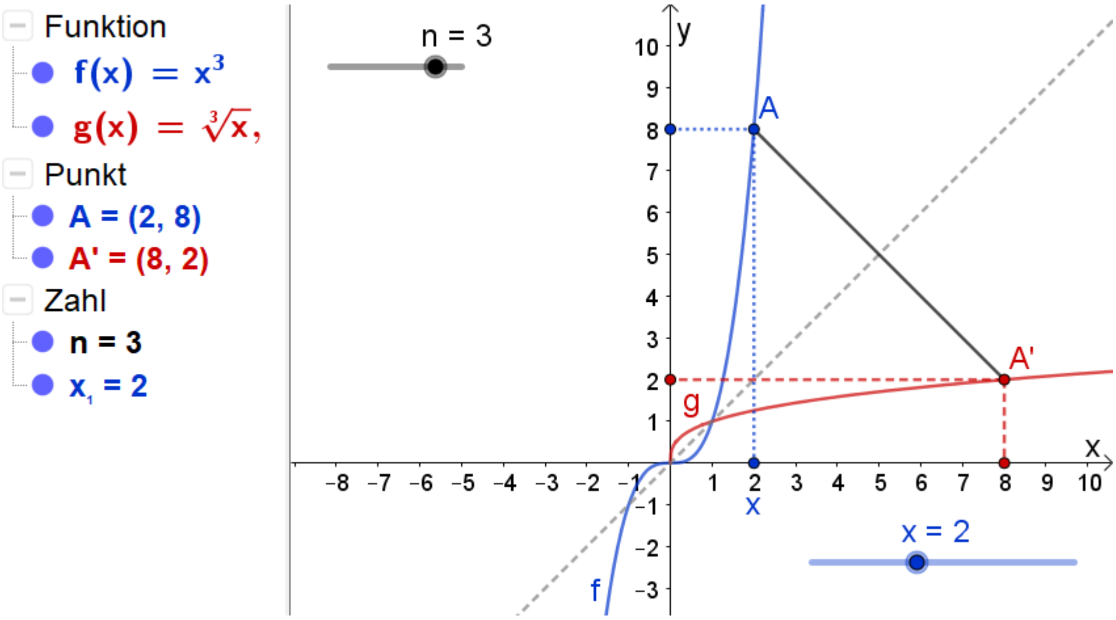
Würde man die Umkehrfunktion auch für $x < 0$ zulassen, würde gelten: $f(-3) = (-3)^2 = 9$ und man könnte aufgrund von Symmetrie-Eigenschaften denken, dass gilt: $g((-3)^2) = g(9) = \sqrt[2]{9} = -3$, wodurch g *nicht eindeutig* wäre.

---

[142] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Potenzfunktion
[143] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_(Mathematik)
[144] Siehe: Potenz- und Wurzelfunktionen.ggb

Beispiel: $f(x) = x^3$ und $g(x) = \sqrt[3]{x}$

GeoGebra-Ansicht:



Man erkennt: $f(2) = 2^3 = 8$ und $g(2^3) = g(8) = \sqrt[3]{8} = 2$.

Würde man die Umkehrfunktion auch für $x < 0$ zulassen, würde gelten:
$f(-2) = (-2)^3 = -8$ und man könnte aufgrund von Symmetrie-Eigenschaften denken, dass gilt: $g((-2)^3) = g(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Bemerkenswerterweise liefern sowohl (manche) Taschenrechner als auch GeoGebra für $\sqrt[3]{-8}$ als Ergebnis -2.

Hieraus könnte man jedoch schlussfolgern:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = +2$$

Da offensichtlich $-2 = +2$ eine falsche Aussage ist, muss ein Fehler vorliegen:
Der Fehler ist, dass die 3. Wurzel aus einer *negativen* Zahl gezogen wird.

Fazit: Die n-te Wurzel ist nur für *nichtnegative* Argumente *definiert*[145]. Eigentlich müsste der Taschenrechner nach der Eingabe von $\sqrt[3]{-8}$ eine Fehlermeldung generieren.

[145] Dies gilt, solange man *reelle* Funktionen betrachtet.

7.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen *)

a) Vorbemerkungen zum Logarithmus

In der Gleichung

$$b^x = y$$

ist b die Basis, x der Exponent, b^x die Potenz und y der Potenzwert.

Beispiel:

Geg.: $b = 10, x = 2$

Ges.: y

Ansatz: $b^x = y$

Rechnung: $10^2 = y$
$y = 100$

Antwort: Der Wert der Potenz mit der Basis 10 und dem Exponenten 2 ist 100.

Beispiel:

Geg.: $b = 10, \mathrm{y} = 100$

Ges.: x

Ansatz: $b^x = y$

Rechnung: $10^{\mathrm{x}} = 100$
$x = log_{\,10}(100) = 2$

Antwort: Der Logarithmus von 100 zur Basis 10 ist 2.

In der Gleichung

$$b^x = y$$

ist x der Logarithmus von y zur Basis b. Es gilt:

$$x = log_b(y)$$

b) Funktionen

Eine Exponentialfunktion f besitzt folgende Funktionsgleichung:

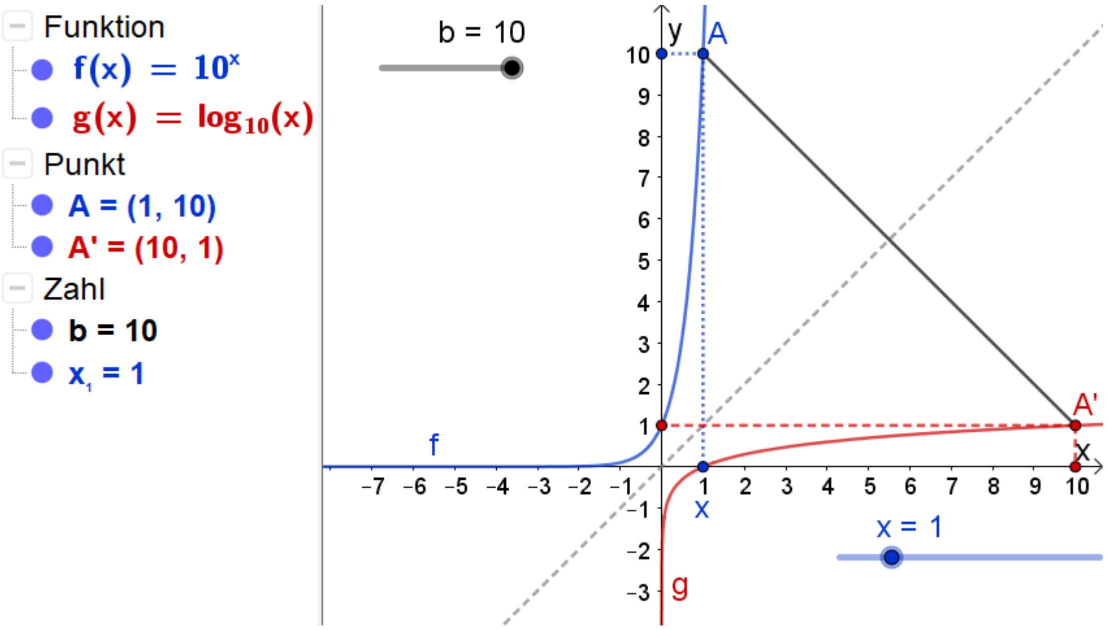
$$f(x) = b^x \quad (b \in \mathbb{R}_+)$$

Es seien exemplarisch folgende Funktionsgleichungen von Exponentialfunktionen[146] und ihren Umkehrfunktionen, den Logarithmusfunktionen[147], betrachtet:

Exponentialfunktion f	Umkehrfunktion $f^{-1} =: g$
$f(x) = 10^x$	$g(x) = log_{10}(x) = log(x)$
$f(x) = e^x$	$g(x) = log_e(x) = \ln(x)$

Achtung: Die Umkehrfunktionen sind nur für $x > 0$ definiert, wobei der Graph im 1. Quadranten an der Winkelhalbierenden gespiegelt wird.

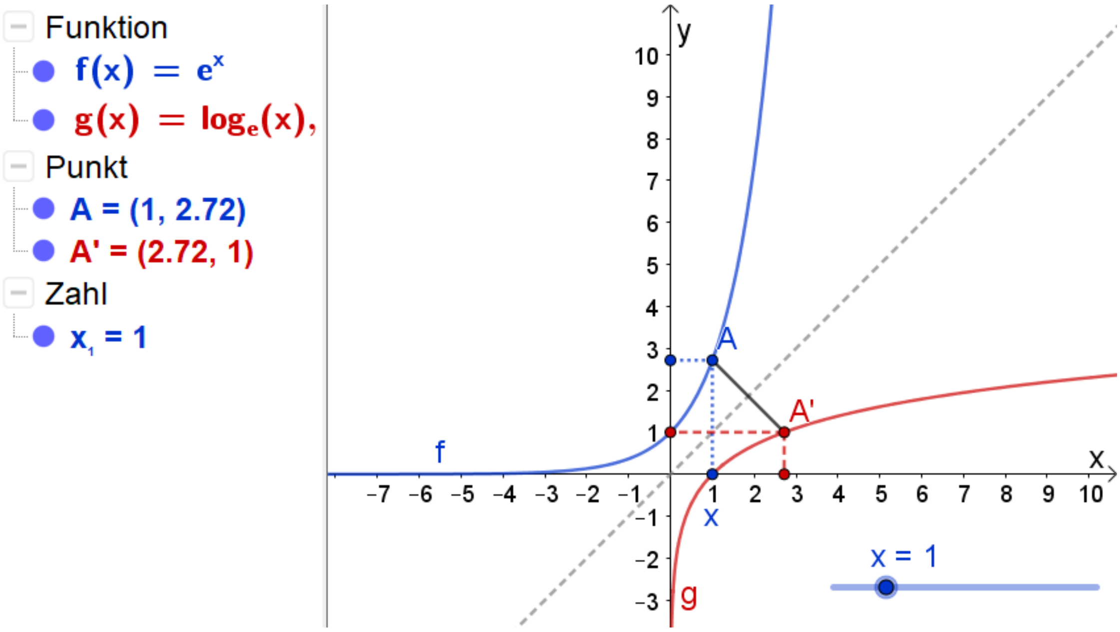
Beispiel[148]:



Man erkennt: $f(1) = 10^1 = 10$ und $g(10^1) = g(10) = log_{10}(10) = 1$.

[146] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Exponentialfunktion
[147] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus
[148] Siehe: Exponential- und Logarithmusfunktionen.ggb

Beispiel[149]:



Man erkennt: $f(1) = e^1 = e \approx 2{,}72$ und $g(e^1) = g(e) = log_e(e) = ln\,(e) = 1$.

Hierbei ist e eine ganz besondere Zahl, nämlich die *Eulersche Zahl*[150]. Die Exponentialfunktion zur Basis e heißt *natürliche* Exponentialfunktion und der Logarithmus zur Basis e heißt *natürlicher* Logarithmus.

[149] Siehe: Exponential- und Logarithmusfunktionen (Basis e).ggb
[150] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl

8 Die Darstellung der natürlichen Zahlen[151]

8.1 Römisches Zahlensystem (Additionssystem)

Folgende Zeichen werden eingeführt:

M	D	C	L	X	V	I
1000	500	100	50	10	5	1

Es gelten folgende 4 Regeln[152]:

Regel 1 : Zuerst werden die Tausender notiert, falls sie vorkommen, dann ggf. die Hunderter, dann ggf. die Zehner und zuletzt ggf. die Einer.

Regel 2 : Falls zu D noch Hunderter bzw. zu L noch Zehner bzw. zu V noch Einer hinzugezählt werden sollen, stehen diese rechts von D bzw. L bzw. V.

Regel 3 : Ein Zeichen I, X oder C darf nur von dem jeweils Fünf- oder Zehnfachen abgezogen werden; man notiert das abzuziehende Zeichen dann unmittelbar links vor dem zu vermindernden Zeichen.

Regel 4 : Unter Beachtung der ersten drei Regeln müssen möglichst wenige Zeichen verwendet werden.

Beispiele:

7	=	VII	II	=	2
14	=	XIV	XVIII	=	18
28	=	XXVIII	L	=	50
97	=	XCVII	LV	=	55
425	=	CDXXV	CDIII	=	403
721	=	DCCXXI	DCCCLI	=	851
1260	=	MCCLX	MCDLXII	=	1462
1767	=	MDCCLXVII	MDCVII	=	1607
2437	=	MMCDXXXVII	MMCXXXIX	=	2139
2628	=	MMDCXXVIII	MMDCLXXVIII	=	2678

[151] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx
[152] Aus: Padberg, F. / Büchter, A.: Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik, 2015, S. 27

Übungen:

8	=	X	=
20	=	XVII	=
35	=	XXXVII	=
82	=	LXXXII	=
159	=	CCLXXVIII	=
845	=	DCLXVIII	=
1087	=	MCCCLXXIX	=
1831	=	MDCLXXXIV	=
2292	=	MMCCCIV	=
2588	=	MMDCLIX	=
3355	=	MMMCDXCVIII	=

Lösungen:

8	=	VIII	X	=	10
20	=	XX	XVII	=	17
35	=	XXXV	XXXVII	=	37
82	=	LXXXII	LXXXII	=	82
159	=	CLIX	CCLXXVIII	=	278
845	=	DCCCXLV	DCLXVIII	=	668
1087	=	MLXXXVII	MCCCLXXIX	=	1379
1831	=	MDCCCXXXI	MDCLXXXIV	=	1684
2292	=	MMCCXCII	MMCCCIV	=	2304
2588	=	MMDLXXXVIII	MMDCLIX	=	2659
3355	=	MMMCCCLV	MMMCDXCVIII	=	3498

8.2 Stellenwertsysteme

8.2.1 Bezeichnungen und Schreibweisen

Im Dezimalsystem spricht man von der „Fünfunddreißigtausendsechshundertsiebenundsechzig“ und schreibt:

$$35667 = [35667]_{10} = 35667_{10} = 35667_{(10)}$$

Sie besteht aus den (Grund)*Ziffern* 3-5-6-6-7. Die *Basis* (oder Grundzahl) ist 10.

Jede Ziffer vermittelt zwei Informationen:

1. *Zahlenwert*: *Anzahl* der Bündel der betreffenden Mächtigkeit
2. Stellenwert: Mächtigkeit des zugehörigen Bündels

Die Ziffer 5 stellt in obigem Beispiel *fünf* (Zahlenwert) *Tausender* (Stellenwert) dar.

Den Stellenwert ermittelt man mit einer Stellenwerttafel.

Wählt man eine andere Basis, ändert sich die Anzahl der (Grund)Ziffern und die Mächtigkeit der Bündel.

8.2.2 Stellenwertsysteme und Ziffern[153]

Name	Basis	Ziffern															
Dualsystem	2	0	1														
	3	0	1	2													
	4	0	1	2	3												
Quinärsystem	5	0	1	2	3	4											
Senärsystem	6	0	1	2	3	4	5										
	7	0	1	2	3	4	5	6									
Oktalsystem	8	0	1	2	3	4	5	6	7								
	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8							
Dezimalsystem	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A					
Duodezimalsystem	12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B				
	13	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C			
	14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D		
	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	
Hexadezimalsystem	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

[153] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx

8.2.3 Bündelungen[154]

	Bündelung	256 er	128 er	64 er	32 er	16 er	8 er	4 er	2 er	1 er
Basis: 2	Potenz	2^{8}	2^{7}	2^{6}	2^{5}	2^{4}	2^{3}	2^{2}	2^{1}	2^{0}

	Bündelung	65.536 er	16.384 er	4.096 er	1.024 er	256 er	64 er	16 er	4 er	1 er
Basis: 4	Potenz	4^{8}	4^{7}	4^{6}	4^{5}	4^{4}	4^{3}	4^{2}	4^{1}	4^{0}

	Bündelung	390.625 er	78.125 er	15.625 er	3.125 er	625 er	125 er	25 er	5 er	1 er
Basis: 5	Potenz	5^{8}	5^{7}	5^{6}	5^{5}	5^{4}	5^{3}	5^{2}	5^{1}	5^{0}

	Bündelung	100.000.000 er	10.000.000 er	1.000.000 er	100.000 er	10.000 er	1.000 er	100 er	10 er	1 er
Basis: 10	Potenz	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}

	Bündelung	4.294.967.296 er	268.435.456 er	16.777.216 er	1.048.576 er	65.536 er	4.096 er	256 er	16 er	1 er
Basis: 16	Potenz	16^{8}	16^{7}	16^{6}	16^{5}	16^{4}	16^{3}	16^{2}	16^{1}	16^{0}

[154] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx

Übung: Berechnen Sie die Bündelungen.

Bündelung	er	er	er	er	er	er	er	er	er
Potenz	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Bündelung	er	er	er	er	er	er	er	er	er
Potenz	3^8	3^7	3^6	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0

Bündelung	er	er	er	er	er	er	er	er	er
Potenz	4^8	4^7	4^6	4^5	4^4	4^3	4^2	4^1	4^0

Bündelung	er	er	er	er	er	er	er	er	er
Potenz	5^8	5^7	5^6	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0

Bündelung	er	er	er	er	er	er	er	er	er
Potenz	6^8	6^7	6^6	6^5	6^4	6^3	6^2	6^1	6^0

Lösung:

Bündelung	256 er	128 er	64 er	32 er	16 er	8 er	4 er	2 er	1 er
Potenz	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Bündelung	6.561 er	2.187 er	729 er	243 er	81 er	27 er	9 er	3 er	1 er
Potenz	3^8	3^7	3^6	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0

Bündelung	65.536 er	16.384 er	4.096 er	1.024 er	256 er	64 er	16 er	4 er	1 er
Potenz	4^8	4^7	4^6	4^5	4^4	4^3	4^2	4^1	4^0

Bündelung	390.625 er	78.125 er	15.625 er	3.125 er	625 er	125 er	25 er	5 er	1 er
Potenz	5^8	5^7	5^6	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0

Bündelung	1.679.616 er	279.936 er	46.656 er	7.776 er	1.296 er	216 er	36 er	6 er	1 er
Potenz	6^8	6^7	6^6	6^5	6^4	6^3	6^2	6^1	6^0

8.2.4 Zählreihen in verschiedenen Stellenwertsystemen[155]

Anfangszahl (dezimal): 1

Stellenwertsystem	Basis									
Dezimalsystem	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Binärsystem	2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
Oktalsystem	8	1	2	3	4	5	6	7	10	11
Hexadezimalsystem	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1	+	3	=	4
1	+	11	=	100
1	+	3	=	4
1	+	3	=	4

1	+	8	=	9
1	+	1000	=	1001
1	+	10	=	11
1	+	8	=	9

[155] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx

Anfangszahl (dezimal): 160

Stellenwertsystem	Basis									
Dezimalsystem	10	160	161	162	163	164	165	166	167	168
Binärsystem	2	10100000	10100001	10100010	10100011	10100100	10100101	10100110	10100111	10101000
Oktalsystem	8	240	241	242	243	244	245	246	247	250
Hexadezimalsystem	16	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

160	+	3	=	163
10100000	+	11	=	10100011
240	+	3	=	243
A0	+	3	=	A3

160	+	8	=	168
10100000	+	1000	=	10101000
240	+	10	=	250
A0	+	8	=	A8

Übung: Vervollständigen Sie die Zählreihen.

Anfangszahl (dezimal): 10 **Eingabe**

Stellenwertsystem	Basis									
Dezimalsystem	10	10								
Binärsystem	2	1010								
Oktalsystem	8	12								
Hexadezimalsystem	16	A								

10	+	3	=
1010	+	11	=
12	+	3	=
A	+	3	=

10	+	8	=
1010	+	1000	=
12	+	10	=
A	+	8	=

Lösung:

Anfangszahl (dezimal): 10 Eingabe

Stellenwertsystem	Basis									
Dezimalsystem	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Binärsystem	2	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001	10010
Oktalsystem	8	12	13	14	15	16	17	20	21	22
Hexadezimalsystem	16	A	B	C	D	E	F	10	11	12

10	+	3	=	13
1010	+	11	=	1101
12	+	3	=	15
A	+	3	=	D

10	+	8	=	18
1010	+	1000	=	10010
12	+	10	=	22
A	+	8	=	12

8.2.5 Umwandlung vom 4er ins Dezimalsystem[156]

Basis: 4

Wert der Potenz:	1.024	256	64	16	4	1
Potenz:	4^5	4^4	4^3	4^2	4^1	4^0
Zahlenwert der Ziffer:	3	1	3	2	0	2

$$313202_4 = 3 \cdot 4^5 + 1 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0$$

$$= 3 \cdot 1.024 + 1 \cdot 256 + 3 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1$$

$$= 3.554_{10}$$

[156] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx

Übung:

Umwandlung vom 3er-System ins Dezimalsystem

Basis: 3 ← Eingabe

Wert der Potenz:						
Potenz:						
Zahlenwert der Ziffer:	0	1	2	2	0	2
ggf. Buchstabe:						

012202_3 =

=

=

Lösung:

Umwandlung vom 3er-System ins Dezimalsystem

Basis: 3 ← **Eingabe**

Wert der Potenz:	243	81	27	9	3	1
Potenz:	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
Zahlenwert der Ziffer:	0	1	2	2	0	2
ggf. Buchstabe:	0	1	2	2	0	2

$$012202_3 = 0 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

$$= 0 \cdot 243 + 1 \cdot 81 + 2 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1$$

$$= 155_{10}$$

8.2.6 Umwandlung vom Dezimalsystem ins 5er-System[157]

a) Umwandlung über die Division mit Rest

$967_{10} = 12332_{5}$

Kurzschreibweise

	5
967	2
193	3
38	3
7	2
1	1
0	

Erläuterung

967	:	5	=	193	Rest	2
193	:	5	=	38	Rest	3
38	:	5	=	7	Rest	3
7	:	5	=	1	Rest	2
1	:	5	=	0	Rest	1
0						

[157] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx

Übung: Wandeln Sie 967 ins 4er-System um.

Lösung:

	4	
967	3	3
241	1	1
60	0	0
15	3	3
3	3	3
0		

967	:	4	=	241	Rest	3
241	:	4	=	60	Rest	1
60	:	4	=	15	Rest	0
15	:	4	=	3	Rest	3
3	:	4	=	0	Rest	3
0						

b) Umwandlung über den Rückgriff auf die höchste Potenz

$$967_{10} = 12332_{5}$$

78.125	15.625	3.125	625	125	25	5	1
5^7	5^6	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0

$$967 = 0 \cdot 5^7 + 0 \cdot 5^6 + 0 \cdot 5^5 + 1 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$

$$\begin{array}{r} 967 \\ \underline{0} \\ 967 \\ \underline{0} \\ 967 \\ \underline{0} \\ 967 \\ \underline{625} \\ 342 \\ \underline{250} \\ 92 \\ \underline{75} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 2 \\ \underline{2} \\ 0 \end{array}$$

Übung: Wandeln Sie 967 ins 4er-System um.

Lösung:

16.384	4.096	1.024	256	64	16	4	1
4^7	4^6	4^5	4^4	4^3	4^2	4^1	4^0

$$967 = 0 \cdot 4^7 + 0 \cdot 4^6 + 0 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 967 \\ 0 \\ \hline 967 \\ 0 \\ \hline 967 \\ 768 \\ \hline 199 \\ 192 \\ \hline 7 \\ 0 \\ \hline 7 \\ 4 \\ \hline 3 \\ 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

8.2.7 Schriftliche Rechenverfahren

a) Addition[158]

Beispiel:

Schriftliche Addition im 10er-System

Basis: 10

Zahlenwert:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(Grund)Ziffern:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		4	8	3	0	10
		1	6	6	0	10
		3	2	2	8	10
+		8	8	8	8	10
Übertrag		1	2	2	1	
	1	8	6	0	6	10

Schriftliche Addition im 9er-System

Basis: 9

Zahlenwert:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
(Grund)Ziffern:	0	1	2	3	4	5	6	7	8

		4	8	3	0	9
		1	6	6	0	9
		3	2	2	8	9
+		8	8	8	8	9
Übertrag	2	2	2	1		
	2	0	8	2	7	9

[158] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx

Übung:

Schriftliche Addition im 10er-System

Basis: 10

Zahlenwert:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(Grund)Ziffern:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$
\begin{array}{lrrrrl}
 & 4 & 4 & 3 & 0 & _{10} \\
 & 1 & 4 & 4 & 0 & _{10} \\
 & 3 & 2 & 2 & 4 & _{10} \\
+ & 4 & 4 & 4 & 4 & _{10} \\
\text{Übertrag} & & & & & \\
\hline
 & & & & & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Schriftliche Addition im 5er-System

Basis: 5

Zahlenwert:	0	1	2	3	4
(Grund)Ziffern:	0	1	2	3	4

$$
\begin{array}{lrrrrl}
 & 4 & 4 & 3 & 0 & _{5} \\
 & 1 & 4 & 4 & 0 & _{5} \\
 & 3 & 2 & 2 & 4 & _{5} \\
+ & 4 & 4 & 4 & 4 & _{5} \\
\text{Übertrag} & & & & & \\
\hline
 & & & & & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Lösung:

Schriftliche Addition im 10er-System

Basis: 10

Zahlenwert:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(Grund)Ziffern:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

			4	4	3	0	10
			1	4	4	0	10
			3	2	2	4	10
+			4	4	4	4	10
Übertrag		1	1	1			
		1	3	5	3	8	10

Schriftliche Addition im 5er-System

Basis: 5

Zahlenwert:	0	1	2	3	4
(Grund)Ziffern:	0	1	2	3	4

		4	4	3	0	5
		1	4	4	0	5
		3	2	2	4	5
+		4	4	4	4	5
Übertrag	3	3	2	1		
	3	0	1	4	3	5

b) Subtraktion[159] *)

Beispiel:

Schriftliche Subtraktion im 10er-System

Basis: 10 ⟵ Eingabe

Zahlenwert:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(Grund)Ziffern:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	5	2	3	3	10
-	1	2	4	4	10
	3	9	8	9	10

Zahlenwerte der Ziffern eingeben

ggf. Entbündelung mit '

	5 '	2 '	3 '	3	10
-	1	2	4	4	10
	3	9	8	9	10

Darstellung der einzelnen Bündel

	4 1000 er	1 1000 er 1 100 er	1 100 er 2 10 er	1 10 er 3 1 er
-	1 1000 er	2 100 er	4 10 er	4 1 er
	3 1000 er	9 100 er	8 10 er	9 1 er

[159] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx

Beispiel:

Schriftliche Subtraktion im 6er-System

Basis: 6 ← **Eingabe**

Zahlenwert:	0	1	2	3	4	5
(Grund)Ziffern:	0	1	2	3	4	5

$$
\begin{array}{r}
5\ 2\ 3\ 3_{6} \\
-\ 1\ 2\ 4\ 4_{6} \\
\hline
3\ 5\ 4\ 5_{6} \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Zahlenwerte der Ziffern eingeben

ggf. Entbündelung mit '

	5 '	2 '	3 '	3_{6}
-	1	2	4	4_{6}
	3	5	4	5_{6}

Darstellung der einzelnen Bündel

	4 216 er	1 216 er 1 36 er	1 36 er 2 6 er	1 6 er 3 1 er
-	1 216 er	2 36 er	4 6 er	4 1 er
	3 216 er	5 36 er	4 6 er	5 1 er

c) Multiplikation[160] *)

Beispiel:

Schriftliche Multiplikation im 10er-System

Basis: 10 Eingabe

	4	3	2 $_{10}$	·	3	4 $_{10}$
			2	9	6	
Übertrag		1	0	0		
				6	2	8
Übertrag			1	1	0	
		1	3	6	8	8
Übertrag		0	1	0		
		1	4	6	8	8 $_{10}$

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$_0$0	$_0$0	$_0$0	$_0$0	$_0$0	$_0$0	$_0$0	$_0$0	$_0$0	$_0$0
1	$_0$0	$_0$1	$_0$2	$_0$3	$_0$4	$_0$5	$_0$6	$_0$7	$_0$8	$_0$9
2	$_0$0	$_0$2	$_0$4	$_0$6	$_0$8	$_1$0	$_1$2	$_1$4	$_1$6	$_1$8
3	$_0$0	$_0$3	$_0$6	$_0$9	$_1$2	$_1$5	$_1$8	$_2$1	$_2$4	$_2$7
4	$_0$0	$_0$4	$_0$8	$_1$2	$_1$6	$_2$0	$_2$4	$_2$8	$_3$2	$_3$6
5	$_0$0	$_0$5	$_1$0	$_1$5	$_2$0	$_2$5	$_3$0	$_3$5	$_4$0	$_4$5
6	$_0$0	$_0$6	$_1$2	$_1$8	$_2$4	$_3$0	$_3$6	$_4$2	$_4$8	$_5$4
7	$_0$0	$_0$7	$_1$4	$_2$1	$_2$8	$_3$5	$_4$2	$_4$9	$_5$6	$_6$3
8	$_0$0	$_0$8	$_1$6	$_2$4	$_3$2	$_4$0	$_4$8	$_5$6	$_6$4	$_7$2
9	$_0$0	$_0$9	$_1$8	$_2$7	$_3$6	$_4$5	$_5$4	$_6$3	$_7$2	$_8$1

[160] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx

Beispiel:

Schriftliche Multiplikation im 5er-System

Basis: 5 Eingabe

	4	3	2_5	·	3	4_5
			2	4	1	
Übertrag		2	1	1		
				1	2	3
Übertrag			3	2	1	
		2	1	3	4	3
Übertrag		1	1	0		
		3	2	3	4	3_5

·	0	1	2	3	4
0	$_0$ 0	$_0$ 0	$_0$ 0	$_0$ 0	$_0$ 0
1	$_0$ 0	$_0$ 1	$_0$ 2	$_0$ 3	$_0$ 4
2	$_0$ 0	$_0$ 2	$_0$ 4	$_1$ 1	$_1$ 3
3	$_0$ 0	$_0$ 3	$_1$ 1	$_1$ 4	$_2$ 2
4	$_0$ 0	$_0$ 4	$_1$ 3	$_2$ 2	$_3$ 1

d) Division[161] *)

Beispiel:

Schriftliche Division im 10er-System

Basis: 10 Eingabe

$1\ 3\ 2\ 0_{10} : 3_{10} \approx 0\ 4\ 4\ 0,0\ 0_{10}$

0

1 3

1 2

1 2

1 2

0 0

0 0

0 0

0 0

0 0

0 0

0

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
1	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
2	0 0	0 2	0 4	0 6	0 8	1 0	1 2	1 4	1 6	1 8
3	0 0	0 3	0 6	0 9	1 2	1 5	1 8	2 1	2 4	2 7
4	0 0	0 4	0 8	1 2	1 6	2 0	2 4	2 8	3 2	3 6
5	0 0	0 5	1 0	1 5	2 0	2 5	3 0	3 5	4 0	4 5
6	0 0	0 6	1 2	1 8	2 4	3 0	3 6	4 2	4 8	5 4
7	0 0	0 7	1 4	2 1	2 8	3 5	4 2	4 9	5 6	6 3
8	0 0	0 8	1 6	2 4	3 2	4 0	4 8	5 6	6 4	7 2
9	0 0	0 9	1 8	2 7	3 6	4 5	5 4	6 3	7 2	8 1

[161] Siehe: Übungen Zahlensysteme - zum Drucken und Ausfüllen.xlsx

Beispiel:

Schriftliche Division im 9er-System

Basis: 9 Eingabe

$1\,3\,2\,0_9 : 3_9 \approx 0\,4\,0\,6,0\,0_9$

```
0
1 3
1 3
  0 2
  0 0
    2 0
    2 0
      0 0
      0 0
        0 0
        0 0
          0
```

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	00	00	00	**00**	00	00	00	00	00
1	00	01	02	**03**	04	05	06	07	08
2	00	02	04	**06**	08	11	13	15	17
3	00	03	06	**10**	13	16	20	23	26
4	00	04	08	**13**	17	22	26	31	35
5	00	05	11	**16**	22	27	33	38	44
6	00	06	13	**20**	26	33	40	46	53
7	00	07	15	**23**	31	38	46	54	62
8	00	08	17	**26**	35	44	53	62	71

9 Teilbarkeit (I)

9.1 Teilbarkeit in $\mathbb{N}$

Definition der Teilbarkeit in $\mathbb{N}$:	$a\|b :\Leftrightarrow \bigvee_{x\in\mathbb{N}} a \cdot x = b$	(für alle natürlichen Zahlen a und b)
In Worten:	„a teilt b (oder a **ist Teiler** von b) gdw. eine natürliche Zahl x existiert, für die gilt: $a \cdot x = b$.“	

„a teilt b“ ist eine Aussageform, die in eine wahre oder falsche Aussage überführt wird:

Beispiel 1:	$1\|3$	ist *wahr*, da ein $x \in \mathbb{N}$ *existiert*, nämlich $x = 3$, so dass gilt:	$1 \cdot x = 3$

9.2 Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$ *)

Definition der Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$[162]:	$a\|b :\Leftrightarrow \bigvee_{x\in\mathbb{Z}} a \cdot x = b$	(für alle ganzen Zahlen a und b)
In Worten:	„a teilt b (oder a **ist Teiler** von b) gdw. eine ganze Zahl x existiert, für die gilt: $a \cdot x = b$.“	

„a teilt b“ ist eine Aussageform, die in eine wahre oder falsche Aussage überführt wird:

Beispiel 1:	$1\|3$	ist *wahr*, da ein $x \in \mathbb{Z}$ *existiert*, nämlich $x = 3$, so dass gilt:	$1 \cdot x = 3$
Beispiel 2:	$(-1)\|3$	ist *wahr*, da ein $x \in \mathbb{Z}$ *existiert*, nämlich $x = -3$, so dass gilt:	$-1 \cdot x = 3$

Fazit: Die 3 besitzt in den natürlichen Zahlen zwei Teiler (nämlich 1 und 3) und in den ganzen Zahlen vier Teiler (nämlich 1, 3, -1 und -3).

[162] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 2.7 Teilbarkeit, 2018, S. 1

9.3 Teilermenge

Die Menge $\mathbb{T}(n)$ aller Teiler von $n \in \mathbb{N}$ ist die *Teilermenge* von n:

$\mathbb{T}(n) \coloneqq \{x \colon x \in \mathbb{N} \wedge x|n\}$

Beispiel 1:	$\mathbb{T}(99) \coloneqq \{x \colon x \in \mathbb{N} \wedge x|99\}$	$= \{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$
Beispiel 2:	$\mathbb{T}(27) \coloneqq \{x \colon x \in \mathbb{N} \wedge x|27\}$	$= \{1, 3, 9, 27\}$

9.4 Der größte gemeinsame Teiler (ggT)

Die Schnittmenge zweier Teilermengen $\mathbb{T}(a)$ und $\mathbb{T}(b)$ besteht aus allen gemeinsamen Teilern von a und b.

Beispiel: $\mathbb{T}(99) \cap \mathbb{T}(27) = \{1, 3, 9, 11, 33, 99\} \cap \{1, 3, 9, 27\} = \{1, 3, 9\}$

Der größte gemeinsame Teiler (ggT) zweier Zahlen a und b ist das größte Element der Schnittmenge der Teilermengen $\mathbb{T}(a)$ und $\mathbb{T}(b)$.

Beispiel: $ggT(27, 99) = 9$

Hinweis: Zwei Zahlen a, b ∈ ℕ* heißen teilerfremd oder prim zueinander genau dann, wenn a und b nur 1 als gemeinsamen Teiler besitzen.

9.4.1 Anwendung des ggT in der Bruchrechnung

Man kürzt Brüche *vollständig,* indem man Zähler und Nenner durch ihren ggT teilt.

Beispiel: $\frac{27}{99} = \frac{3 \cdot \cancel{9}}{11 \cdot \cancel{9}} = \frac{3}{11}$

9.5 Satz über die Division mit Rest

Für alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen a und b mit $b \neq 0$ gibt es genau ein Paar (q, r) natürlicher Zahlen q und r, so dass gilt:

$$a = q \cdot b + r \quad \text{(Hierbei ist } 0 \leq r < b\text{ .)}$$

q ist der *Quotient*, r ist der *Rest*.

9.5.1 Euklidischer Algorithmus *)

Der euklidische Algorithmus ist ein Verfahren zur Ermittlung des ggT[163]:

Ausgangswerte:
Zwei natürliche Zahlen a, b

Arbeitsschritt:
Zu a und b (mit a > b) ermittelt man den Rest bei Division von a durch b.

Wenn der Rest noch größer als Null ist, wird der Divisor zum neuen a und der Rest zum neuen b und der Arbeitsschritt wird erneut durchgeführt.

Ende:
Das Verfahren endet, wenn a:b ohne Rest aufgeht, d.h. wenn gilt: b|a.

Wähle zwei Zahlen:

Zahl 1: 448
Zahl 2: 2.072

Die größere Zahl sei a. Die kleinere Zahl sei b.

a = 2.072 b = 448

Dann wird der größte gemeinsame Teiler (ggT) wie folgt ermittelt:

Dividend	=	Quotient	·	Divisor	+	Rest
a	=	q	·	b	+	r
2.072	=	4	·	448	+	280
448	=	1	·	280	+	168
280	=	1	·	168	+	112
168	=	1	·	112	+	56
112	=	2	·	56	+	0

Ergebnis: Das letzte b ist dann der größte gemeinsame Teiler (ggT) der ursprünglichen Zahlen a und b.

[163] Siehe: Euklidischer Algorithmus.xlsx

Übung:

Ermitteln Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus:

ggT(18, 21) =

ggT(96, 54) =

ggT(518, 420) =

Lösung:

ggT(18, 21) = 3

$$21 = 1 \cdot 18 + 3$$

$$18 = 6 \cdot 3 + 0$$

ggT(96, 54) = 6

$$96 = 1 \cdot 54 + 42$$

$$54 = 1 \cdot 42 + 12$$

$$42 = 3 \cdot 12 + 6$$

$$12 = 2 \cdot 6 + 0$$

ggT(518, 420) = 14

$$518 = 1 \cdot 420 + 98$$

$$420 = 4 \cdot 98 + 28$$

$$98 = 3 \cdot 28 + 14$$

$$28 = 2 \cdot 14 + 0$$

9.6 Vielfachenmenge

Die Menge $\mathbb{V}(n)$ aller Vielfachen von $n \in \mathbb{N}$ ist die *Vielfachenmenge* von n:

$$\mathbb{V}(n) \coloneqq \{x\colon\ x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ \ \wedge\ \ n|x\}$$

oder

$$\mathbb{V}(n) \coloneqq \{x\colon\ x = a \cdot n\ \ \wedge\ \ a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$$

Beispiel 1: $\mathbb{V}(9) = \{x\colon\ x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ \ \wedge\ \ 9|x\} = \{9, 18, 27, 36, \dots\}$

Beispiel 2: $\mathbb{V}(9) = \{x\colon\ x = a \cdot 9\ \ \wedge\ \ a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} = \{1 \cdot 9, 2 \cdot 9, 3 \cdot 9, 4 \cdot 9, \dots\} = \{9, 18, 27, 36, \dots\}$

Beispiel 3: $\mathbb{V}(6) = \{x\colon\ x = a \cdot 6\ \ \wedge\ \ a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} = \{1 \cdot 6, 2 \cdot 6, 3 \cdot 6, 4 \cdot 6, \dots\} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$

9.7 Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

Die Schnittmenge zweier Vielfachenmengen $\mathbb{V}(a)$ und $\mathbb{V}(b)$ besteht aus allen gemeinsamen Vielfachen von a und b:

Beispiel: $\mathbb{V}(9) \cap \mathbb{V}(6) = \{9, 18, 27, 36, \dots\} \cap \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$

$= \{18, 36, 54, 72, \dots\}$

<u>Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)</u> zweier Zahlen a und b ist das kleinste Element der Schnittmenge der Vielfachenmengen $\mathbb{V}(a)$ und $\mathbb{V}(b)$.

Beispiel: $kgV(6, 9) = 18$

9.7.1 Anwendung des kgV in der Bruchrechnung

Ermittlung des Hauptnenners zwei Brüche (z.B. bei der Addition):

Beispiel[164] (Addition von zwei Brüchen): $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = ?$

Der Hauptnenner wird durch das kgV der einzelnen Nenner ermittelt: $kgV(6, 9) = 18$

Erweitern der Brüche, um den gleichen Nenner (den Hauptnenner) zu erhalten:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{8}{18}$$

Addition der gleichnamigen Brüche (Zähler + Zähler, Nenner bleibt gleich): $\frac{15}{18} + \frac{8}{18} = \frac{23}{18}$

Zusammenfassung: $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{23}{18}$

9.7.2 kgV-Tabelle

Das $kgV(a, b)$ ist *nicht immer gleich* dem Produkt aus a und b.

kgV-Tabelle[165] (rot bedeutet: $kgV(a, b) \neq a \cdot b$)

kgV(a,b)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	6	4	10	6	14	8	18	10
3	3	6	3	12	15	6	21	24	9	30
4	4	4	12	4	20	12	28	8	36	20
5	5	10	15	20	5	30	35	40	45	10
6	6	6	6	12	30	6	42	24	18	30
7	7	14	21	28	35	42	7	56	63	70
8	8	8	24	8	40	24	56	8	72	40
9	9	18	9	36	45	18	63	72	9	90
10	10	10	30	20	10	30	70	40	90	10

[164] Siehe auch: Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, Cornelsen, 2014, S. 17
[165] Siehe auch: kgV (von Zahlen bis 999).xlsx

9.8 Teilbarkeitsregeln für die 2, 4, 5, 8 und 10 (Endziffernregeln)

Eine natürliche (oder ganze) Zahl a (dargestellt im dezimalen Stellenwertsystem) ist genau dann

<table>
<tr><td rowspan="5">durch</td><td>2</td><td rowspan="5">teilbar, wenn die aus</td><td>der Endziffer</td><td rowspan="5">gebildete Zahl durch</td><td>2</td><td rowspan="5">teilbar ist.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>den beiden Endziffern</td><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>der Endziffer</td><td>5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>den drei Endziffern</td><td>8</td></tr>
<tr><td>10</td><td>den beiden Endziffern</td><td>10</td></tr>
</table>

$2 \mid 12.345.078$	, denn	$2 \mid 8$
$2 \mid 12.345.120$	, denn	$2 \mid 0$
$4 \nmid 12.345.078$	, denn	$4 \nmid 78$
$4 \mid 12.345.120$	, denn	$4 \mid 20$
$5 \nmid 12.345.078$	, denn	$5 \nmid 8$
$5 \mid 12.345.120$	, denn	$5 \mid 0$
$8 \nmid 12.345.078$	, denn	$8 \nmid 078$
$8 \mid 12.345.120$	, denn	$8 \mid 120$
$10 \nmid 12.345.078$	, denn	$10 \nmid 78$
$10 \mid 12.345.120$	, denn	$10 \mid 20$

9.9 Teilbarkeitsregeln für die 3 und 9 (Quersummenregeln)

Eine natürliche (oder ganze) Zahl a (dargestellt im dezimalen Stellenwertsystem) ist genau dann

<table>
<tr><td rowspan="2">durch</td><td>3</td><td rowspan="2">teilbar, wenn ihre Quersumme $Q(a)$ durch</td><td>3</td><td rowspan="2">teilbar ist.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>9</td></tr>
</table>

$3 \mid 12.345.078$	, denn	$3 \mid Q(12.345.078)$	$\Leftrightarrow$	$3 \mid (8+7+0+5+4+3+2+1)$	$\Leftrightarrow$	$3 \mid 30$
$3 \mid 12.345.120$	, denn	$3 \mid Q(12.345.120)$	$\Leftrightarrow$	$3 \mid (0+2+1+5+4+3+2+1)$	$\Leftrightarrow$	$3 \mid 18$
$9 \nmid 12.345.078$	, denn	$9 \nmid Q(12.345.078)$	$\Leftrightarrow$	$9 \nmid (8+7+0+5+4+3+2+1)$	$\Leftrightarrow$	$9 \nmid 30$
$9 \mid 12.345.120$	, denn	$9 \mid Q(12.345.120)$	$\Leftrightarrow$	$9 \mid (0+2+1+5+4+3+2+1)$	$\Leftrightarrow$	$9 \mid 18$

9.10 Eigenschaft des kgV[166]

Für das $kgV(x, y)$ gilt: $x|a \wedge y|a \Leftrightarrow kgV(x, y)|a$

9.11 Teilbarkeitsregel für die 6

Eine natürliche (oder ganze) Zahl a (dargestellt im dezimalen Stellenwertsystem) ist genau dann

durch 6 teilbar, wenn a durch 2 *und* durch 3 teilbar ist.

Begründung (siehe Eigenschaft des $kgV(x, y)$):

$kgV(2, 3) = 6$

$2|a \wedge 3|a \Leftrightarrow 6|a$

Beispiel: Ist 33.138 durch 6 teilbar?

Prüfe: Ist 33.138 durch 2 teilbar? – Ja, denn die Endziffer 8 ist durch 2 teilbar.
Prüfe: Ist 33.138 durch 3 teilbar? – Ja, denn die Quersumme $Q(33.138) = 18$ ist durch 3 teilbar.

Aus 2 | 33.138 und 3 | 33.138 folgt 6 | 33.138 .

9.12 Teilbarkeitsregel für die 12

Eine natürliche (oder ganze) Zahl a (dargestellt im dezimalen Stellenwertsystem) ist genau dann

durch 12 teilbar, wenn a durch 3 *und* durch 4 teilbar ist.

Begründung (siehe Eigenschaft des $kgV(x, y)$):

$kgV(3, 4) = 12$

$3|a \wedge 4|a \Leftrightarrow 12|a$

[166] Siehe: Scheid, H./Schwarz, W.: Elemente der Arithmetik und Algebra, 6. Auflage, S. 27

9.13 Teilbarkeitsregel für die 11 (mithilfe der *alternierenden Quersumme)*

Eine natürliche (oder ganze) Zahl a (dargestellt im dezimalen Stellenwertsystem) ist genau dann

durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme Q'(a) durch 11 teilbar ist.

Berechnung der alternierenden Quersumme[167]: Beginnend an der kleinsten Stelle (also von rechts nach links) werden die Ziffern abwechseln subtrahiert und addiert.

Beispiele:

$11 \mid 81.532$, denn $Q'(81.532) = 2 - 3 + 5 - 1 + 8 = 11$ und $11 \mid 11$

$11 \nmid 642.583$, denn $Q'(642.583) = 3 - 8 + 5 - 2 + 4 - 6 = -4$ und $11 \nmid -4$

[167] Siehe auch: Padberg, F. / Büchter, A.: Vertiefung Mathematik Primarstufe - Arithmetik / Zahlentheorie, S. 122

9.14 Übungen zur Teilbarkeitsprüfung[168]

Übungen:

ist teilbar durch	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0											
1											
6		ja									
8											
727											
735											
743											
750											
1.859											
1.909											
2.034											
2.339											
18.797											
19.481											
20.322											
20.519											
357.026											
386.586											
420.434											
452.556											

[168] Siehe Excel-Datei: Teilbarkeitsprüfung.xlsx

Lösungen:

ist teilbar durch	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja
1	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
6	ja	ja ja	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein	nein
8	ja	nein	ja	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein
727	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
735	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein
743	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
750	ja	ja	nein	ja	ja	nein	nein	nein	ja	nein	nein
1.859	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	ja	nein
1.909	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
2.034	ja	ja	nein	nein	ja	nein	nein	ja	nein	nein	nein
2.339	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
18.797	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
19.481	nein	nein	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	ja	nein
20.322	ja	ja	nein	nein	ja	nein	nein	ja	nein	nein	nein
20.519	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
357.026	ja	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
386.586	ja	ja	nein	nein	ja	nein	nein	ja	nein	nein	nein
420.434	ja	nein	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein
452.556	ja	ja	ja	nein	ja	nein	nein	ja	nein	nein	ja

9.15 Gerade und ungerade Zahlen[169]

Eine natürliche oder ganze Zahl heißt *gerade* , wenn sie durch zwei teilbar ist, ansonsten *ungerade* .

Es seien x und y natürliche Zahlen. Wähle

$x = 2$

$y = 3$

$2 \cdot x = 2 \cdot 2 = 4$ ist eine *gerade* Zahl.

$2 \cdot y = 2 \cdot 3 = 6$ ist eine *gerade* Zahl.

$2 \cdot x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ ist eine *ungerade* Zahl.

$2 \cdot y + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ ist eine *ungerade* Zahl.

Übung: Ermitteln Sie, ob das Ergebnis eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Summe zweier *gerader* Zahlen:

$(2 \cdot x) + (2 \cdot y) =$

Summe zweier *ungerader* Zahlen:

$(2 \cdot x + 1) + (2 \cdot y + 1) =$

Produkt zweier *gerader* Zahlen:

$(2 \cdot x) \cdot (2 \cdot y) =$

Produkt zweier *ungerader* Zahlen:

$(2 \cdot x + 1) \cdot (2 \cdot y + 1) =$

Produkt aus *ungerader* und *gerader* Zahl:

$(2 \cdot x + 1) \cdot (2 \cdot y) =$

Quadrat einer *geraden* Zahl:

$(2 \cdot x) \cdot (2 \cdot x) =$

Quadrat einer *ungeraden* Zahl:

$(2 \cdot x + 1) \cdot (2 \cdot x + 1) =$

[169] Siehe Exceldatei: (un)gerade Zahlen.xlsx

Lösung:

Es seien x und y natürliche Zahlen. Wähle

$x = 2$

$y = 3$

$2 \cdot x =$	2	$\cdot$	2		=	4	ist eine *gerade* Zahl.
$2 \cdot y =$	2	$\cdot$	3		=	6	ist eine *gerade* Zahl.
$2 \cdot x + 1 =$	2	$\cdot$	2	+ 1	=	5	ist eine *ungerade* Zahl.
$2 \cdot y + 1 =$	2	$\cdot$	3	+ 1	=	7	ist eine *ungerade* Zahl.

Summe zweier *gerader* Zahlen:

$(2 \cdot x) + (2 \cdot y) = 4 + 6 = 10 = 2 \cdot (x + y)$ ist eine *gerade* Zahl.

Summe zweier *ungerader* Zahlen:

$(2 \cdot x + 1) + (2 \cdot y + 1) = 5 + 7 = 12 = 2 \cdot (x + y) + 2$ ist eine *gerade* Zahl.

Produkt zweier *gerader* Zahlen:

$(2 \cdot x) \cdot (2 \cdot y) = 4 \cdot 6 = 24 = 2 \cdot (2 \cdot x \cdot y)$ ist eine *gerade* Zahl.

Produkt zweier *ungerader* Zahlen:

$(2 \cdot x + 1) \cdot (2 \cdot y + 1) = 5 \cdot 7 = 35 = 2 \cdot (2 \cdot x \cdot y) + 2 \cdot x + 2 \cdot y + 1$ ist eine *ungerade* Zahl.

Produkt aus *ungerader* und *gerader* Zahl:

$(2 \cdot x + 1) \cdot (2 \cdot y) = 5 \cdot 6 = 30 = 2 \cdot (2 \cdot x \cdot y) + 2 \cdot y$ ist eine *gerade* Zahl.

Quadrat einer *geraden* Zahl:

$(2 \cdot x) \cdot (2 \cdot x) = 4 \cdot 4 = 16 = 2 \cdot (2 \cdot x \cdot x)$ ist eine *gerade* Zahl.

Quadrat einer *ungeraden* Zahl:

$(2 \cdot x + 1) \cdot (2 \cdot x + 1) = 5 \cdot 5 = 25 = 2 \cdot (2 \cdot x \cdot x) + 2 \cdot x + 2 \cdot x + 1$ ist eine *ungerade* Zahl.

Bitte beachten Sie das Kapitel „Übungen zu den Beweisformen“ (S. 229).

10 Primzahlen

10.1 Primzahl

Definition (Primzahl): Eine natürliche Zahl, die genau zwei (natürliche) Teiler besitzt, heißt eine Primzahl.

Beispiele:

Zahl	Teiler	*genau zwei* Teiler?
0	0 (, da $0 \cdot 0 = 0$), $1, 2, 3, \ldots$	nein $\Rightarrow$ keine Primzahl
1	1 (0 ist kein Teiler von 1, da kein x existiert mit $0 \cdot x = 1$)	nein $\Rightarrow$ keine Primzahl
2	$2, 1$	ja $\Rightarrow$ ist Primzahl
3	$3, 1$	ja $\Rightarrow$ ist Primzahl
4	$4, 2, 1$	nein $\Rightarrow$ keine Primzahl

10.2 Satz von Euklid (Anzahl der Primzahlen)[170]

Satz von Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

10.3 Wichtige Eigenschaft von Primzahlen

Es gibt *keine regelmäßige Struktur* beim Auftreten der Primzahlen.

Die ersten Primzahlen ≤ 1000 sind:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

[170] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 2.6 Primzahlen, 2018, S. 2ff

10.4 Anzahl der Teiler für die Zahlen 1-43[171]

Die Tabelle zeigt die Teilbarkeitsrelation a|b, ermittelt die Anzahl der Teiler und erkennt, ob es *genau zwei Teiler* gibt, sodass eine *Primzahl* vorliegt.

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
2 Teiler?	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
Anzahl Teiler	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8	2	6	4	4	4	9	2	4	4	8	2	8	2

a|b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

[171] Siehe auch: Primzahlen (Anzahl der Teiler der Zahlen 1-999).xlsx

10.5 Sieb des Eratosthenes[172] zur Bestimmung aller Primzahlen $\leq N$

Verfahren[173] [174] [175]:

(1) Man schreibe alle natürlichen Zahlen von 2 bis N auf.

(2) Man markiere die Zahl 2 und streiche dann jede zweite Zahl.

(3) Ist n die erste nicht gestrichene und nicht markierte Zahl, so markiere man n und streiche dann jede n-te Zahl.

(4) Man führe Schritt 3 für alle n mit $n \leq \sqrt{N}$ aus.

Sieb des Erathostenes zur Bestimmung aller Primzahlen ≤ 97

Die Zahl 2 markieren und ihre Vielfachen streichen:

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7
~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13
~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~	25
~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~	31
~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37
~~38~~	39	~~40~~	41	~~42~~	43
~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49
~~50~~	51	~~52~~	53	~~54~~	55
~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~	61
~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67
~~68~~	69	~~70~~	71	~~72~~	73
~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79
~~80~~	81	~~82~~	83	~~84~~	85
~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~	91
~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97

Die Zahl 3 markieren und ihre Vielfachen streichen:

2	3	4	5	~~6~~	7
8	~~9~~	10	11	~~12~~	13
14	~~15~~	16	17	~~18~~	19
20	~~21~~	22	23	~~24~~	25
26	~~27~~	28	29	~~30~~	31
32	~~33~~	34	35	~~36~~	37
38	~~39~~	40	41	~~42~~	43
44	~~45~~	46	47	~~48~~	49
50	~~51~~	52	53	~~54~~	55
56	~~57~~	58	59	~~60~~	61
62	~~63~~	64	65	~~66~~	67
68	~~69~~	70	71	~~72~~	73
74	~~75~~	76	77	~~78~~	79
80	~~81~~	82	83	~~84~~	85
86	~~87~~	88	89	~~90~~	91
92	~~93~~	94	95	~~96~~	97

Die Zahl 5 markieren und ihre Vielfachen streichen:

2	3	4	5	6	7
8	9	~~10~~	11	12	13
14	~~15~~	16	17	18	19
~~20~~	21	22	23	24	~~25~~
26	27	28	29	~~30~~	31
32	33	34	~~35~~	36	37
38	39	~~40~~	41	42	43
44	~~45~~	46	47	48	49
~~50~~	51	52	53	54	~~55~~
56	57	58	59	~~60~~	61
62	63	64	~~65~~	66	67
68	69	~~70~~	71	72	73
74	~~75~~	76	77	78	79
~~80~~	81	82	83	84	~~85~~
86	87	88	89	~~90~~	91
92	93	94	~~95~~	96	97

Die Zahl 7 markieren und ihre Vielfachen streichen:

2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
~~14~~	15	16	17	18	19
20	~~21~~	22	23	24	25
26	27	~~28~~	29	30	31
32	33	34	~~35~~	36	37
38	39	40	41	~~42~~	43
44	45	46	47	48	~~49~~
50	51	52	53	54	55
~~56~~	57	58	59	60	61
62	~~63~~	64	65	66	67
68	69	~~70~~	71	72	73
74	75	76	~~77~~	78	79
80	81	82	83	~~84~~	85
86	87	88	89	90	~~91~~
92	93	94	95	96	97

Alle ungestrichenen Zahlen sind Primzahlen:

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7
~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13
~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~
~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31
~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37
~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43
~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~
~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61
~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67
~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73
~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79
~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~
~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~
~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97

[172] Siehe auch: https://youtu.be/Cg8P4GNPe0I (Prof. Spannagel)
[173] Siehe auch: Scheid, H. / Schwarz, W.: Elemente der Arithmetik und Algebra, S. 11
[174] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 2.6 Primzahlen, 2018, S. 5
[175] Siehe auch: Sieb des Eratosthenes.xlsx

Übung:

Begründen Sie, warum es beim Sieb des Eratosthenes ausreicht, nur $n \leq \sqrt{N}$ zu überprüfen.

Tipp: Veranschaulichen Sie Ihre Argumentation mit einem Beispiel.

Lösung:

Sei $N = 100$. Dann ist $\sqrt{N} = 10$.

Frage:
Kann es eine natürliche Zahl $n > 10$ geben, die keine Primzahl ist und noch nicht gestrichen wurde?

Antwort: Nein!

Begründung:

Angenommen, es gäbe eine solche Zahl $n > 10$, die keine Primzahl ist und noch nicht gestrichen wurde.

Dann müsste diese Zahl mindestens drei Teiler besitzen.

Der dritte Teiler müsste aber größer als 10 sein, denn ansonsten wäre n bereits gestrichen worden. Man bezeichne diesen Teiler mit t.

Die Zahl n ist dann ein Vielfaches von t und lässt sich darstellen als $n = t \cdot x \quad (x \in \mathbb{N})$

Die Zahl x muss aber ebenfalls größer als 10 sein, denn ansonsten wäre n bereits gestrichen worden.

Somit gilt aber $n > 10 \cdot 10 = 100$. Es wurden jedoch nur die Zahlen bis 100 betrachtet.[176]

176 Siehe auch: Indirekter Beweis, S. 212.

Übung:

Ist 73 eine Primzahl?

Tipp: Nutzen Sie das Sieb des Eratosthenes.

Lösung (mit Hilfe des Siebs des Eratosthenes):

Man betrachte alle *Primzahlen*, die *kleiner gleich Wurzel aus 73* sind und überprüfe, ob sie Teiler von 73 sind:

2 ist kein Teiler von 73.

3 ist kein Teiler von 73.

5 ist kein Teiler von 73.

7 ist kein Teiler von 73.

Da diese Primzahlen alle kein Teiler von 73 sind, ist 73 eine Primzahl.

10.6 Primfaktorzerlegung

Die *Primfaktorzerlegung* ist die Darstellung einer natürlichen Zahl n als Produkt aus Primzahlen, die dann als *Primfaktoren* von n bezeichnet werden.[177]

10.7 Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie

Jede natürliche Zahl (außer 0 und 1) ist vollständig in Primfaktoren zerlegbar. Die Primfaktoren sind für jede natürliche Zahl jeweils immer dieselben.[178]

Beispiele [179]:

$14.700 = 2^{2} \cdot 3^{1} \cdot 5^{2} \cdot 7^{2}$

$300 = 2^{2} \cdot 3^{1} \cdot 5^{2}$

Übungen:

66 =

450 =

38.808 =

[177] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Primfaktorzerlegung
[178] Siehe auch: Leuders, T.: Erlebnis Arithmetik, Springer Spektrum, 2012, S. 79
[179] Siehe: Primfaktorzerlegung.xlsx

Lösungen:

$66 = 2^{1} \cdot 3^{1} \cdot 11^{1}$

$450 = 2^{1} \cdot 3^{2} \cdot 5^{2}$

$38.808 = 2^{3} \cdot 3^{2} \cdot 7^{2} \cdot 11^{1}$

Übung:

Geben Sie die Teilermenge von 1500 an!

Tipp:

Überlegen Sie, welche Rolle hierbei die Primfaktorzerlegung spielen könnte.

1. Schritt: Primfaktorzerlegung erstellen:

$1.500 = 2^{2} \cdot 3^{1} \cdot 5^{3}$

2. Schritt: Primfaktoren kombinieren, um Teiler zu erhalten

$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1$
$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2$
$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4$
$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$
$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 6$
$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$
$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 5$
$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^2 = 25$
$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^3 = 125$
$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 10$
$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2 = 50$
$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^3 = 250$
$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 20$
$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^2 = 100$
$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^3 = 500$
$2^0 \cdot 3 \cdot 5^1 = 15$
$2^0 \cdot 3 \cdot 5^2 = 75$
$2^0 \cdot 3 \cdot 5^3 = 375$
$2^1 \cdot 3 \cdot 5^1 = 30$
$2^1 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$
$2^1 \cdot 3 \cdot 5^3 = 750$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5^1 = 60$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 = 1500$

Die Teilermenge von 1500 ist demnach:

$\mathbb{T}(1500) = \{1,2,3,4,5,6,10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 125, 150, 250, 300, 375, 500, 750, 1500\}$

Es gibt $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ Teiler

Warum? – Man nehme die Exponenten der Primfaktoren, addiere 1 dazu und multipliziere sie:

$(2+1) \cdot (1+1) \cdot (3+1) = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

10.8 Primzahlkriterium

Die von 1 verschiedene natürliche Zahl p ist eine Primzahl	$\Leftrightarrow$	$\bigwedge\limits_{a,b\in\mathbb{N}} (p \mid a \cdot b \Rightarrow p \mid a \ oder \ p \mid b)$

10.9 Hinweis zur RSA-Verschlüsselung *)

Bei *sehr sehr großen Primzahlen p und q* (viele hundert Dezimalstellen) können Computer noch relativ schnell das Produkt $p \cdot q = N$ berechnen. Umgekehrt jedoch ist es (in vertretbarer Zeit) *nicht möglich*, p und q zu ermitteln, wenn man nur N kennt. Diesen Sachverhalt macht man sich bei der RSA-Verschlüsselung[180], welche im Internet eine große Rolle spielt, zu Nutze.

Beispiel 1 (mit kleinen Zahlen):
Wähle $p = 89.189$ und $q = 43.237$, dann ist $p \cdot q = 3.856.264.793 = N$

Beispiel 2 (Lösung siehe Fußnote[181]):
Sei $N = 30.281.099$. Bestimme nun p und q, so dass gilt: $p \cdot q = N = 30.281.099$

[180] Siehe auch: https://youtu.be/oXlY-yx1oIw (RSA: Konstruktion der Schlüssel (Prof. Spannagel))
[181] p=1.009 und q=30.011

11 Teilbarkeit (II)

11.1 Ermittlung von ggT und kgV durch Primfaktorzerlegung[182]

Der ggT und das kgV können durch Primfaktorzerlegung mit folgendem Schema ermittelt werden:

Beispiel 1:

140	=	2	·	2			·	5	·	7		
42	=	2			·	3			·	7		
ggT(140, 42)	=	2							·	7	=	14
kgV(140, 42)	=	2	·	2	·	3	·	5	·	7	=	420

Beispiel 2:

2772	=	2	·	2	·	3	·	3	·	7	·	11				
9	=					3	·	3								
234	=	2			·	3	·	3					·	13		
ggT(2772, 9, 234)	=				·	3	·	3							=	9
kgV(2772, 9, 234)	=	2	·	2	·	3	·	3	·	7	·	11	·	13	=	36036

Beispiel 3 (andere Schreibweise):

$3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

Für den ggT nimmt man die Primfaktoren, die in beiden Zerlegungen vorkommen und als zugehörigen Exponenten den jeweils kleineren der Ausgangsexponenten.

$ggT(3528, 3780) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 252$

Für das kgV nimmt man die Primfaktoren, die in mindestens einer der beiden Zerlegungen vorkommen und als zugehörigen Exponenten den jeweils größeren der Ausgangsexponenten.

$kgV(3528, 3780) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 52920$

[182] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 2.7 Teilbarkeit, 2018, S. 8ff

Übung:

Ermitteln Sie die größten gemeinsamen Teiler und kleinsten gemeinsamen Vielfache:

ggT(48, 66) =

kgV(48, 66) =

ggT(90, 180, 504) =

kgV(90, 180, 504) =

Lösung:

Ermitteln Sie die größten gemeinsamen Teiler und kleinsten gemeinsamen Vielfache:

$48 = 2^4 \cdot 3^1$

$66 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 11^1$

ggT(48, 66) $= 2^1 \cdot 3^1 = 6$

kgV(48, 66) $= 2^4 \cdot 3^1 \cdot 11^1 = 528$

$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$

ggT(90, 180, 504) $= 2^1 \cdot 3^2 = 18$

kgV(90, 180, 504) $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2520$

11.2 Zusammenhang zwischen $kgV(a,b)$ und $ggT(a,b)$[183]

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b$

Beispiele[184]:

Anmerkung	a	b	$ggT(a, b)$	$kgV(a, b)$	$a \cdot b$
a = b = 0	0	0	0	0	0
b = 0	1	0	1	0	0
a | b	4	12	4	12	48
b | a	15	5	5	15	75
a und b teilerfremd	4	7	1	28	28
allgemeiner Fall	90	140	10	1260	12600

Hieraus folgt:

- Wenn a und b teilerfremd sind (also der $ggT(a,b) = 1$ ist), gilt: $kgV(a,b) = a \cdot b$
- Das $kgV(a,b)$ kann berechnet werden durch:

$$kgV(a,b) = \frac{a \cdot b}{ggT(a,b)}$$

11.2.1 Beispiel: kgV für größere Zahlen ermitteln (mit euklidischem Algorithmus)

Sei $a = 1.230$ und $b = 125.$

Man ermittle den $ggT(1.230, 125) = 5$ mit dem euklidischen Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
1.230 & = & 9 & \cdot & 125 & + & 105 \\
125 & = & 1 & \cdot & 105 & + & 20 \\
105 & = & 5 & \cdot & 20 & + & 5 \\
20 & = & 4 & \cdot & 5 & + & 0
\end{array}$$

Das kgV(1.230, 125) wird dann berechnet durch:

$$kgV(1.230, 125) = \frac{1.230 \cdot 125}{ggT(1230, 125)} = \frac{153.750}{5} = 30.750$$

[183] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 2.7 Teilbarkeit, 2018, S. 10

[184] Siehe auch: Padberg, F. / Büchter, A.: Vertiefung Mathematik Primarstufe - Arithmetik / Zahlentheorie, S. 94

12 Kapriolen der Null

12.1 Division: „0 durch 0“ [185]

In Zeichen: $0:0$ oder $\frac{0}{0}$

Hinweis:

„0 : 0“ (bzw. „$\frac{0}{0}$“) ist nicht zu verwechseln mit „0|0“. Der Unterschied besteht darin, dass

- „:“ ein *Operations*zeichen ist, welches zu einer *Zahl als Ergebnis* führt.
- „|“ ein *Relations*zeichen ist, welches zu einer *wahren oder falschen Aussage* führt.

Definition der Division[186]:	$a:b$	ist diejenige Zahl x,	für die gilt:	$b \cdot x = a$
Beispiel 1:	$8:4$	$= 2$	, denn es gilt:	$4 \cdot 2 = 8$
Beispiel 2:	$0:4$	$= 0$	, denn es gilt:	$4 \cdot 0 = 0$
Beispiel 3:	$4:0$	ist nicht definiert	, denn es gibt kein x mit:	$0 \cdot x = 4$
Beispiel 4:	$0:0$	$\overset{???}{\widehat{=}}\ 0$	, denn es gilt:	$0 \cdot 0 = 0$
Beispiel 5:	$0:0$	$\overset{???}{\widehat{=}}\ 3$	, denn es gilt:	$0 \cdot 3 = 0$
Beispiel 6:	$0:0$	$\overset{???}{\widehat{=}}\ 7$	, denn es gilt:	$0 \cdot 7 = 0$

Aus dem Beispiel 3 erkennt man, warum man eine Zahl, die ungleich 0 ist, *nicht durch* 0 teilen darf.

Aus den Beispielen 4, 5 und 6 erkennt man, warum das *Ergebnis* von $0:0$ *beliebig* wählbar wäre.

Um die *Eindeutigkeit* der Division jedoch nicht aufzugeben, gilt:

$0:0$ ist *nicht* definiert , denn es gibt keine *eindeutige* Zahl x mit: $0 \cdot x = 0$.

Fazit: Die Division *durch* 0 ist *für alle* Zahlen *nicht* definiert.

[185] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 2.5 Kapriolen der Null, 2018

[186] Die Division ist in den natürlichen Zahlen *nicht immer* bzw. *nur mit Rest* möglich.

12.2 Teilbarkeit: „0 teilt 0“ [187]

In Zeichen: $0|0$

Hinweis:

„$0|0$“ ist nicht zu verwechseln mit „0 : 0“ (bzw. „ $\frac{0}{0}$ “). Der Unterschied besteht darin, dass

- „|“ ein *Relations*zeichen ist, welches zu einer *wahren oder falschen Aussage* führt.
- „:“ ein *Operations*zeichen ist, welches zu einer *Zahl als Ergebnis* führt.

Definition der Teilbarkeit:	$a\|b :\Leftrightarrow \bigvee_{x \in \mathbb{N}} a \cdot x = b$ (für alle natürlichen Zahlen a und b)
In Worten:	„a teilt b (oder a ist Teiler von b) gdw. eine natürliche Zahl x existiert, für die gilt: $a \cdot x = b$.“

„a teilt b“ ist eine Aussage, die entweder wahr oder falsch sein kein:

Beispiel 1:	$5\|10$	ist *wahr*, da ein $x \in \mathbb{N}$ *existiert*, nämlich $x = 2$, so dass gilt:	$5 \cdot x = 10$
Beispiel 2:	$10\|5$	ist *falsch*, da *kein* $x \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt:	$10 \cdot x = 5$
Beispiel 3:	$5\|0$	ist *wahr*, da ein $x \in \mathbb{N}$ *existiert*, nämlich $x = 0$, so dass gilt:	$5 \cdot x = 0$
Beispiel 4:	$0\|5$	ist *falsch*, da *kein* $x \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt:	$0 \cdot x = 5$
Beispiel 5:	$0\|0$	ist *wahr*, da ein $x \in \mathbb{N}$ *existiert*, nämlich $x = 0$, so dass gilt:	$0 \cdot x = 0$

Fazit: $0|0$ *ist definiert* und stellt eine wahre Aussage dar.

[187] Siehe auch: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen, Relationen, Funktionen, Springer Spektrum, 2016, S. 121

12.3 Potenzieren: „0 hoch 0“[188]

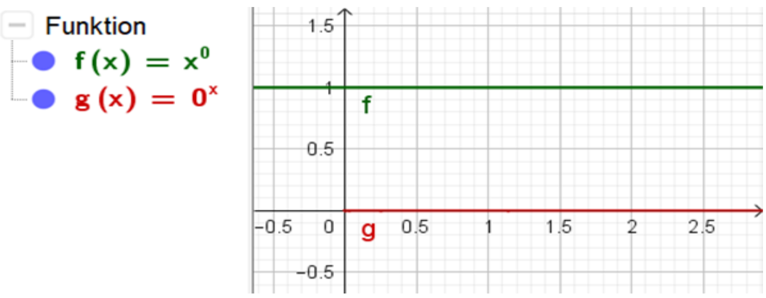
In Zeichen: 0^0

Bezeichnungen: a^n ist die *Potenz*, wobei a als *Basis* und n als *Exponent* bezeichnet wird.

	Definitionen:	Beispiel 1:	Beispiel 2:
für alle • $a \in \mathbb{R}$ • $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$	$5^4 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4} = 625$	$0^4 = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}_{4} = 0$
für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$a^0 := 1$	$4^0 = 1$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
für alle • $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ • $n \in \mathbb{N}$	$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$	$5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$	$5^{-0} = \frac{1}{5^0} = \frac{1}{1} = 1$
für alle • $a \in \mathbb{R}, a > 0$ • $m \in \mathbb{Z}$ • $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ • $a = 0,\ m > 0$	$a^{\left(\frac{m}{n}\right)} := \sqrt[n]{a^m}$	$5^{\left(\frac{4}{2}\right)} = \sqrt[2]{5^4} = \sqrt{625} = 25$ $5^{\left(\frac{4}{2}\right)} = 5^{\left(\frac{2}{1}\right)} = 5^2 = 25$	$5^{\left(\frac{-4}{2}\right)} = \sqrt[2]{5^{(-4)}}$ $= \sqrt{\frac{1}{625}} = \frac{1}{25}$

Frage: $0^0 := ???$ (Es gilt: $4^0 = 1$ aber $0^4 = 0$, siehe oben)

Vielleicht helfen die Graphen der nachfolgenden Funktionen f und g weiter?



Aus der Funktion f könnte man ableiten: $0^0 := 1$

Aus der Funktion g könnte man ableiten: $0^0 := 0$

Fazit: Es gibt *keine einheitliche* Auffassung darüber, ob gilt:

- 0^0 ist nicht definiert (Beispiel: Casio-Taschenrechner, ältere Generation)
- $0^0 := 0$ (siehe Funktion g)
- $0^0 := 1$ (sinnvolle Festlegung für einige Teilgebiete der Mathematik[189], wird unterstützt durch Software wie *GeoGebra* und die Win10-*Rechner*-App)

[188] Siehe auch: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen, Relationen, Funktionen, Springer Spektrum, 2016
[189] https://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_(Mathematik)#Null_hoch_Null

13 Logik (II): Beweisformen

Empfehlung: Wiederholen Sie kurz folgende Inhalte:

- Negation (S. 72)
- Konjunktion (S. 73)
- Alternative (S. 74)
- Implikation (S. 75)
- Äquivalenz (S. 77)
- Gleichwertige Aussagen und Tautologien (S. 79)
- Zur Implikation (alternative Ersetzung) (S. 80)
- Zur Implikation (Kontraposition) (S. 82)

Es gibt unterschiedliche Arten von Beweisen. Die Unterschiede und Vorgehensweisen werden deutlich, wenn man sich die logische Struktur anschaut, die ihnen zugrunde liegt.

13.1 Direkter Beweis[190]

Die logische Struktur eines *direkten Beweises* ist folgende:

$((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Was bedeutet diese Struktur? Der Ausgangspunkt ist folgender: Man möchte die Implikation „$A \Rightarrow B$“ beweisen. Diese steht in obiger Struktur ganz rechts, warum?

Antwort: Weil, wenn man gezeigt hat, dass „$((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B))$“ wahr ist, dies dann *impliziert*, dass auch „$A \Rightarrow B$“ wahr ist, siehe auch Wahrheitstafel[191]:

A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$(A \Rightarrow C)$	$(C \Rightarrow B)$	$((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B))$	$(((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	f	f	w
w	w	f	w	f	w	f	w
w	f	f	f	f	w	f	w
f	w	f	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Der Ausdruck „$((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ ist demnach eine Tautologie, wodurch das Prinzip des direkten Beweises legitimiert wird.

---

[190] Siehe auch: Benölken/Gorski/Müller-Phillip: Leitfaden Arithmetik, S. 28
[191] Siehe: Wahrheitstafel (direkter Beweis).xlsx

Beim *direkten Beweis* ist also zu zeigen, dass „$((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B))$“ wahr ist.

Vorgehensweise: Man geht davon aus, dass A wahr ist und sucht sich ein C. Mit dem Wissen, welches man bereits verwenden darf, muss man nun schließen, dass C wahr ist. Danach muss man von C mit dem verwendbaren Wissen auf B schließen.

Anmerkung: Meistens ist die Beweiskette deutlich länger, d.h. hinter „C“ verbirgt sich eigentlich eine Kette von Schlussfolgerungen, so dass die logische Struktur so aussieht:

$$((A \Rightarrow C_1) \wedge (C_1 \Rightarrow C_2) \wedge (C_2 \Rightarrow C_3) \wedge \ldots \wedge (C_{n-1} \Rightarrow C_n) \wedge (C_n \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Fazit: Weil man aus A nicht gleich B schlussfolgern kann, nimmt man solange Zwischenschlüsse zu Hilfe, bis man auf B schließen kann.

Beispiel:

Die Summe zweier natürlicher ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

oder anders ausgedrückt:

A: n ist die Summe zweier ungerader Zahlen.
B: n ist eine gerade Zahl.

Zu beweisen ist: $A \Rightarrow B$

A: n ist die Summe zweier ungerader Zahlen.

$\Rightarrow C_1$: Es gibt zwei natürliche ungerade Zahlen a und b, mit $a + b = n$.
$\Rightarrow C_2$: Es gibt zwei natürliche Zahlen x und y, wobei $a = 2x + 1$ und $b = 2y + 1$, mit $a + b = n$.
$\Rightarrow C_3$: Es gibt zwei natürliche Zahlen x und y mit $(2x + 1) + (2y + 1) = n$.
$\Rightarrow C_4$: Es gibt zwei natürliche Zahlen x und y mit $2(x + y + 1) = n$.

$\Rightarrow$ B: n ist eine gerade Zahl.

Übung: Beweisen Sie folgende Aussage mithilfe eines direkten Beweises:

Wenn eine natürliche Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar.

Lösung:

A: n sei eine natürliche Zahl, die durch 4 teilbar ist.
B: n ist durch 2 teilbar.

Zu beweisen ist: A ⇒ B

A: n sei eine natürliche Zahl, die durch 4 teilbar ist.

⇒ C_1: Es gibt eine natürliche Zahl a mit 4 a = n.
⇒ C_2: Es gibt eine natürliche Zahl a mit (2 · 2) a = n.
⇒ C_3: Es gibt eine natürliche Zahl a mit 2 · 2 · a = n.
⇒ C_4: Es gibt eine natürliche Zahl a mit 2 · (2 · a) = n.

⇒ B: n ist durch 2 teilbar.

13.2 Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch)[192]

Die logische Struktur eines *indirekten Beweises* ist folgende:

$\neg (\neg B \wedge A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Wie kommt man auf diese Struktur? - Man möchte wieder die Implikation „$A \Rightarrow B$“ beweisen. Jedoch fällt einem kein direkter Beweis (siehe 13.1) oder ein Beweis durch Kontraposition (siehe 13.3) ein. Daher sucht man nach einem anderen Ausdruck, der (wenn begründet wurde, dass er wahr ist) den Ausdruck „$(A \Rightarrow B)$“ impliziert. Ein solcher Ausdruck ist z.B. „$\neg (\neg B \wedge A)$“[193]. Dies soll folgende Wahrheitstafel[194] verdeutlichen:

A	B	¬ B	(A ⇒ B)	(¬ B ∧ A)	(¬ (¬ B ∧ A))	((¬ (¬ B ∧ A)) ⇒ (A ⇒ B))
w	w	f	w	f	w	w
w	f	w	f	w	f	w
f	w	f	w	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

Der Ausdruck „$\neg (\neg B \wedge A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ ist also eine Tautologie, so dass das Verfahren des indirekten Beweises legitimiert wurde.

Vorgehensweise beim indirekten Beweis

Der Ausgangspunkt ist: Man möchte die Implikation „$A \Rightarrow B$“ beweisen. Dies hat man dann getan, wenn man gezeigt hat, dass „$\neg (\neg B \wedge A)$“ wahr ist, weil dies (wie oben gezeigt) die Aussage „$A \Rightarrow B$“ impliziert.

Wie zeigt man nun also, dass „$\neg (\neg B \wedge A)$“ wahr ist?

Antwort: Man geht davon aus, dass A wahr ist und dass das Gegenteil von B wahr, also $\neg B$ wahr ist: „$\neg B \wedge A$“ ist also der *Annahme* nach wahr. Aus dieser Annahme zieht man nun solange Schlussfolgerungen, bis man auf einen eindeutigen *Widerspruch* stößt. Dadurch hat man gezeigt, dass „$\neg B \wedge A$“ falsch und also „$\neg (\neg B \wedge A)$“ wahr ist. Hierdurch ist aufgrund obiger Wahrheitstafel bewiesen, dass „$A \Rightarrow B$“ wahr ist.

Der indirekte Beweis wird auch als *Widerspruchsbeweis* bezeichnet.

Ergänzung: Um den Widerspruch herbeizuführen, darf man all das mathematische Wissen benutzen, welches einem bereits zur Verfügung steht. Dieses soll mit „C“ bezeichnet werden. Die logische Struktur des indirekten Beweises wäre dann folgende: $\neg (\neg B \wedge (A \wedge C)) \Rightarrow ((A \wedge C)) \Rightarrow B)$[195]

---

[192] Siehe auch: Benölken/Gorski/Müller-Phillip: Leitfaden Arithmetik, S. 29
[193] Auf diesen kommt man, indem man „$A \Rightarrow B$“ ersetzt durch „$\neg A \vee B$“ (siehe S. 75) und danach die Negation einer Alternative (siehe S. 77) anwendet.
[194] Siehe: Wahrheitstafel (indirekter Beweis).xlsx
[195] Siehe: Wahrheitstafel (indirekter Beweis, erweitert).xlsx

Beispiel:

Zu beweisen ist:

Wenn das Quadrat einer nat. Zahl n gerade ist, so ist n ebenfalls eine gerade Zahl.

Oder anders ausgedrückt:

A: n^2 ist eine gerade Zahl.

B: n ist eine gerade Zahl.

Zu beweisen ist:

$A \Rightarrow B$

Die logische Struktur eines indirekten Beweises ist:

$\neg (\neg B \wedge A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Vorgehensweise: Man bildet $(\neg B \wedge A)$ und führt dies zum Widerspruch. Daraus folgt dann $(A \Rightarrow B)$.

A: n^2 ist eine gerade Zahl.

$\neg$B: n ist eine *un*gerade Zahl.

Die Annahme $(\neg B \wedge A)$ lautet dann:

n ist eine *un*gerade Zahl und n^2 ist eine gerade Zahl.

$\Rightarrow$ Es gibt eine nat. Zahl m mit $2m + 1 = n$.

$\Rightarrow n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2\,(2m^2 + 2m) + 1$

$\Rightarrow$ n^2 ist ungerade – das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass n^2 gerade ist.

Es wurde also gezeigt, dass die Annahme $(\neg B \wedge A)$ falsch ist. Also ist $\neg (\neg B \wedge A)$ wahr. Hieraus wiederum folgt aufgrund der logischen Struktur des indirekten Beweises, dass $(A \Rightarrow B)$ wahr ist.

q.e.d.

Übung:

Beweisen Sie indirekt:
Wenn das Quadrat einer nat. Zahl n ungerade ist, so ist n ebenfalls eine ungerade Zahl.

Lösung:

Zu beweisen ist:

Wenn das Quadrat einer nat. Zahl n ungerade ist, so ist n ebenfalls eine ungerade Zahl.

Oder anders ausgedrückt:

A: n^2 ist eine ungerade Zahl.

B: n ist eine ungerade Zahl.

Zu beweisen ist:

$A \Rightarrow B$

Die logische Struktur eines indirekten Beweises ist:

$\neg(\neg B \wedge A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Vorgehensweise: Man bildet $(\neg B \wedge A)$ und führt dies zum Widerspruch. Daraus folgt dann $(A \Rightarrow B)$.

A: n^2 ist eine ungerade Zahl.

$\neg$B: n ist eine gerade Zahl.

Die Annahme $(\neg B \wedge A)$ lautet dann:

n ist eine gerade Zahl und n^2 ist eine ungerade Zahl.

$\Rightarrow$ Es gibt eine nat. Zahl m mit $2m = n$.

$\Rightarrow n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2\,(2m^2)$

$\Rightarrow n^2$ ist gerade – das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass n^2 ungerade ist.

Es wurde also gezeigt, dass die Annahme $(\neg B \wedge A)$ falsch ist. Also ist $\neg(\neg B \wedge A)$ wahr. Hieraus wiederum folgt aufgrund der logischen Struktur des indirekten Beweises, dass $(A \Rightarrow B)$ wahr ist.

q.e.d.

13.3 Beweis durch Kontraposition[196]

Hinweis: Das Beweisverfahren durch *Kontraposition* ist nicht zu verwechseln mit dem Verfahren des *indirekten Beweises*, siehe S. 222.

Die logische Struktur des *Beweises durch Kontraposition* ist folgende:

$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Hier die dazugehörige Wahrheitstafel[197]:

A	B	¬ A	¬ B	(A ⇒ B)	(¬ B ⇒ ¬ A)	((¬ B ⇒ ¬ A) ⇒ (A ⇒ B))
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Der Ausdruck „$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$" ist also eine Tautologie, so dass das Verfahren des Beweises durch Kontraposition legitimiert wurde.

Ausgangspunkt: Man möchte die Implikation „$A \Rightarrow B$" beweisen und hierfür keinen direkten Beweis verwenden. Daher zeigt man, dass „$\neg B \Rightarrow \neg A$" wahr ist, was dann impliziert, dass „$A \Rightarrow B$" wahr ist.

Vorgehensweise:

Man geht vom Gegenteil von „B", also „$\neg B$" aus. Hieraus schlussfolgert man (ggf. in mehreren Schritten), dass „$\neg A$" wahr ist. Dies bedeutet dann, dass auch „$A \Rightarrow B$" gilt.

[196] Siehe auch: Benölken/Gorski/Müller-Phillip: Leitfaden Arithmetik, S. 31

[197] Siehe: Wahrheitstafel (Beweis durch Kontraposition).xlsx

Beispiel:

Zu beweisen ist:

Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

Oder anders ausgedrückt:

A: Die Zahl n ist durch 6 teilbar.

B: Die Zahl n ist durch 3 teilbar.

Zu beweisen ist:

$A \Rightarrow B$

Die logische Struktur des Beweises durch Kontraposition ist:

$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Vorgehensweise: Man geht vom Gegenteil von „B“, also „¬B“ aus. Hieraus schlussfolgert man (in mehreren Schritten), dass „¬A“ wahr ist. Dies bedeutet dann, dass auch „A ⇒ B“ gilt.

Die Annahme lautet dann:

¬B: Die Zahl n sei nicht durch 3 teilbar.

⇒ Bei Division von n durch 3 bleibt ein Rest von 1 oder 2.
⇒ Es gibt zwei nat. Zahlen a und b ($b \in \{1; 2\}$) mit $n = 3a + b$.
⇒ Es gibt eine Zahl m mit $a = 2m$ (falls a gerade) oder $a = 2m + 1$
⇒ Es gibt eine Zahl m mit $n = 3\,(2m) + b$ oder $n = 3\,(2m + 1) + b$, wobei $b \in \{1; 2\}$
⇒ Es gibt eine Zahl m mit $n = 6m + b$ oder $n = 6m + 3 + b$, wobei $b \in \{1; 2\}$
⇒ n lässt sich darstellen als $6m + 1$, $6m + 2$, $6m + 4$ oder $6m + 5$
⇒ n ist nicht durch 6 teilbar.

$\Rightarrow \neg A$

q.e.d.

Übung:

Beweisen Sie: Wenn eine Zahl durch 8 teilbar ist, dann ist sie auch durch 4 teilbar.

Lösung:

Der Beweis lässt sich analog zu dem Beweis im Beispiel führen.

13.4 Übungen zu den Beweisformen

Beachten Sie bitte das Kapitel „Gerade und ungerade Zahlen“ (S. 197).

13.4.1 Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

Beweisen Sie:

Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

Geben Sie *drei* Beweise an:

- einen direkten Beweis
- einen indirekten Beweis
- einen Beweis durch Kontraposition

Lösung (direkter Beweis):

Gegeben: Zwei gerade Zahlen a und b, welche sich folgendermaßen darstellen lassen:

$a = 2 \cdot x$ (mit $x \in \mathbb{N}$)
$b = 2 \cdot y$ (mit $y \in \mathbb{N}$)

A: n ist die Summe von a und b.

B: n ist eine gerade Zahl.

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Beweis [direkt]:

$n = a + b \quad \Rightarrow \quad n = 2 \cdot x + 2 \cdot y \quad \Rightarrow \quad n = 2 \cdot (x + y) \quad \Rightarrow$ n ist eine gerade Zahl.

q.e.d.

Lösung (indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch)):

Gegeben: Zwei gerade Zahlen a und b, welche sich folgendermaßen darstellen lassen:

$a = 2 \cdot x$ (mit $x \in \mathbb{N}$)
$b = 2 \cdot y$ (mit $y \in \mathbb{N}$)

A: n ist die Summe von a und b.

B: n ist eine gerade Zahl.

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Beweis [indirekt, also Vorgehensweise: $\neg(\neg B \wedge A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$]:

$\neg B \wedge A$
$\Rightarrow$ n ist eine ungerade Zahl $\wedge$ n ist die Summe von a und b.
$\Rightarrow n = 2 \cdot z + 1$ (mit $z \in \mathbb{N}$) $\wedge$ $n = a + b$
$\Rightarrow n = 2 \cdot z + 1$ (mit $z \in \mathbb{N}$) $\wedge$ $n = 2 \cdot x + 2 \cdot y$ (mit $x, y \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow n = 2 \cdot z + 1$ (mit $z \in \mathbb{N}$) $\wedge$ $n = 2 \cdot (x + y)$ (mit $x, y \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow 2 \cdot z + 1 = 2 \cdot (x + y)$ (mit $x, y, z \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow$ Eine ungerade Zahl ist gleich einer geraden Zahl. ↯
$\Rightarrow \neg(\neg B \wedge A)$

q.e.d.

Lösung (Beweis durch Kontraposition):

Gegeben: Zwei gerade Zahlen a und b, welche sich folgendermaßen darstellen lassen:

$a = 2 \cdot x$ (mit $x \in \mathbb{N}$)
$b = 2 \cdot y$ (mit $y \in \mathbb{N}$)

A: n ist die Summe von a und b.

B: n ist eine gerade Zahl.

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Beweis durch Kontraposition [also Vorgehensweise: $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$]:

$\neg B$
$\Rightarrow$ n ist eine ungerade Zahl
$\Rightarrow$ $n = 2 \cdot z + 1$ (mit $z \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow$ $n \neq 2 \cdot (x + y) = 2 \cdot x + 2 \cdot y$ (mit $x, y \in \mathbb{N}$), weil eine ungerade Zahl nicht gerade ist.
$\Rightarrow$ n ist nicht die Summe von a und b.
$\Rightarrow$ $\neg A$

q.e.d.

13.4.2 Das Produkt zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

Beweisen Sie:

Das Produkt zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

Geben Sie *drei* Beweise an:

- einen direkten Beweis
- einen indirekten Beweis
- einen Beweis durch Kontraposition

Lösung (direkter Beweis):

Gegeben: Zwei gerade Zahlen a und b, welche sich folgendermaßen darstellen lassen:

$a = 2 \cdot x$ (mit $x \in \mathbb{N}$)
$b = 2 \cdot y$ (mit $y \in \mathbb{N}$)

A: n ist das Produkt von a und b.

B: n ist eine gerade Zahl.

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Beweis [direkt]:

$n = a \cdot b \;\Rightarrow\; n = (2 \cdot x) \cdot (2 \cdot y) \;\Rightarrow\; n = 2 \cdot (2 \cdot x \cdot y) \;\Rightarrow$ n ist eine gerade Zahl.

q.e.d.

Lösung (indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch)):

Gegeben: Zwei gerade Zahlen a und b, welche sich folgendermaßen darstellen lassen:

$a = 2 \cdot x$ (mit $x \in \mathbb{N}$)
$b = 2 \cdot y$ (mit $y \in \mathbb{N}$)

A: n ist das Produkt von a und b.

B: n ist eine gerade Zahl.

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Beweis [indirekt, also Vorgehensweise: $\neg(\neg B \wedge A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$]:

$\neg B \wedge A$
$\Rightarrow$ n ist eine ungerade Zahl $\wedge$ n ist das Produkt von a und b.
$\Rightarrow\; n = 2 \cdot z + 1$ (mit $z \in \mathbb{N}$) $\wedge\; n = a \cdot b$
$\Rightarrow\; n = 2 \cdot z + 1$ (mit $z \in \mathbb{N}$) $\wedge\; n = (2 \cdot x) \cdot (2 \cdot y)$ (mit $x, y \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow\; n = 2 \cdot z + 1$ (mit $z \in \mathbb{N}$) $\wedge\; n = 2 \cdot (2 \cdot x \cdot y)$ (mit $x, y \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow\; 2 \cdot z + 1 = 2 \cdot (2 \cdot x \cdot y)$ (mit $x, y, z \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow$ Eine ungerade Zahl ist gleich einer geraden Zahl. ↯
$\Rightarrow\; \neg(\neg B \wedge A)$

q.e.d.

Lösung (Beweis durch Kontraposition):

Gegeben: Zwei gerade Zahlen a und b, welche sich folgendermaßen darstellen lassen:

$a = 2 \cdot x$ (mit $x \in \mathbb{N}$)
$b = 2 \cdot y$ (mit $y \in \mathbb{N}$)

A: n ist das Produkt von a und b.

B: n ist eine gerade Zahl.

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Beweis durch Kontraposition [also Vorgehensweise: $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$]:

$\neg B$
$\Rightarrow$ n ist eine ungerade Zahl
$\Rightarrow$ $n = 2 \cdot z + 1$ (mit $z \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow$ $n \neq 2 \cdot (2 \cdot x \cdot y) = (2 \cdot x) \cdot (2 \cdot y)$ (mit $x, y \in \mathbb{N}$), weil eine ungerade Zahl nicht gerade ist.
$\Rightarrow$ n ist nicht das Produkt von a und b.
$\Rightarrow$ $\neg A$

q.e.d.

13.4.3 Es gibt keine natürliche Zahl, deren Quadrat die Zahl 8 ist.[198]

Übung: Wandeln Sie den Satz

„Es gibt keine natürliche Zahl, deren Quadrat die Zahl 8 ist.“

in die Gestalt $A \Rightarrow B$ um.

A:

B:

$A \Rightarrow B$:

[198] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 1.3 Beweisen, 2020

Lösung:

„Es gibt keine natürliche Zahl, deren Quadrat die Zahl 8 ist."

A: Das Quadrat einer Zahl x ist gleich 8.

B: x ist keine natürliche Zahl.

$A \Rightarrow B$: Wenn das Quadrat einer Zahl x gleich 8 ist, dann ist x keine natürliche Zahl.

Beweisen Sie:

Wenn das Quadrat einer Zahl x gleich 8 ist, dann ist x keine natürliche Zahl.

Geben Sie *zwei* Beweise an:

- einen indirekten Beweis durch Widerspruch
- einen Beweis durch Kontraposition

Lösung (Beweis durch Widerspruch):

A: Das Quadrat einer Zahl x ist gleich 8.

B: x ist keine natürliche Zahl.

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Beweis [durch Widerspruch, also Vorgehensweise: $\neg(\neg B \wedge A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$]:

$\neg B \wedge A$
$\Rightarrow$ x *ist* eine natürliche Zahl. $\wedge$ Das Quadrat einer Zahl x ist gleich 8.
$\Rightarrow$ $x \in \mathbb{N} \wedge x^2 = 8$
$\Rightarrow$ $x \in \mathbb{N} \wedge 2^2 = 4 < x^2 = 8 < 3^2 = 9$
$\Rightarrow$ $x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 3$
$\Rightarrow$ x ist eine natürliche Zahl und x ist größer als 2 und kleiner als 3. ↯
$\Rightarrow$ $\neg(\neg B \wedge A)$

q.e.d.

Lösung (Beweis durch Kontraposition):

A: Das Quadrat einer Zahl x ist gleich 8.

B: x ist keine natürliche Zahl.

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Beweis durch Kontraposition [also Vorgehensweise: $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$]:

$\neg B$
$\Rightarrow$ x *ist* eine natürliche Zahl.
$\Rightarrow$ für $x = 2$ ist $x^2 = 4$ $\wedge$ für $x = 3$ ist $x^2 = 9$
$\Rightarrow$ Das Quadrat einer solchen (natürlichen) Zahl x ist *ungleich* 8, weil es zwischen 2 und 3 keine natürlichen Zahlen gibt.
$\Rightarrow$ $\neg A$

q.e.d.

13.4.4 Direkte Beweise zur Teilbarkeit

Zur Erinnerung:

Definition der Teilbarkeit in $\mathbb{N}$:	$a \mid b :\Leftrightarrow \bigvee_{x \in \mathbb{N}} a \cdot x = b$	(für alle natürlichen Zahlen a und b)
In Worten:	„a teilt b (oder a **ist Teiler** von b) gdw. eine natürliche Zahl x existiert, für die gilt: $a \cdot x = b$.“	

Im Folgenden soll auf ausgewählte Übungsaufgaben näher eingegangen werden.

Teilbarkeitsregeln[199]:

(1) Es gilt $1 \mid n$ und $n \mid n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel: $1 \mid 5$ und $5 \mid 5$

Beweis (konkret): Es existiert ein $x = 5$ mit $1 \cdot x = 5$.
Es existiert ein $y = 1$ mit $5 \cdot y = 5$.

Beweis (allgemein): Es existiert ein $x = n$ mit $1 \cdot x = n$.
Es existiert ein $y = 1$ mit $n \cdot y = n$.

(4) Aus $m \mid n$ folgt $m \mid (t \cdot n)$ für alle $t \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Aus $4 \mid 20$ folgt $4 \mid (t \cdot 20)$.

Beweis (konkret): $4 \mid 20$
$\Rightarrow$ Es existiert ein $x = 5$ mit $4 \cdot x = 20$.
$\Rightarrow$ Es existiert ein $y = x \cdot t$ mit $4 \cdot y = 20 \cdot t$.
$\Rightarrow 4 \mid (t \cdot 20)$

Beweis (allgemein): $m \mid n$
$\Rightarrow$ Es existiert ein x mit $m \cdot x = n$.
$\Rightarrow$ Es existiert ein $y = x \cdot t$ mit $m \cdot y = n \cdot t$.
$\Rightarrow m \mid (t \cdot n)$

[199] Siehe: Scheid, H. / Schwarz, W.: Elemente der Arithmetik und Algebra, Springer Spektrum, 6. Auflage, S. 9

Aufgaben (Teilbarkeit und Primzahlen)[200]:

1.10 (a) Aus $a \mid b$ und $a \mid c$ folgt $a^2 \mid (b \cdot c)$.

Beispiel: Aus $3 \mid 6$ und $3 \mid 9$ folgt $3^2 \mid (6 \cdot 9)$.

Beweis (konkret): $3 \mid 6$ und $3 \mid 9$
$\Rightarrow$ Es existiert ein $x = 2$ mit $3 \cdot x = 6$.
und es existiert ein $y = 3$ mit $3 \cdot y = 9$.
$\Rightarrow$ $6 \cdot 9 = 3 \cdot x \cdot 3 \cdot y = 3^2 \cdot x \cdot y = 3^2 \cdot z$ (mit $z = x \cdot y$)
$\Rightarrow$ $3^2 \mid (6 \cdot 9)$

Beweis (allgemein): $a \mid b$ und $a \mid c$
$\Rightarrow$ Es existiert ein x mit $a \cdot x = b$.
und es existiert ein y mit $a \cdot y = c$.
$\Rightarrow$ $b \cdot c = a \cdot x \cdot a \cdot y = a^2 \cdot x \cdot y = a^2 \cdot z$ (mit $z = x \cdot y$)
$\Rightarrow$ $a^2 \mid (b \cdot c)$

Aufgaben (ggT und kgV)[201]:

1.31 (b) Aus $a \mid c$ und $b \mid c$ und $ggT(a, b) = 1$ folgt $(a \cdot b) \mid c$.

Beispiel: Aus $3 \mid 30$ und $5 \mid 30$ und $ggT(3, 5) = 1$ folgt $(3 \cdot 5) \mid 30$

Beweis (konkret): $3 \mid 30$ und $5 \mid 30$ und $ggT(3, 5) = 1$
$\Rightarrow$ Es existiert ein x mit $3 \cdot x = 30$
und es existiert ein y mit $5 \cdot y = 30$
und $kgV(3, 5) = 3 \cdot 5$.
$\Rightarrow$ Die Zahl 30 ist somit ein Vielfaches der 3 und ein Vielfaches der 5, d.h. in ihrer Primfaktorzerlegung muss das $kgV(3, 5)$ enthalten sein.
$\Rightarrow$ $30 = kgV(3, 5) \cdot z = 3 \cdot 5 \cdot z$ (mit $z \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow$ $(3 \cdot 5) \mid 30$

Beweis (allgemein): $a \mid c$ und $b \mid c$ und $ggT(a, b) = 1$
$\Rightarrow$ Es existiert ein x mit $a \cdot x = c$
und es existiert ein y mit $b \cdot y = c$
und $kgV(a, b) = a \cdot b$.
$\Rightarrow$ Die Zahl c ist somit ein Vielfaches von a und ein Vielfaches von b, d.h. in ihrer Primfaktorzerlegung muss das $kgV(a, b)$ enthalten sein.
$\Rightarrow$ $c = kgV(a, b) \cdot z = a \cdot b \cdot z$ (mit $z \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow$ $(a \cdot b) \mid c$

[200] Siehe: Scheid, H. / Schwarz, W.: Elemente der Arithmetik und Algebra, Springer Spektrum, 6. Auflage, S. 17
[201] Siehe: Scheid, H. / Schwarz, W.: Elemente der Arithmetik und Algebra, Springer Spektrum, 6. Auflage, S. 29

14 Die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen

14.1 Vorbemerkung

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die natürlichen, die ganzen, die gebrochenen, die rationalen und die reellen Zahlen als gegeben angesehen (siehe S. 89). Es soll in den nachfolgenden Kapiteln nachgeholt werden, die *mathematische Konstruktion* dieser Zahlenmengen *zu umreißen* bzw. sie aus schultypischer Sicht einzuführen:

- Die natürlichen Zahlen
  - als Kardinalzahlen (siehe S. 249)
  - als Ordinalzahlen (siehe S. 253)
- Die ganzen Zahlen (siehe S. 275)
- Die rationalen und gebrochenen Zahlen (siehe S. 277)
- Die reellen Zahlen (siehe S. 278)

Hinsichtlich der mathematischen Konstruktion sei vorweggenommen:

- Die natürlichen Zahlen sind *Äquivalenzklassen gleichmächtiger endlicher Mengen*.
- Die ganzen Zahlen sind *Äquivalenzklassen differenzengleicher Paare*.
- Die rationalen Zahlen sind *Äquivalenzklassen quotientengleicher Paare*.
- Die reellen Zahlen sind *Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen.*

Um verstehen zu können, was sich hinter diesen Aussagen verbirgt, spielt der Begriff der *Äquivalenzklasse* also eine übergeordnete Rolle, so dass wir uns ihm nun in Ruhe annähern wollen.

14.2 Was ist eine Äquivalenzklasse?

Der Begriff der *Äquivalenzklasse* baut auf dem Begriff der *Äquivalenzrelation* auf. Eine *Äquivalenzrelation* wiederum ist eine spezielle *Relation*. Sie muss nämlich *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* sein.

Hieraus ergibt sich folgende Vorgehensweise:

1. Wiederholung der Begriffe *kartesisches Produkt* und *Relation*
2. Wann ist eine Relation *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* und somit eine *Äquivalenzrelation*?
3. Was ist eine *Äquivalenzklasse*?

14.2.1 Wdh.: Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt X × Y (gelesen: „X Kreuz Y“) von X und Y ist die Menge aller geordneten Paare (x, y), deren erste Komponente x ein Element aus X und deren zweite Komponente y ein Element aus Y ist.[202]

In Zeichen: $X \times Y := \{ (x,y) | \, x \in X \wedge y \in Y \}$

14.2.2 Wdh.: Zweistellige Relation

R ist eine zweistellige Relation zwischen X und Y genau dann, wenn R eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times Y$ ist.[203]

In Zeichen: $R \subseteq X \times Y$

14.2.3 Zweistellige Relation *in* einer Menge M

Man kann das kartesische Produkt einer Menge M $(= X = Y)$ mit sich selbst bilden und *in* M Relationen definieren:

Beispiel: Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen[204]: M = {1, 2, 3}

Dann beinhaltet das kartesische Produkt M × M alle möglichen geordneten Paare:

M × M = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}

Man könnte beispielsweise folgende Relationen (Teilmengen des kartesischen Produkts M × M) *in* M definieren:

R_1 := {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)}

R_2 := {(1, 1), (1, 2)}

R_3 := {(1, 2), (1, 3), (2, 3)}

R_4 := {(1, 1), (1, 2), (2, 3)}

R_5 := {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

Die Relation R_3 könnte man auch mit „<“ und die Relation R_5 mit „=“ bezeichnen.

---

[202] Siehe: Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 32
[203] Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 54
[204] Momentan werden die natürlichen Zahlen noch als bekannt vorausgesetzt, um den Begriff der Relation leichter verständlich machen zu können.

14.2.4 Relationseigenschaften

a) Reflexivität[205]

Eine Relation R ist *reflexiv* (in M) $:\Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in M} xRx$

In Worten: Eine Relation R ist *reflexiv* (in M) ist definiert als: Für alle x Element M gilt, dass x in Relation zu sich selbst steht.

Beispiel:

Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen: M = {1, 2, 3}.

Man definiere die Relation R_1 folgendermaßen:

$R_1 := \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Die Relation R_1 *ist* reflexiv, denn

1 steht in Relation zur 1, da $(1, 1) \in R_1$,
2 steht in Relation zur 2, da $(2, 2) \in R_1$,
3 steht in Relation zur 3, da $(3, 3) \in R_1$.

Gegenbeispiel:

Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen: M = {1, 2, 3}.

Man definiere die Relation R_2 folgendermaßen:

$R_2 := \{(1, 1), (1, 2)\}$

Die Relation R_2 ist *nicht* reflexiv, denn

die 1 steht zwar in Relation zur 1, da $(1, 1) \in R_2$,
aber die 2 steht nicht in Relation zur 2, da $(2, 2) \notin R_2$.

[205] Siehe: Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 62

b) Symmetrie[206]

Eine Relation R ist *symmetrisch* (in M) $:\Leftrightarrow \bigwedge_{x,y \in M} xRy \Longrightarrow yRx$

In Worten: Eine Relation R ist *symmetrisch* (in M) ist definiert als: Für alle x, y Element M gilt, dass, wenn x in Relation y steht, dann auch y in Relation zu x steht.

Beispiel:

Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen: M = {1, 2, 3}.

Man definiere die Relation R_1 folgendermaßen:

$R_1 := \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Die Relation R_1 *ist* symmetrisch, denn

1 steht in Relation zur 2, da $(1, 2) \in R_1$ und 2 steht in Relation zur 1, da $(2, 1) \in R_1$,
1 steht in Relation zur 1, da $(1, 1) \in R_1$,
2 steht in Relation zur 2, da $(2, 2) \in R_1$,
3 steht in Relation zur 3, da $(3, 3) \in R_1$.

Dass z.B. die 2 nicht in Relation zur 3 und die 3 nicht in Relation zur 2 stehen, ist unerheblich, da eine Implikation auch wahr ist, wenn die Voraussetzung falsch ist (siehe S. 75).

Gegenbeispiel:

Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen: M = {1, 2, 3}.

Man definiere die Relation R_2 folgendermaßen:

$R_2 := \{(1, 1), (1, 2)\}$

Die Relation R_2 ist *nicht* symmetrisch, da die 1 in Relation zur 2 steht, aber die 2 nicht in Relation zur 1.

[206] Siehe: Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 62

c) Transitivität[207]

Eine Relation R ist *transitiv* (in M) $:\Leftrightarrow \bigwedge_{x,y,z\in M} xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz$

In Worten: Eine Relation R ist *transitiv* (in M) ist definiert als: Für alle x, y, z Element M gilt, dass, wenn x in Relation y steht und y in Relation zu z steht, dann auch x in Relation zu z steht.

Beispiel:

Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen: M = {1, 2, 3}.

Man definiere die Relation R_3 folgendermaßen:

$R_3 := \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

Die Relation R_3 *ist transitiv*, denn folgende Aussagen sind wahr:

$1R2 \wedge 2R3 \Rightarrow 1R3$,
$1R3 \wedge$ falsch $\Rightarrow$? (ist wahr, da die Voraussetzung falsch ist, siehe S. 75),
$2R3 \wedge$ falsch $\Rightarrow$? (ist wahr, siehe oben).

Gegenbeispiel:

Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen: M = {1, 2, 3}.

Man definiere die Relation R_4 folgendermaßen:

$R_4 := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

Diese Relation ist nicht *transitiv*, da folgende Aussage falsch ist:

$1R2 \wedge 2R3 \Rightarrow 1R3$

Die Voraussetzung ist wahr, aber die Behauptung ist falsch, also ist die Implikationsaussage falsch, siehe S. 75.

[207] Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 62

14.2.5 Äquivalenzrelation

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, g.d.w. sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel:

Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen: M = {1, 2, 3}

Man betrachte wieder folgende Relationen:

R_1 := {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)}

R_2 := {(1, 1), (1, 2)}

R_3 := {(1, 2), (1, 3), (2, 3)}

R_4 := {(1, 1), (1, 2), (2, 3)}

R_5 := {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

Die Relationen R_1 und R_5 sind reflexiv, symmetrisch und transitiv und somit Äquivalenzrelationen.

Die Relationen R_2, R_3 und R_4 sind nicht reflexiv und nicht symmetrisch und somit keine Äquivalenzrelationen.

14.2.6 Äquivalenzklasse

Mithilfe der Äquivalenzrelation R lässt sich für jedes Element $a \in M$ folgende Menge bilden:

$$[a] = \{x \mid x \in M \text{ und } xRa\}$$

Diese Menge $[a]$ heißt *Äquivalenzklasse*. Das Element a heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $[a]$.[208]

Erläuterung:

Mithilfe einer Äquivalenz*relation* lässt sich also eine Menge M in Äquivalenz*klassen* unterteilen. Innerhalb einer Äquivalenzklasse stehen alle Elemente zueinander in Relation. Ein beliebiges Element einer Äquivalenzklasse kann als Repräsentant dieser Äquivalenzklasse gewählt werden.

Die Äquivalenzklassen sind disjunkt und ergeben vereinigt wieder die Menge M.

[208] Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen – Relationen – Funktionen, 2016, S. 73

Beispiel 1: Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen: M = {1, 2, 3}

Man betrachte die Äquivalenzrelation R_1:

$R_1 := \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Diese unterteilt die Menge M in die Klassen

$[1] = [2] = \{1, 2\}$ (denn die 1 steht in Relation zur 2 und umgekehrt)

und

$[3] = \{3\}$.

Die Vereinigung aller Klassen ergibt wieder die Menge M.

Beispiel 2: Sei M eine Teilmenge der *natürlichen* Zahlen: M = {1, 2, 3}

Man betrachte die Äquivalenzrelation R_5:

$R_5 := \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Diese unterteilt die Menge M in die Klassen

$[1] = \{1\}$

und

$[2] = \{2\}$

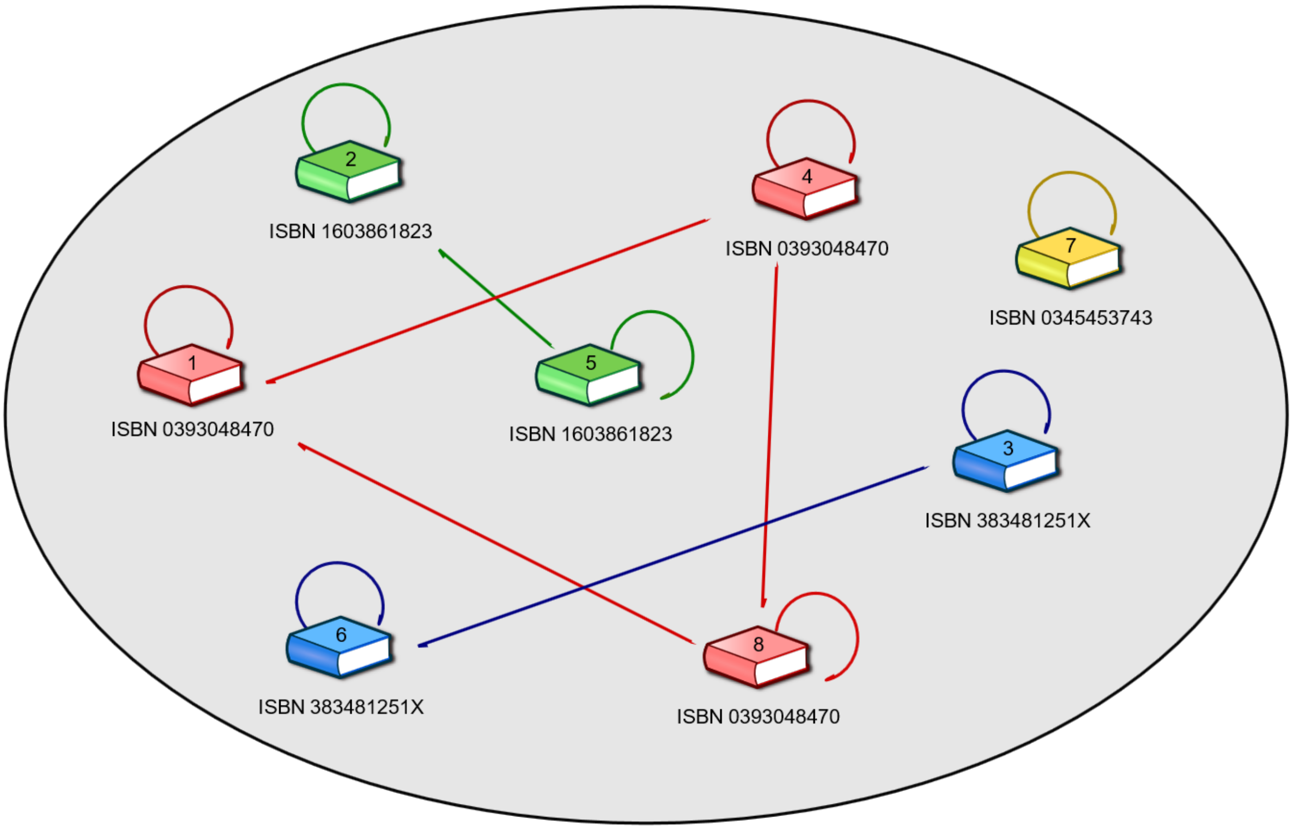
und

$[3] = \{3\}$.

Die Vereinigung aller Klassen ergibt wieder die Menge M.

Beispiel 3: Sei M eine Menge von acht Buchexemplaren. Die Bücher wurden beliebig mit den Ziffern 1 – 8 durchnummeriert. Weiterhin besitzt jedes Buch eine ISBN.

Als Relation wähle man „Buch a und Buch b besitzen dieselbe ISBN“ [209]:



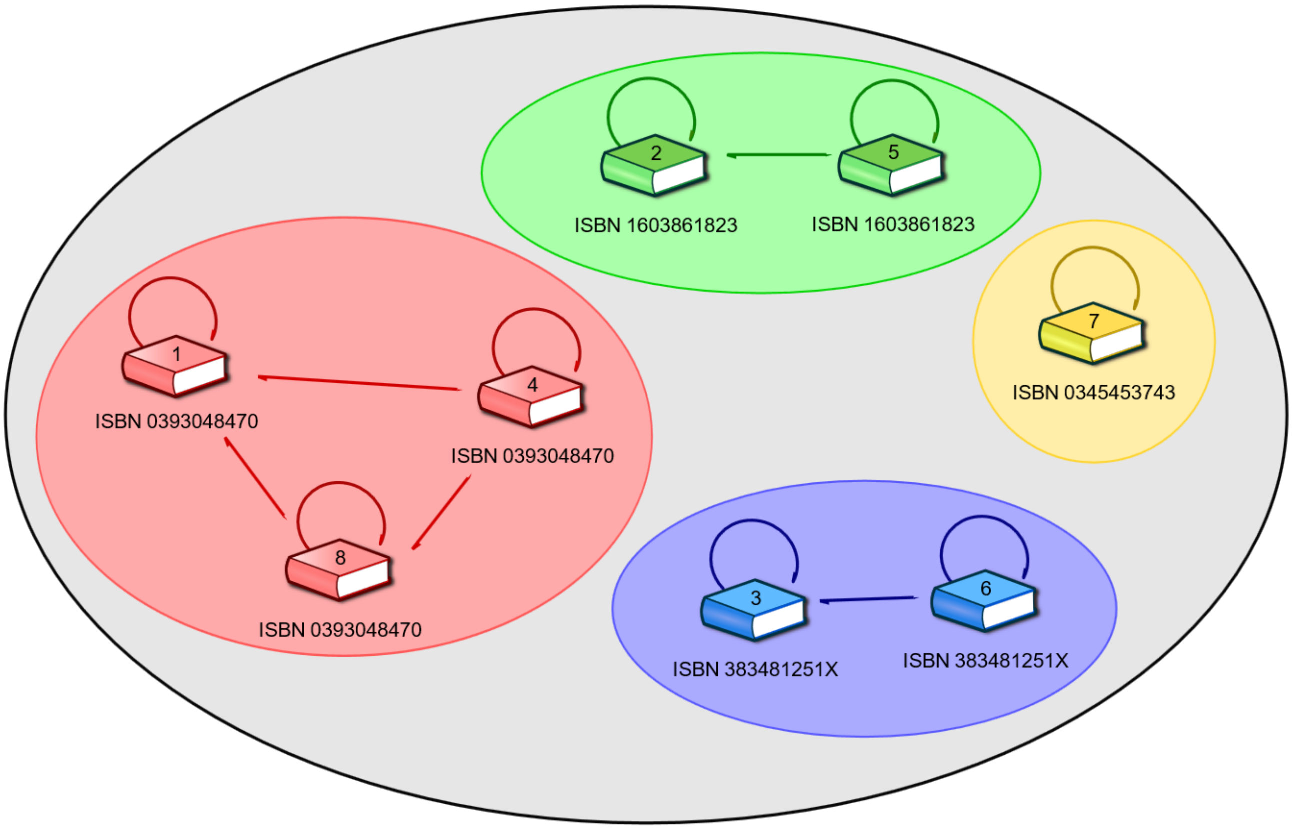
Die Relation „a und b besitzen dieselbe ISBN“ ist

- reflexiv (Das Buch a besitzt dieselbe ISBN wie das Buch a.),
- symmetrisch (Wenn das Buch a dieselbe ISBN wie das Buch b besitzt, dann besitzt auch das Buch b dieselbe ISBN wie das Buch a.)
- transitiv (Wenn das Buch a dieselbe ISBN wie das Buch b besitzt und das Buch b dieselbe ISBN besitzt wie das Buch c, dann besitzt auch das Buch a dieselbe ISBN wie das Buch c.)

und somit eine Äquivalenzrelation.

[209] Entnommen aus Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Äquivalenzrelation#Äquivalenzrelation

Die Äquivalenzrelation „a und b besitzen dieselbe ISBN“ unterteilt die Menge M in die Klassen:



Die Vereinigung aller Klassen ergibt wieder die Menge M.

14.3 Natürliche Zahlen als Kardinalzahlen endlicher Mengen

14.3.1 Konstruktion der natürlichen Zahlen aus mengentheoretischer Sicht

a) Erzeugung eines Mengensystems

Alle endlichen Mengen werden zu einer Menge $\mathfrak{M}$ zusammengefasst. Die Menge $\mathfrak{M}$ nennt man dann ein Mengensystem.

Beispiel: Man betrachte die Mengen:

$A = \{k_a\}$
$B = \{k_b, k_c\}$
$C = \{k_d, k_e, k_f\}$
$D = \{k_g, k_h\}$
$E = \{k_i, k_j, k_k\}$

Hierbei seien k_a … k_k beliebige voneinander verschiedene Elemente.

Diese Mengen sind endlich, da sie endlich viele Elemente enthalten. Sie sind daher Elemente des Mengensystems $\mathfrak{M}$.

Hinweis: Im Mengensystem $\mathfrak{M}$ sind zudem noch unendlich viele weitere endliche Mengen enthalten.

b) Wahl einer Äquivalenzrelation

Im Mengensystem $\mathfrak{M}$ stellt die Gleichmächtigkeit $\sim$ eine Äquivalenzrelation dar.

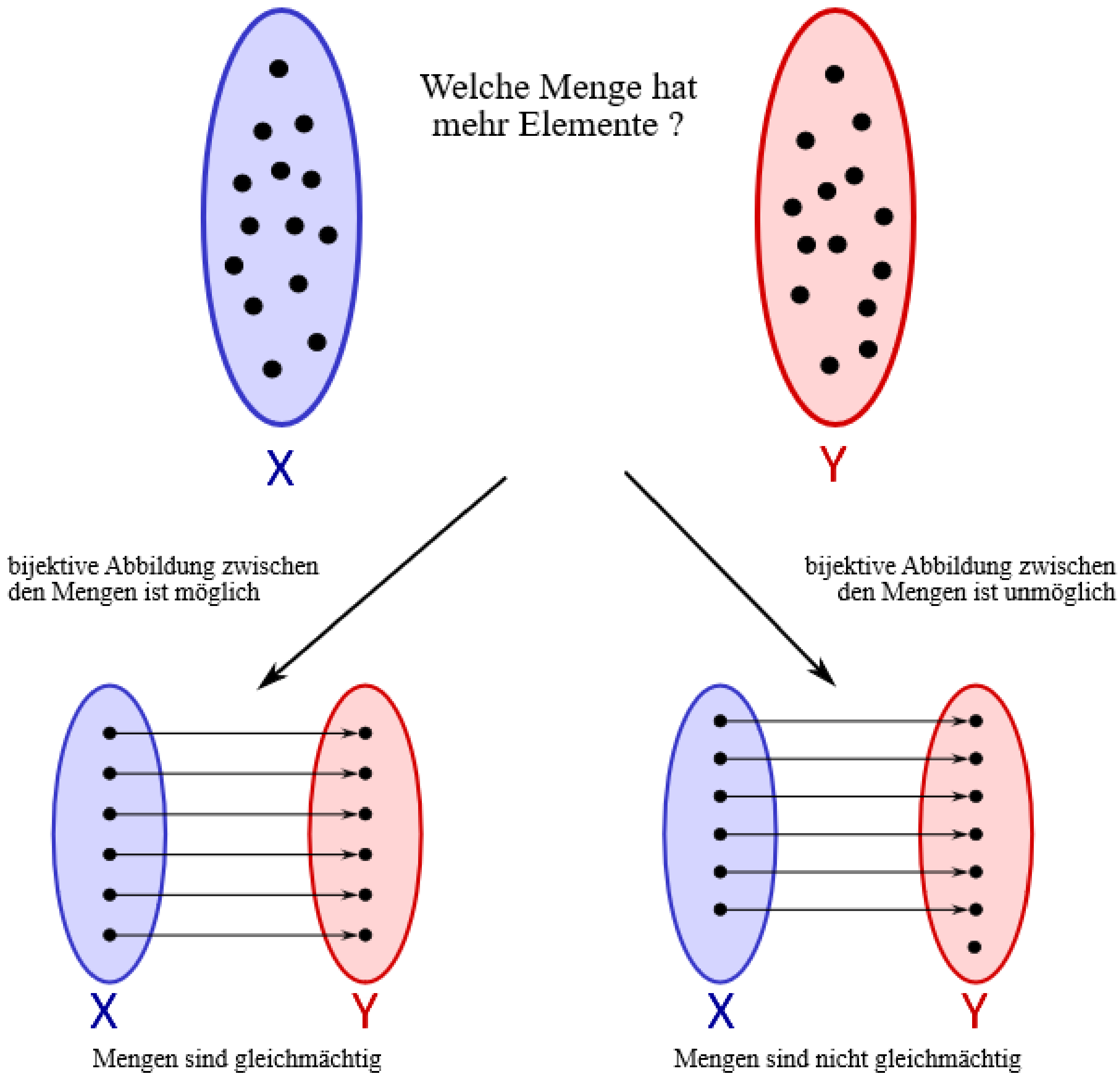
Erinnerung: Zwei *endliche* Mengen sind zueinander gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen besitzen (Siehe S. 93).

Hinweis: Die Wortwahl „die gleiche Anzahl" ist hier etwas problematisch, weil die natürlichen Zahlen erst noch definiert werden sollen. Besser wäre „gleich viele" oder mathematisch ausgedrückt „Eine Menge A heißt gleichmächtig zu einer Menge B, wenn es eine Bijektion[210] von A auf B gibt."

Anschaulich kann man sich mithilfe des Begriffs der Bijektion die Gleichmächtigkeit von Mengen so verdeutlichen[211]:

---

[210] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Bijektive_Funktion
[211] Entnommen aus: https://de.wikipedia.org/wiki/Mächtigkeit_(Mathematik)#Gleichmächtigkeit,_Mächtigkeit



Im obigen Beispiel waren

$A = \{k_a\}$
$B = \{k_b, k_c\}$
$C = \{k_d, k_e, k_f\}$
$D = \{k_g, k_h\}$
$E = \{k_i, k_j, k_k\}$

Die Mengen B und D sowie C und E sind *gleichmächtig* zueinander.

Es gilt: $B \sim D$ sowie $C \sim E$

Die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation, weil

- jede Menge genauso viele Elemente wie sie selbst besitzt (Reflexivität)
- wenn eine Menge M genauso viele Elemente wie eine Menge N besitzt, die Menge N auch genauso viele Elemente wie die Menge M besitzt (Symmetrie)
- wenn eine Menge M genauso viele Elemente wie N besitzt und N genauso viele Elemente wie O besitzt, dann auch M genauso viele Elemente wie O besitzt (Transitivität).

c) Einteilung in Klassen und Definition einer *natürlichen Zahl*

Das Mengensystem $\mathfrak{M}$ wird durch die Äquivalenzrelation $\sim$ in Äquivalenzklassen unterteilt. In jeder Klasse befinden sich zueinander gleichmächtige Mengen, d.h. in jeder Klasse sind nur Mengen mit gleich vielen Elementen.

Eine natürliche Zahl ist eine (Äquivalenz)Klasse gleichmächtiger endlicher Mengen.[212]

Für das obige Beispiel würde gelten:

$1 := [A] = \{\{k_a\}, \dots\}$

$2 := [B] = [D] = \{\{k_b, k_c\}, \{k_g, k_h\}, \dots\}$

$3 := [C] = [E] = \{\{k_d, k_e, k_f\}, \{k_i, k_j, k_k\}, \dots\}$

Die „1“ ist also die Äquivalenzklasse, die alle Mengen mit nur einem Element enthält. Die „2“ ist die Klasse, die alle Mengen mit genau zwei Elementen enthält, usw.

[212] Siehe: Raudies, M.: Grundlegende Begriffe der Mathematik, 2017, S. 62

14.3.2 Beispielhafte Definition einer Operation: Addition *)

Seien a und b beliebige natürliche Zahlen und $a = [A]$ sowie $b = [B]$, wobei $A \cap B = \varnothing$. Dann heißt die natürliche Zahl $c = [A \cup B]$ die Summe $a + b$ von a und b.
Die Operation $\{ (a, b) \mapsto c \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge c = a + b \}$ heißt *Addition* im Bereich der nat. Zahlen.[213]

Beispiel:

Man betrachte die Mengen:

$A = \{k_a\}$
$B = \{k_b, k_c\}$
$C = \{k_d, k_e, k_f\}$

Hierbei seien $k_a \ldots k_f$ beliebige voneinander verschiedene Elemente.

Es gilt offensichtlich: $A \cap B = \varnothing$.

Seien a und b beliebige natürliche Zahlen, z.B. sei $a = 1$ und $b = 2$.

Dann ist $a = [A]$ die Äquivalenzklasse, die alle Mengen (z.B. die Menge A) mit *einem* Element enthält und $b = [B]$ die Äquivalenzklasse, die alle Mengen (z.B. die Menge B) mit *zwei* Elementen enthält.

Es gilt: $A \cup B = \{k_a\} \cup \{k_b, k_c\} = \{k_a, k_b, k_c\}$

Somit enthält die Menge $A \cup B$ *drei* Elemente und es gilt: $[A \cup B] = [C]$

Die natürliche Zahl $c = [C]$ ist die Äquivalenzklasse, die alle Mengen mit *drei* Elementen (z.B. $A \cup B = \{k_a, k_b, k_c\}$ oder $C = \{k_d, k_e, k_f\}$) enthält. Nach der Definition der Addition gilt also:

$$1 \quad + \quad 2 \quad = \quad 3$$

bzw. $$[A] \quad + \quad [B] \quad = \quad [C]$$

bzw. $$[\{k_a\}] \quad + \quad [\{k_b, k_c\}] \quad = \quad [\{k_a\} \cup \{k_b, k_c\}] = [\{k_a, k_b, k_c\}] = [\{k_d, k_e, k_f\}]$$

Addiert man zu der Äquivalenzklasse, die durch eine Menge mit *einem* Element repräsentiert wird, eine Äquivalenzklasse, die durch eine Menge mit *zwei* Elementen repräsentiert wird, so erhält man eine Äquivalenzklasse, die durch eine Menge mit *drei* Elementen repräsentiert wird.

[213] Siehe: Raudies, M.: Grundlegende Begriffe der Mathematik, 2017, S. 65

14.3.3 Beispielhafte Definition einer Operation: Subtraktion *)

Seien a und b beliebige natürliche Zahlen und a = [A] sowie b = [B], wobei $B \subseteq A$. Dann heißt die natürliche Zahl c = [A \ B] die Differenz a - b von a und b.
Die Operation $\{ (a, b) \mapsto c \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge c = a - b \}$ heißt *Subtraktion* im Bereich der nat. Zahlen.

Beispiel:

Man betrachte folgende Mengen:

$A = \{s_1, s_2, s_3\}$
$B = \{s_2, s_3\}$
$C = \{s_1\}$

Hierbei seien $s_1 \dots s_3$ beliebige voneinander verschiedene Elemente.

Es gilt offensichtlich: $B \subseteq A$

Seien a und b beliebige natürliche Zahlen, z.B. sei a = 3 und b = 2.

Dann ist a = [A] die Äquivalenzklasse, die alle Mengen (z.B. die Menge A) mit *drei* Element enthält und b = [B] die Äquivalenzklasse, die alle Mengen (z.B. die Menge B) mit *zwei* Elementen enthält.

Es gilt: $A \setminus B = \{s_1, s_2, s_3\} \setminus \{s_2, s_3\} = \{s_1\} = C$

Somit enthält die Menge A \ B *ein* Element und es gilt: [A \ B] = [C]

Die natürliche Zahl c = [C] ist die Äquivalenzklasse, die alle Mengen mit *einem* Element (z.B. $C = \{s_1\}$) enthält. Nach der Definition der Subtraktion gilt also:

$$3 \quad - \quad 2 \quad = \quad 1$$

bzw. $$[A] \quad - \quad [B] \quad = \quad [C]$$

bzw. $$[\{s_1, s_2, s_3\}] \quad - \quad [\{s_2, s_3\}] \quad = \quad [\{s_1, s_2, s_3\} \setminus \{s_2, s_3\}] = [\{s_1\}] = [\{s_2\}] = [\{s_3\}]$$

Subtrahiert man von der Äquivalenzklasse, die durch eine Menge mit *drei* Elementen repräsentiert wird, eine Äquivalenzklasse, die durch eine Menge mit *zwei* Elementen repräsentiert wird, so erhält man eine Äquivalenzklasse, die durch eine Menge mit *einem* Element repräsentiert wird.

15 Die natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen

15.1 Peano-Axiome [214]

Eine Menge $\mathbb{N}$ zusammen mit einer Nachfolger-Funktion ν (gelesen: „nü“) heißt Menge der natürlichen Zahlen genau dann, wenn gilt:

(Peano 1) $0 \in \mathbb{N}$ (Die Null ist eine natürliche Zahl.)

(Peano 2) Für alle n ∈ $\mathbb{N}$ gilt: $\nu(n) \neq 0$ (Die Null ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.)

(Peano 3) Für alle m, n ∈ $\mathbb{N}$ gilt: $m \neq n \Rightarrow \nu(m) \neq \nu(n)$ (Verschiedene Zahlen haben verschiedenen Nachfolger.)

(Peano 4) $$\left[H(0) \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [H(n) \Rightarrow H(n+1)\,] \right] \Rightarrow \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} H(n)$$ (Induktionsaxiom)

(Wenn eine Aussage H für *n=0 gilt* und für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass, *wenn* die Aussage H *für n gilt*, sie auch *für n+1 gilt*, dann gilt die Aussage H auch *für alle* natürlichen Zahlen n.)

15.1.1 Definition der Ziffern

(Eins) $1 := \nu(0)$ (Die Eins ist der Nachfolger der Null.)
(Zwei) $2 := \nu(1)$ (Die Zwei ist der Nachfolger der Eins.)
(Drei) $3 := \nu(2)$ (Die Drei ist der Nachfolger der Zwei.)
…

[214] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 2.2 Zahlaspekte, 2018, S. 5ff

15.1.2 Beispielhafte Definition einer Operation: Addition *)

Die Definition der Addition erfolgt mithilfe der Nachfolger-Funktion ν:

Für beliebige $x, y \in \mathbb{N}$ gilt:

(Add1)	$x + 1 := \nu(x)$	(Der Ausdruck „$x + \nu(y)$“ lässt sich durch (Add2) schrittweise in einen Ausdruck umformen, der „$x + 1$“ enthält (Add1).)
(Add2)	$x + \nu(y) := \nu(x + y)$	

Setzt man (Add1) in (Add2) ein, erhält man alternativ:

(Add2)‘	$x + (y + 1) \coloneqq (x + y) + 1$	(Grundlage für das Assoziativgesetz)

15.1.3 Rechenbeispiel $\mathbf{5} + \mathbf{3}$ *)

Aufgrund der rekursiven Definition der Addition lässt sich der Term $5 + 3$ wie folgt umformen:

$$5 + 3 \overset{Drei}{\widehat{=}} 5 + \nu(2) \overset{Add2}{\widehat{=}} \nu(5 + 2) \overset{Zwei}{\widehat{=}} \nu\big(5 + \nu(1)\big)$$

$$\overset{Add2}{\widehat{=}} \nu\big(\nu(5 + 1)\big) \overset{Add1}{\widehat{=}} \nu\Big(\nu\big(\nu(5)\big)\Big)$$

Aufgrund der Definition der Ziffern ergibt sich:

$$\nu\Big(\nu\big(\nu(5)\big)\Big) = \nu\big(\nu(6)\big) = \nu(7) = 8$$

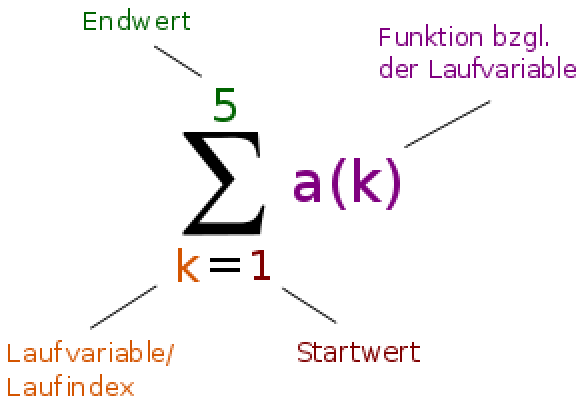
Hieraus ergibt sich:

$$\overbrace{\underbrace{5}_{\text{„1. Summand“}} + \underbrace{3}_{\text{„2. Summand“}}}^{\text{„Summe“}} = \underbrace{8}_{\text{„Wert der Summe“}}$$

15.2 Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Mithilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion lassen sich Aussagen über natürliche Zahlen beweisen. Diese können sich z.B. auf Summenformeln oder Teilbarkeitsaussagen beziehen.

15.2.1 Notation mit dem Summenzeichen[215]



Beispiele:

Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 15 mit Additionszeichen:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=120$$

oder kürzer geschrieben mit Additionszeichen:

$$1+2+3+\ \dots\ +13+14+15=120$$

oder mit Summenzeichen:

$$\sum_{k=1}^{15} k = 120$$

Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n:

$$1+2+3+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n$$

oder mit Summenzeichen:

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

[215] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Summe#Notation_mit_dem_Summenzeichen

Übung:

Schreiben Sie die Summe der geraden Zahlen von 2 bis 16 auf:

mit Additionszeichen:

mit Summenzeichen:

Schreiben Sie die Summe der geraden Zahlen von 2 bis 2n auf:

mit Additionszeichen:

mit Summenzeichen:

Schreiben Sie die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 15 auf:

mit Additionszeichen:

mit Summenzeichen:

Schreiben Sie die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 2n+1 auf:

mit Additionszeichen:

mit Summenzeichen:

Übung:

Schreiben Sie die Summe der geraden Zahlen von 2 bis 16 auf:

mit Additionszeichen:

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72$

mit Summenzeichen:

$$\sum_{k=1}^{8} 2k = 72$$

Schreiben Sie die Summe der geraden Zahlen von 2 bis 2n auf:

mit Additionszeichen:

$2 + 4 + 6 + \ \dots\ + 2(n-2) + 2(n-1) + 2n$

mit Summenzeichen:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k$$

Schreiben Sie die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 15 auf:

mit Additionszeichen:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$

mit Summenzeichen:

$$\sum_{k=0}^{7} (2k+1) = 64$$

Schreiben Sie die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 2n+1 auf:

mit Additionszeichen:

$1 + 3 + 5 + \ \dots\ + (2(n-2)+1) + (2(n-1)+1) + (2n+1)$

mit Summenzeichen:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$$

15.2.2 Logische Struktur des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion[216]

Sei $H(n)$ eine Aussage(form) für *eine* natürliche Zahl n. Diese Aussage lässt sich für eine spezielle Zahl, z.B. $n = 0$ leicht überprüfen. Gilt die Aussage jedoch *für alle* natürlichen Zahlen, spricht man von einer *All*aussage und schreibt: $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} H(n)$

Eine solche Allaussage beweist man durch das

$$\overbrace{\left[\underbrace{H(0)}_{\substack{\text{1. Schritt:}\\ \text{„Induktionsanfang“}\\ \text{(Der \textit{erste} Dominostein fällt.)}}} \wedge \underbrace{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\Big[\underbrace{H(n)}_{\substack{\text{„Induktionsvoraussetzung“}\\ \text{(oder „Induktionsannahme“)}}} \Rightarrow \underbrace{H(n+1)}_{\text{„Induktionsbehauptung“}}\Big]}_{\substack{\text{2. Schritt:}\\ \text{„Induktionsschritt“ (oder „Induktionsschluss“ oder „Schluss von \textit{n} auf \textit{n+1}“)}\\ \text{(\textit{Wenn} ein Dominostein fällt, \textit{dann} stößt er auch den nachfolgenden Stein um.)}}}\right] \Rightarrow \underbrace{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} H(n)}_{\substack{\text{Allaussage}\\ \text{(\textit{Alle} Steine fallen um.)}}}}^{\text{Beweisverfahren der vollständigen Induktion}}$$

In Worten: Wenn eine Aussage H für $n = 0$ *gilt* und für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass, *wenn* die Aussage H *für* n *gilt*, sie auch *für* $n + 1$ *gilt*, dann gilt die Aussage H auch *für alle* natürlichen Zahlen n.

Gilt eine Aussage H *erst* für alle natürlichen Zahlen, *die größer oder gleich* einer natürlichen Zahl n_0 (z.B. $n_0 = 1$) sind, beweist man sie wie folgt:

$$\left[\ H(n_0)\ \wedge\ \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \left[\ (\ n \geq n_0\ \wedge\ H(n)\ ) \Rightarrow H(n+1)\right]\ \right]\ \Rightarrow\ \bigwedge_{n\in\mathbb{N}}[\ n \geq n_0\ \Rightarrow\ H(n)\ ]$$

---

[216] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 2.3 Beweistechniken für die natürlichen Zahlen, 2018, S. 1ff

15.2.3 Beweis durch vollständige Induktion (Gaußsche Summenformel)

Sei $H(n)$: Die Summe der natürlichen Zahlen von 0 bis n ist gleich $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

Veranschaulichung:

Wähle $n = 4$:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\frac{4 \cdot (4+1)}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Wähle $n = 10$:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\frac{10 \cdot (10+1)}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

Da obige Aussage(form) für $n = 4$ und $n = 10$ wahr ist, wird vermutet, dass sie *für alle* n wahr sein könnte. Hierfür gibt es verschiedene gleichbedeutende Schreibweisen:

(Schreibweise mit Additionszeichen:)

Für alle natürlichen Zahlen *n* gilt: $0 + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

(Schreibweise mit Allquantor und Additionszeichen:)

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left(0 + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)$$

(Schreibweise mit Summenzeichen:)

Für alle natürlichen Zahlen *n* gilt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

(Schreibweise mit Allquantor und Additionszeichen:)

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)$$

a) Schreibweise mit Additionszeichen

Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $$0+1+2+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Beweis durch vollständige Induktion

1. Induktionsanfang:

   Wähle $n=0$:

   $$0=\frac{0\cdot(0+1)}{2}\Leftrightarrow 0=\frac{0}{2}$$

2. Induktionsschritt (Schluss von n auf $n+1$):
   Für alle n ist zu zeigen: Wenn $H(n)$ gilt, dann gilt auch $H(n+1)$.

   Induktionsvoraussetzung $H(n)$:

   $$0+1+2+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

   Induktionsbehauptung $H(n+1)$:

   $$0+1+2+\ \dots\ +((n+1)-2)+((n+1)-1)+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$$

   $$=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}=\frac{n^2+n\cdot 2+1\cdot n+1\cdot 2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

   Beweis (Ausgangspunkt ist linke Seite der Induktionsbehauptung):

   $$0+1+2+\ \dots\ +((n+1)-2)+((n+1)-1)+(n+1)$$

   $$=\underbrace{0+1+2+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n}+(n+1)$$

   $$\overset{I.V.}{=}\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)$$

   $$=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+\frac{2\cdot(n+1)}{2}$$

   $$=\frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

Wenn die Induktionsvoraussetzung gilt, ist somit die Induktionsbehauptung bewiesen. Aus dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt folgt die Gültigkeit der zu beweisenden Allaussage.

b) Schreibweise mit Summenzeichen

Zu zeigen ist:

Für alle natürlichen Zahlen *n* gilt: $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

<u>Beweis durch vollständige Induktion</u>

1. Induktionsanfang:

   Wähle $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{0}{2}$$

2. Induktionsschritt (Schluss von n auf $n+1$):
   Für alle n ist zu zeigen: Wenn $H(n)$ gilt, dann gilt auch $H(n+1)$.

   Induktionsvoraussetzung $H(n)$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

   Induktionsbehauptung $H(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

   Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1)$$

$$\overset{I.V.}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (n+1)}{2}$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

Wenn die Induktionsvoraussetzung gilt, ist somit die Induktionsbehauptung bewiesen. Aus dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt folgt die Gültigkeit der zu beweisenden Allaussage.

15.2.4 Beweis durch vollständige Induktion (Beispiel 2)

Sei H(n): Die Zahl 9 ist Teiler der Differenz zwischen den Zahlen 10^n und 1.

In Symbolschreibweise ergibt dies für H(n): $9 \mid (10^n - 1)$

Diese Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen, also schreibt man:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [9 \mid (10^n - 1)]$$

Beweis durch vollständige Induktion

1. Induktionsanfang:

   Wähle n=0. Dann ergibt sich für H(0):

$$[9 \mid (10^0 - 1)] \Leftrightarrow [9 \mid (1 - 1)] \Leftrightarrow [9 \mid 0]$$

   9 | 0 ist eine wahre Aussage. Somit ist H(0) wahr.

2. Induktionsschritt (Schluss von n auf $n+1$):
   Für alle n ist zu zeigen: Wenn $H(n)$ gilt, dann gilt auch $H(n+1)$.

   Induktionsvoraussetzung $H(n)$:

$$9 \mid (10^n - 1)$$

   Induktionsbehauptung $H(n+1)$:

$$9 \mid (10^{n+1} - 1)$$

   Beweis des Induktionsschritts:
   Man kann nun die Induktionsbehauptung H(n+1) nachweisen, indem man die Induktionsvoraussetzung H(n) geschickt anwendet.

   Hierzu betrachte man folgende Umwandlung:

$$\underbrace{10^{n+1} - 1}_{***} = 10 \cdot 10^n - 1 = (1+9) \cdot 10^n - 1 = 10^n + 9 \cdot 10^n - 1 = \underbrace{9 \cdot 10^n}_{*} + \underbrace{10^n - 1}_{**}$$

   Der Term $10^n - 1$ (siehe **) ist nach Induktionsvoraussetzung durch 9 teilbar.
   Der Term $9 \cdot 10^n$ (siehe *) ist offensichtlich auch durch 9 teilbar. Somit ist auch die Summe der beiden, also der Term $10^{n+1} - 1$ (siehe ***) durch 9 teilbar[217] und die Induktionsbehauptung wäre gezeigt.

   Nach dem Induktionsanfang ist nun auch der Induktionsschritt vollzogen und es wurde somit bewiesen, dass gilt:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [9 \mid (10^n - 1)]$$

[217] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 2.7 Teilbarkeit / Summen- und Produktregel, 2018, S. 2

15.2.5 Beweis durch vollständige Induktion (Beispiel 3)

Für alle natürlichen Zahlen *n* gilt: $5 \mid (6^n + 4)$

(Beachten Sie, dass die Null zu den natürlichen Zahlen gehört.)

Beweis durch vollständige Induktion

1. Induktionsanfang:

   Wähle *n* = 0:

   $5 \mid (6^0 + 4) \Leftrightarrow 5 \mid 5$
   $5 \mid 5$ ist wahr, da ein $x (= 1)$ existiert, so dass gilt: $5 \cdot x = 5$.

2. Induktionsschritt (Schluss von n auf $n + 1$):
   Für alle n ist zu zeigen: Wenn $H(n)$ gilt, dann gilt auch $H(n + 1)$.

   Induktionsvoraussetzung $H(n)$:
   $5 \mid (6^n + 4)$

   Induktionsbehauptung $H(n + 1)$:
   $5 \mid (6^{n+1} + 4)$

   Beweis:
   $5 \mid (6^{n+1} + 4)$
   $\Leftrightarrow 5 \mid (6 \cdot 6^n + 4)$
   $\Leftrightarrow 5 \mid ((5 + 1) \cdot 6^n + 4)$
   $\Leftrightarrow 5 \mid (\underbrace{5 \cdot 6^n}_{\text{durch 5 teilbar}} + \underbrace{6^n + 4}_{\text{I.V.}})$

(Nach Anwendung von Produkt- und Summenregel gilt:)

Wenn die Induktionsvoraussetzung gilt, ist somit die Induktionsbehauptung bewiesen. Aus dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt folgt die Gültigkeit der zu beweisenden Allaussage.

15.2.6 Beweis durch vollständige Induktion (Beispiel 4)

Man betrachte folgende Aussage H(n):

„Die Summe der ersten n geraden Zahlen ist gleich dem Produkt aus n und n+1."

In Symbolschreibweise ergibt dies für H(n):

$$\sum_{i=0}^{n} 2i = n \cdot (n+1)$$

Diese Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen, also schreibt man:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n} 2i = n \cdot (n+1) \right)$$

Beweis durch vollständige Induktion

1. Induktionsanfang:

   Wähle n=0. Dann ergibt sich für H(0):

   $$\sum_{i=0}^{0} 2i = 2 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot (0+1)$$

   Dies ist eine wahre Aussage. Somit ist H(0) wahr.

2. Induktionsschritt (Schluss von n auf $n+1$):
   Für alle n ist zu zeigen: Wenn $H(n)$ gilt, dann gilt auch $H(n+1)$.

   Induktionsvoraussetzung $H(n)$:

   $$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2i}_{\text{linke Seite der Ind.vor.}} = \underbrace{n \cdot (n+1)}_{\text{rechte Seite der Ind.vor.}}$$

   Induktionsbehauptung $H(n+1)$:

   $$\underbrace{\sum_{i=0}^{n+1} 2i}_{\text{linke Seite der Ind.beh.}} = \underbrace{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}_{\text{rechte Seite der Ind.beh.}}$$

   Beweis des Induktionsschritts:
   Man kann nun die Induktionsbehauptung H(n+1) nachweisen, indem man die Induktionsvoraussetzung H(n) geschickt anwendet.

   Vorgehensweise: Man wandelt die linke Seite der Induktionsbehauptung schrittweise in die rechte Seite der Induktionsbehauptung um. Hierbei ist die Induktionsvoraussetzung anzuwenden.

Trick:
Man versucht, die *linke Seite der Induktionsbehauptung* in einen Ausdruck umzuwandeln, der die *linke Seite der Induktionsvoraussetzung* enthält:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n+1} 2i}_{\substack{\text{linke Seite} \\ \text{der Ind.beh.}}} = \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2i}_{\substack{\text{linke Seite} \\ \text{der Ind.vor.}}}\right) + 2 \cdot (n+1)$$

Nun kann man die linke Seite der Induktionsvoraussetzung gegen die rechte Seite der Induktionsvoraussetzung austauschen und zusammenfassen:

$$\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2i}_{\substack{\text{linke Seite} \\ \text{der Ind.vor.}}}\right) + 2 \cdot (n+1) \overset{Ind.vor.}{\triangleq} \underbrace{n \cdot (n+1)}_{\substack{\text{rechte Seite} \\ \text{der Ind.vor.}}} + 2 \cdot (n+1) = \underbrace{n^2 + n + 2n + 2}_{\substack{\text{zusammengefasster} \\ \text{Ausdruck}}}$$

Dieser zusammengefasste Ausdruck ist gleich der rechten Seite der Induktionsbehauptung:

$$\underbrace{(n+1) \cdot \big((n+1)+1\big)}_{\substack{\text{rechte Seite} \\ \text{der Ind.beh.}}} = (n+1) \cdot (n+2) = n^2 + 2n + n + 2 = \underbrace{n^2 + n + 2n + 2}_{\substack{\text{zusammengefasster} \\ \text{Ausdruck}}}$$

Somit wäre die Induktionsbehauptung gezeigt. Hier die vollständige Gleichung:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n+1} 2i}_{\substack{\text{linke Seite} \\ \text{der Ind.beh.}}} = \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2i}_{\substack{\text{linke Seite} \\ \text{der Ind.vor.}}}\right) + 2 \cdot (n+1) \overset{Ind.vor.}{\triangleq} \underbrace{n \cdot (n+1)}_{\substack{\text{rechte Seite} \\ \text{der Ind.vor.}}} + 2 \cdot (n+1) = n^2 + n + 2n + 2$$

$$= n^2 + 2n + n + 2 = (n+1) \cdot (n+2) = \underbrace{(n+1) \cdot \big((n+1)+1\big)}_{\substack{\text{rechte Seite} \\ \text{der Ind.beh.}}}$$

Aus dieser Gleichung ist für alle n∈ℕ abzulesen: Wenn die Induktionsvoraussetzung gilt, dann gilt auch die Induktionsbehauptung: $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}[H(n) \Rightarrow H(n+1)]$

Nach dem Induktionsanfang ist nun auch der Induktionsschritt vollzogen und es wurde somit bewiesen, dass gilt: $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{i=0}^{n} 2i = n \cdot (n+1))$

15.2.7 Beweis durch vollständige Induktion (Beispiel 5) *)

Sei H(n): „Die Menge $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ hat genau 2^n Teilmengen.“

Beispiel zur Konkretisierung:

Sei $n = 4$. Dann ist $M = \{1, 2, 3, 4\}$

Es gibt folgende $2^4 = 16$ Teilmengen von M:
{ },
{1}, {2} ,{3}, {4},
{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4},
{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4},
{1, 2, 3, 4}

Die Aussage H(n) gilt für alle natürlichen Zahlen, also schreibt man:

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} H(n)$$

Beweis durch vollständige Induktion

1. Induktionsanfang:

Wähle n=0. Dann ergibt sich für $H(0)$:

Die Menge $M = \{\,\}$ besitzt $2^0 = 1$ Teilmengen. Dies ist eine wahre Aussage, da die leere Menge nur sich selbst als Teilmenge besitzt.

(Zusatzbeispiel: Wähle n=1. Dann ergibt sich für H(1):

Die Menge $M = \{1\}$ besitzt $2^1 = 2$ Teilmengen. Dies ist eine wahre Aussage, da die Menge $M = \{1\}$ nur die leere Menge und {1} als Teilmengen besitzt.)

2. Induktionsschritt (Schluss von n auf $n + 1$):
Für alle n ist zu zeigen: Wenn $H(n)$ gilt, dann gilt auch $H(n + 1)$.

Induktionsvoraussetzung $H(n)$:

„Die Menge $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ hat genau 2^n Teilmengen.“

Induktionsbehauptung $H(n + 1)$:

„Die Menge $M = \{1, 2, 3, \dots, n, n + 1\}$ hat genau 2^{n+1} Teilmengen.“

Beweis des Induktionsschritts:
Man kann nun die Induktionsbehauptung H(n+1) nachweisen, indem man die Induktionsvoraussetzung H(n) geschickt anwendet.

Man betrachte Die Menge mit n+1 Elementen: $M = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$

Die Potenzmenge von M, also die Menge aller Teilmengen von M, bezeichnet man mit $\wp$(M).
$\wp$(M) unterteilt man nun in zwei disjunkte Teilmengen M_1 und M_2:

M_1 = {alle Teilmengen von M, die n+1 *nicht* enthalten}
M_2 = {alle Teilmengen von M, die n+1 *enthalten*}

Die Menge M_1 hat nach Induktionsvoraussetzung genau 2^n Teilmengen.

Die Menge M_2 hat nach *jedoch ebenfalls* genau 2^n Teilmengen, da jede dieser Teilmengen dadurch entsteht, dass man {n+1} mit genau einer Teilmenge aus M_1 vereinigt:

Veranschaulichung der Mengenbildung am Beispiel für $n = 3$ und $n + 1 = 4$:

$$M_1 = \underbrace{\{ \{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}}_{2^3 = 8 \text{ Teilmengen}}$$

$$M_2 = \underbrace{\{ \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} \}}_{2^3 = 8 \text{ Teilmengen}}$$

M_1 hat 2^n Teilmengen und M_2 hat 2^n Teilmengen. Da M_1 und M_2 disjunkt sind, hat die Vereinigungsmenge $\wp$(M) dann $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Elemente.

Wenn die Potenzmenge $\wp$(M) genau 2^{n+1} Elemente enthält, bedeutet dies, dass die Menge M genau 2^{n+1} Teilmengen hat.

Man hat also gezeigt:

Wenn die Induktionsvoraussetzung gilt, dann gilt auch die Induktionsbehauptung:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [H(n) \Rightarrow H(n+1)]$$

Nach dem Induktionsanfang ist nun auch der Induktionsschritt vollzogen und es wurde somit bewiesen:

Für alle natürlichen Zahlen gilt: „Die Menge $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ hat genau 2^n Teilmengen.“

15.2.8 Vorübungen zum Beispiel 6

a) Potenzgesetze (1)

Es gelten die Potenzgesetze[218], z.B. gilt für beliebige reelle Zahlen r und s (mit a > 0):

$$a^{r \cdot s} = (a^r)^{\,s}$$

Beispiel: Überprüfen Sie obiges Potenzgesetz mit $a = 4, r = 3$ und $s = 2$.

Lösung:

$$a^{r \cdot s} = (a^r)^{\,s}$$

$$4^{3 \cdot 2} = (4^3)^{\,2}$$

$$4^6 = (64)^2$$

$$4096 = 4096$$

b) Potenzgesetze (2)

Es gilt für beliebige reelle Zahlen r und s (mit a > 0):

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s$$

Spezialfall: $s = 1$

$$a^{r+1} = a^r \cdot a$$

Überprüfen Sie obigen Spezialfall mit $a = 4$ und $r = 3$.

Lösung:

$$a^{r+1} = a^r \cdot a$$

$$4^{3+1} = 4^3 \cdot 4$$

$$4^4 = 4^3 \cdot 4$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$256 = 256$$

[218] Siehe Potenzgesetze: https://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_(Mathematik)#Potenzgesetze

c) Ausklammern

Distributivgesetz: Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Mit anderen Worten:

Aus der Summe $a \cdot b + a \cdot c$ kann a ausgeklammert werden:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Beispiel 1: Aus der Summe $47 \cdot 2 + 47 \cdot 3$ kann die 47 ausgeklammert werden:

$$47 \cdot 2 + 47 \cdot 3 = 47 \cdot (2 + 3)$$

Beispiel 2: Aus der Summe $94 + 141$ kann die 47 ausgeklammert werden:

$$94 + 141 = 47 \cdot 2 + 47 \cdot 3 = 47 \cdot (2 + 3)$$

d) Null addieren, Summanden vertauschen und gemeinsame Faktoren ausklammern

Zu jeder Summe lässt sich eine Null addieren, ohne dass sich der Wert der Summe verändert:

$$a + b = a + b + 0$$

Diese Null lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$0 = x - x$$

Folgende Darstellung ergibt sich:

$$a + b = a + b + 0 = a + b + x - x$$

Weiterhin seien:

$$a = q \cdot r$$
$$b = b$$
$$x = r \cdot t$$

Dann lässt sich die Summe $a + b$ folgendermaßen darstellen:

$$a + b = q \cdot r + b + r \cdot t - r \cdot t$$

Anwendung des Kommutativgesetzes der Addition:

$$a + b = q \cdot r - r \cdot t + r \cdot t + b$$

Ausklammern gemeinsamer Faktoren:

$$a + b = r \cdot (q - t) + r \cdot t + b$$

Beispiel 1:

Seien $a = 7^n \cdot 7$
$b = 5$
$x = 7^n \cdot 6$

Dann lässt sich die Summe $a + b$ folgendermaßen darstellen:

$$a + b = 7^n \cdot 7 + 5 + 7^n \cdot 6 - 7^n \cdot 6$$

Anwendung des Kommutativgesetzes der Addition:

$$a + b = 7^n \cdot 7 - 7^n \cdot 6 + 5 + 7^n \cdot 6$$

Ausklammern gemeinsamer Faktoren:

$$a + b = 7^n \cdot (7 - 6) + 5 + 7^n \cdot 6$$

Zusammenfassen:

$$a + b = 7^n + 5 + 7^n \cdot 6$$

Übung 1:

Seien $a = 9^n \cdot 9$
$b = -1$
$x = 9^n \cdot 8$

Dann lässt sich die Summe $a + b$ folgendermaßen darstellen:

$$a + b =$$

Anwendung des Kommutativgesetzes der Addition:

$$a + b =$$

Ausklammern gemeinsamer Faktoren:

$$a + b =$$

Zusammenfassen:

$$a + b =$$

Lösung 1:

Seien

$$a = 9^n \cdot 9$$
$$b = -1$$
$$x = 9^n \cdot 8$$

Dann lässt sich die Summe $a + b$ folgendermaßen darstellen:

$$a + b = 9^n \cdot 9 - 1 + 9^n \cdot 8 - 9^n \cdot 8$$

Anwendung des Kommutativgesetzes der Addition:

$$a + b = 9^n \cdot 9 - 9^n \cdot 8 - 1 + 9^n \cdot 8$$

Ausklammern gemeinsamer Faktoren:

$$a + b = 9^n \cdot (9 - 8) - 1 + 9^n \cdot 8$$

Zusammenfassen:

$$a + b = 9^n - 1 + 9^n \cdot 8$$

Beispiel 2:

Seien

$$a = (7^2)^n \cdot 7^2$$
$$b = -2^n \cdot 2$$
$$x = (7^2)^n \cdot 2$$

Dann lässt sich die Summe $a + b$ folgendermaßen darstellen:

$$a + b = (7^2)^n \cdot 7^2 - 2^n \cdot 2 + (7^2)^n \cdot 2 - (7^2)^n \cdot 2$$

Anwendung des Kommutativgesetzes der Addition:

$$a + b = (7^2)^n \cdot 7^2 - (7^2)^n \cdot 2 + (7^2)^n \cdot 2 - 2^n \cdot 2$$

Ausklammern gemeinsamer Faktoren:

$$a + b = (7^2)^n \cdot 7^2 - (7^2)^n \cdot 2 + (7^2)^n \cdot 2 - 2^n \cdot 2$$

$$a + b = (7^2)^n \cdot (7^2 - 2) + ((7^2)^n - 2^n) \cdot 2$$

15.2.9 Beweis durch vollständige Induktion (Beispiel 6)

Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $47 \mid \left(7^{(2\cdot n)} - 2^n\right)$

Beweis durch vollständige Induktion

1. Induktionsanfang:

   Wähle $n = 0$: $47 \mid \left(7^{(2\cdot 0)} - 2^0\right) \Leftrightarrow 47 \mid (1-1) \Leftrightarrow 47 \mid 0$
   $47 \mid 0$ ist wahr, da ein $x(=0)$ existiert, so dass gilt: $47 \cdot x = 0$.

2. Induktionsschritt (Schluss von n auf $n+1$):
   Für alle n ist zu zeigen: Wenn $H(n)$ gilt, dann gilt auch $H(n+1)$.

   Induktionsvoraussetzung $H(n)$: $47 \mid \left(7^{(2\cdot n)} - 2^n\right)$

   Induktionsbehauptung $H(n+1)$: $47 \mid \left(7^{(2\cdot(n+1))} - 2^{(n+1)}\right)$

   Beweis:

$$
\begin{array}{lll}
 & 47 \mid \left(7^{(2\cdot(n+1))} - 2^{(n+1)}\right) & \mid \text{ Potenzgesetz: } a^{r\cdot s} = (a^r)^s \\
\Leftrightarrow & 47 \mid \left((7^2)^{(n+1)} - 2^{(n+1)}\right) & \mid \text{ andere farbliche Hervorhebung} \\
\Leftrightarrow & 47 \mid \left((7^2)^{(n+1)} - 2^{(n+1)}\right) & \mid\ a^{n+1} = a^n \cdot a \\
\Leftrightarrow & 47 \mid ((7^2)^n \cdot 7^2 - 2^n \cdot 2) & \mid \text{ Trick: } +0 \\
\Leftrightarrow & 47 \mid ((7^2)^n \cdot 7^2 + 0 - 2^n \cdot 2) & \mid \text{ Trick[219]: } 0 = (7^2)^n \cdot 2 - (7^2)^n \cdot 2 \\
\Leftrightarrow & 47 \mid ((7^2)^n \cdot 7^2 + (7^2)^n \cdot 2 - (7^2)^n \cdot 2 - 2^n \cdot 2) & \mid \text{ Summanden vertauschen} \\
\Leftrightarrow & 47 \mid ((7^2)^n \cdot 7^2 - (7^2)^n \cdot 2 + (7^2)^n \cdot 2 - 2^n \cdot 2) & \mid \text{ andere farbliche Hervorhebung} \\
\Leftrightarrow & 47 \mid ((7^2)^n \cdot 7^2 - (7^2)^n \cdot 2 + (7^2)^n \cdot 2 - 2^n \cdot 2) & \mid\ (7^2)^n \text{ bzw. } 2 \text{ ausklammern} \\
\Leftrightarrow & 47 \mid \left((7^2)^n \cdot (7^2 - 2) + 2 \cdot ((7^2)^n - 2^n)\right) & \mid \text{ zusammenfassen} \\
\Leftrightarrow & 47 \mid \left((7^2)^n \cdot (47) + 2 \cdot ((7^2)^n - 2^n)\right) & \mid \text{ Potenzgesetz: } a^{r\cdot s} = (a^r)^s \\
\Leftrightarrow & 47 \mid \left(\underbrace{7^{(2\cdot n)} \cdot (47)}_{\text{durch 47 teilbar}} + 2 \cdot \underbrace{\left(7^{(2\cdot n)} - 2^n\right)}_{\text{I.V.}}\right) &
\end{array}
$$

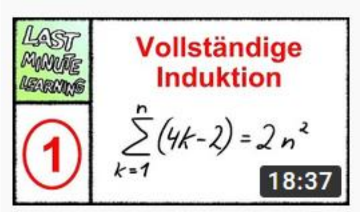
(Nach Anwendung von Produkt- und Summenregel gilt:)
Wenn die Induktionsvoraussetzung gilt, ist somit die Induktionsbehauptung bewiesen. Aus dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt folgt die Gültigkeit der zu beweisenden Allaussage.

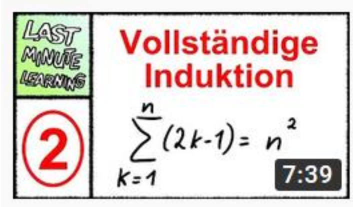
---

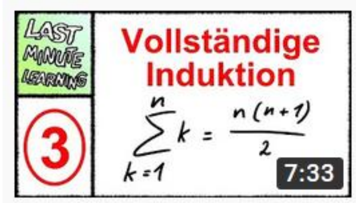
[219] Die Null ist hierbei so zu wählen, dass sie dabei hilft, durch geschickte Umformungen eine Summe zu erhalten, deren einer Summand den Faktor 47 enthält und deren anderer Summand nach I.V. durch 47 teilbar ist.

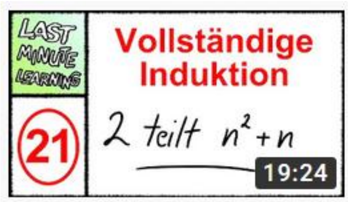
15.2.10 Beweis durch vollständige Induktion (weitere Beispiele)

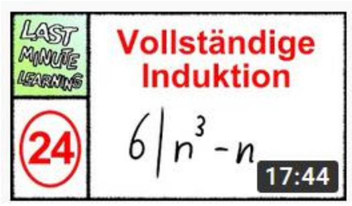
Bitte auf die Bilder klicken:











16 Zahlenbereichserweiterungen ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_+$(=$\mathbb{B}$), $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)

16.1 Einführung der ganzen Zahlen über Äquivalenzklassen *)

Erinnerung:

Def.: Eine natürliche Zahl ist eine Äquivalenzklasse gleichmächtiger endlicher Mengen.[220]

Einführung der *ganzen Zahlen* über Äquivalenzklassen:

> Def.: Eine *ganze Zahl* ist eine Äquivalenzklasse *differenzengleicher* Paare aus der Produktmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bezüglich der Relation $\sim$, wobei gilt:
>
> $$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \;:\Leftrightarrow\; x_1 + y_2 = x_2 + y_1$$

Hinweis:

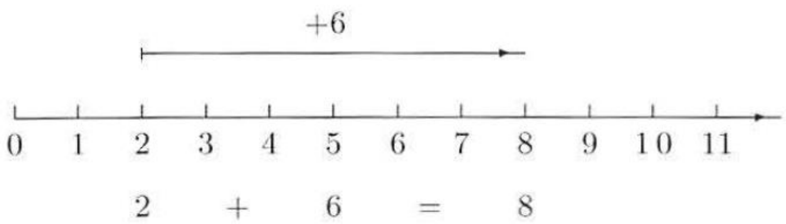
$x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ ist gleichbedeutend mit der Differenzengleichheit $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

(Diese wird jedoch in der Definition nicht verwendet, da hierbei negative Zahlen entstehen könnten, die bisher aber noch nicht bekannt sind.)

Beispiele:

	Begründung durch Definition	Begründung durch Differenzengleichheit
$(0,6) \sim (1,7)$	$0 + 7 = 6 + 1$	$0 - 6 = 1 - 7$
$(6,0) \sim (7,1)$	$6 + 1 = 0 + 7$	$6 - 0 = 7 - 1$

Unerwähnt ist bisher, *welche* ganze Zahl z.B. durch die Zahlenpaare (0, 6), (1, 7) oder (2, 8) oder (3, 9) usw. repräsentiert wird - Es ist die Zahl 6, die für die *Verschiebung auf dem Zahlenstrahl* steht[221]:



Die Zahlenpaare (6, 0) oder (7, 1) oder (8, 2) stehen demnach für eine Verschiebung um -6.

[220] Siehe auch: Raudies, M.: Grundlegende Begriffe der Mathematik, Potsdam 2017, S. 62
[221] Aus: Scheid, H. /Schwarz, W.: Elemente der Arithmetik und Algebra, Springer Spektrum, S. 276

Will man umgekehrt die Zahlenpaare zur ganzen Zahl 6 ermitteln, kann dies über Ermittlung der Lösungspaare folgender Gleichung erfolgen:

$$x_1 + 6 = x_2$$

Lösungen z.B. :
$$0 + 6 = 6$$
$$1 + 6 = 7$$
$$2 + 6 = 8$$
$$\ldots$$

Die Zahlenpaare zur ganzen Zahl -6 ermitteln, ermittelt man demzufolge über diese Gleichung:

$$x_1 + (-6) = x_2$$

Lösungen z.B. :
$$6 + (-6) = 0$$
$$7 + (-6) = 1$$
$$8 + (-6) = 2$$
$$\ldots$$

Zusammenfassung:

ganze Zahl	Äquivalenzklasse	Repräsentant	weitere Repräsentanten
+6	[(0, 6)]	(0, 6)	(1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 10), (5, 11), …
-6	[(6, 0)]	(6, 0)	(7, 1), (8, 2), (9, 3), (10, 4), (11, 5), …

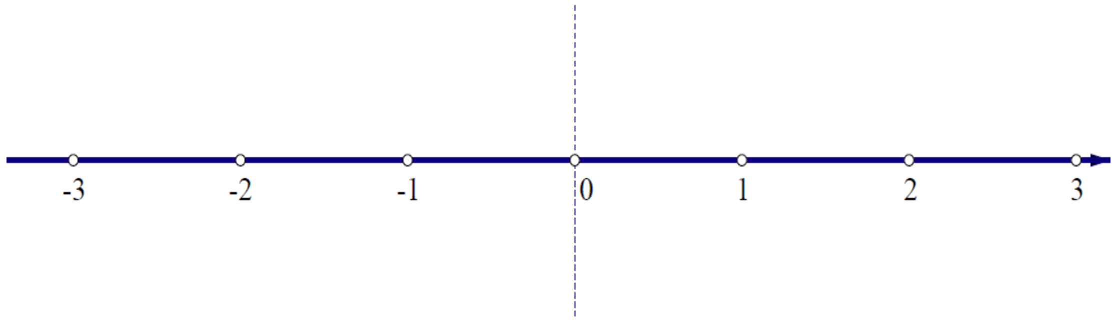
16.2 Einführung der ganzen Zahlen über die Erweiterung des Zahlenstrahls

Im Mathematikunterricht in der Schule werden die ganzen Zahlen durch einen Anbau an die natürlichen Zahlen durchgeführt: Jedes Element von $\mathbb{N}$ erhält ein entsprechendes negatives Element:

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$	
Element in $\mathbb{N}$	zugehöriges negatives Element
…	…
5	-5
…	…
101	-101
…	…
5312	-5312
…	…

Geometrisch bedeutet dies eine Spiegelung des Zahlenstrahls am Nullpunkt[222]:

[222] Aus: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 3. Arithmetik/ Ganze Zahlen, 2018, S. 1



Der Zahlen*strahl*, welcher die *natürlichen* Zahlen repräsentiert, wird bei den *ganzen* Zahlen zur Zahlen*geraden*.

16.3 Einführung der rationalen Zahlen über Äquivalenzklassen *)

Def.: Eine *rationale Zahl* ist eine Äquivalenzklasse q*uotientengleicher* Paare aus der Produktmenge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bezüglich der Relation $\sim$, wobei gilt:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \; :\Leftrightarrow \; x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$$

Hinweis:

$x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$ ist gleichbedeutend mit der Quotientengleichheit $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

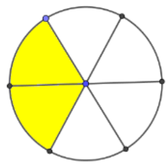
(Dies wird jedoch in der Definition nicht verwendet, da hierbei rationale Zahlen verwendet werden könnten, die durch die Definition aber erst eingeführt werden.)

Beispiele:

	Begründung durch Definition	Begründung durch Quotientengleichheit
$(3, 2) \sim (6, 4)$	$3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$	$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$
$(2, 3) \sim (4, 6)$	$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$
$(3, 2) \nsim (4, 6)$	$3 \cdot 6 \neq 2 \cdot 4$	$\frac{3}{2} \neq \frac{4}{6}$

16.4 Einführung der gebrochenen und rationalen Zahlen in der Schule

Im Mathematikunterricht in der Schule werden die (nichtnegativen) Brüche z.B. über Anteile an einer Pizza eingeführt, welche in 6 Teile zerschnitten wird und auf 3 Kinder aufgeteilt werden soll. Wieviel Stücke bzw. welchen Anteil an der Pizza erhält jedes Kind?



Die *rationalen* Zahlen werden dadurch eingeführt, dass zu jeder Bruchzahl die *Gegenzahl* hinzugefügt wird, also die Zahl, die auf der Zahlengeraden die vom Betrag her gleiche Entfernung zur 0 besitzt.

Menge aller *gebrochenen* Zahlen (oder Bruchzahlen)[223]	$\mathbb{Q}_+ = \mathbb{B} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad \mathrm{n} \neq 0 \right\}$
Menge der *rationalen* Zahlen	$\mathbb{Q} \quad = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad \mathrm{n} \neq 0 \right\}$

16.5 Einführung der reellen Zahlen über Äquivalenzklassen *)

Auf diese Art der Einführung soll an dieser Stelle verzichtet werden (Es handelt sich um Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen).

16.6 Einführung der reellen Zahlen in der Schule

Die Gleichung $x^2 = 2$ lässt sich im Bereich der rationalen Zahlen nicht lösen. Die beiden Lösungen sind nämlich $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$, welche man als *irrationale* Zahlen bezeichnet. Irrationale Zahlen lassen sich als Dezimal*zahlen* mit *unendlich* vielen Nachkommastellen, die jedoch *nicht-periodisch* sind (im Gegensatz zu den Dezimal*brüchen*, siehe oben), darstellen.

Die *rationalen* Zahlen lassen sich durch einen Bruch (z.B. $\frac{1}{4}$) repräsentieren. Bei den *irrationalen* Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$) ist dies nicht möglich. Die Vereinigung der rationalen und irrationalen Zahlen ergibt die *reellen* Zahlen.

[223] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 4. Arithmetik/ Gebrochene Zahlen, 2018, S. 3

16.7 Übersicht über die Zahlenbereiche

	Zahlenbereiche					
	Menge der natürlichen Zahlen	Menge der ganzen Zahlen	Menger der Bruchzahlen (nichtnegative rationale Zahlen)	Menge der rationalen Zahlen	Menge der irrationalen Zahlen (**unendlich** viele Nachkommastellen, die **nichtperiodisch** sind)	Menge der reellen Zahlen (Vereinigung aus rationalen und irrationalen Zahlen)
	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}_+$ $(=\mathbb{B})$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$
0	✔	✔	✔	✔		✔
$1 = \frac{2}{2}$	✔	✔	✔	✔		✔
$-1 = -\frac{2}{2}$		✔		✔		✔
$\frac{3}{2} = 1{,}5$			✔	✔		✔
$-\frac{3}{2} = -1{,}5$				✔		✔
$-\frac{1}{3} = -0{,}\overline{3}$				✔		✔
$\sqrt{9}$	✔	✔	✔	✔		✔
$\sqrt{2}$, π					✔	✔

17 Nähere Betrachtung der gebrochenen Zahlen

17.1 Darstellungsformen von gebrochenen Zahlen

Nachdem ein kurzer Überblick über die Zahlenbereiche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{B} = \mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gegeben wurde, soll nun der Zahlenbereich der gebrochenen Zahlen $\mathbb{B} = \mathbb{Q}_+$ näher betrachtet werden:

Es gibt folgende *Darstellungsformen* von gebrochenen Zahlen:

Bezeichnungen	*Bruchdarstellung* gebrochener Zahlen	*Dezimalbruchdarstellung* gebrochener Zahlen
Kurzform	**Bruch**	**Dezimalbruch**
Schreibweise	$\frac{a}{b}$	$z_m z_{m-1} \dots z_1 z_0\, ,\ z_{-1} \dots z_{n-1} z_n$
Erläuterung	a: Zähler, b: Nenner	z_i: Ziffer
Beispiel	$\frac{98.765}{16}$	$6.172{,}8125$
Variablenbelegung im Beispiel	$a = 98.765$ $b = 16$	$z_3 = 6; z_2 = 1; z_1 = 7; z_0 = 2;$ $z_{-1} = 8; z_{-2} = 1; z_{-3} = 2; z_{-3} = 5;$

<u>Hinweis:</u> Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist eigentlich keine gebrochene Zahl, sondern nur ein *Repräsentant* der gebrochenen Zahl. Gleiches gilt für einen Dezimalbruch. Die *Äquivalenzklasse*, die durch den Bruch $\frac{a}{b}$ repräsentiert wird, *ist* die gebrochene Zahl.

Die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ sowie der Dezimalbruch $0{,}5$ sind also Repräsentanten der gleichen gebrochenen Zahl, d.h. sie liegen in der gleichen Äquivalenzklasse. Also gilt: $\left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2}{4}\right] = [0{,}5]$. Normalerweise schreibt man jedoch: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0{,}5$.

17.2 Umwandlung eines Bruchs in einen Dezimalbruch

Um einen Bruch in einen Dezimalbruch umzuwandeln, verwendet man den Divisionsalgorithmus. Hierbei können, wie nachfolgend beschrieben, mehrere Fälle unterschieden werden.

17.2.1 Fallunterscheidungen bei der Dezimalbruchentwicklung[224]

- Dezimalbruch
  - endlich (abbrechend), z.B.: $\frac{10300}{400} = 25{,}75$
  - periodisch (nichtabbrechend)
    - reinperiodisch, z.B.: $\frac{10000}{300} = 33{,}\overline{3}$ oder $\frac{10000}{820} = 12{,}\overline{19512}$
    - gemischtperiodisch, z.B.: $\frac{90}{280} = 0{,}32\overline{142857}$

Die Unterschiede werden deutlich, wenn man den Divisionsalgorithmus in den 3 Fällen betrachtet.

a) Divisionsalgorithmus[225] der endlichen (abbrechenden) Zahl $\frac{10300}{400} = 25{,}75$

```
1 0 3 0 0 : 4 0 0 ≅   0 2 5 , 7 5
0 0 0
 0 0
1 0 3 0
  8 0 0
 0 0 0
  2 3 0 0
    0 0 0
   2 0 0
    3 0 0 0
      8 0 0
     2 0 0
      2 0 0 0
        0 0 0
       2 0 0
        0 0 0 0
```

Der Algorithmus bricht ab, da ab einem gewissen Schritt der Rest 0 entsteht. Dieser würde nachfolgend nur noch zu weiteren Nullen führen. Es gilt folgende Gleichung:

$$\frac{10300}{400} = 25{,}75 = 25 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{\mathbf{0}}{1000}$$

[224] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 4. Arithmetik/ Gebrochene Zahlen, 2018, S. 19
[225] Siehe auch: Dezimalbruchentwicklung.xlsx

Übung: Wandeln Sie $\frac{10149}{200}$ mit Hilfe des Divisionsalgorithmus in einen Dezimalbruch um.[226]

Lösung:

$$1\,0\,1\,4\,9 : 2\,0\,0 \cong 0\,5\,0,7\,4\,5\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \cong 0\;5\;0 + \frac{7}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

```
1 0 1 4 9 : 2 0 0 ≅
0 0 0
 0 0
1 0 1 4
  0 0 0
 1 0 0
  0 1 4 9
    0 0 0
   0 0 0
    1 4 9 0
      4 0 0
     1 0 0
      0 9 0 0
        8 0 0
       0 0 0
        1 0 0 0
          0 0 0
         1 0 0
          0 0 0 0
```

226 Sie können sich mit der Datei „Dezimalbruchentwicklung.xlsx“ weitere Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

b) Divisionsalgorithmus der *rein*periodischen (nichtabbrechenden) Zahl $\dfrac{10000}{300} = 33,\overline{3}$

```
1 0 0 0 0 : 3 0 0 ≅ 0 3 3 , 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
0 0 0
 0 0
1 0 0 0
  9 0 0
 0 0 0
  1 0 0 0
    9 0 0
   0 0 0
    1 0 0 0
      9 0 0
     0 0 0
      1 0 0 0
        9 0 0
       0 0 0
        1 0 0 0
          9 0 0
         0 0 0
          1 0 0 0
            9 0 0
           0 0 0
            1 0 0 0
              9 0 0
             0 0 0
              1 0 0 0
                9 0 0
               0 0 0
                1 0 0 0
                  9 0 0
                 0 0 0
                  1 0 0 0
                    9 0 0
                   0 0 0
                    1 0 0 0
                      9 0 0
                     0 0 0
                      1 0 0 0
                        9 0 0
                       0 0 0
                        1 0 0 0
```

Der Algorithmus bricht nie ab. *Von Beginn an* entsteht *immer der gleiche* Rest 100. Es gilt folgende Gleichung:

$$\frac{10000}{300} = 33,\overline{3} = 33 + \frac{100}{300} = 33 + \frac{100}{300 \cdot 10^0}$$

Übung: Wandeln Sie $\frac{500}{300}$ mit Hilfe des Divisionsalgorithmus in einen Dezimalbruch um.[227]

Lösung:

```
0 0 5 0 0 : 3 0 0 ≅    0 0 1 , 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6   ≅  0   0  1
0 0 0
 0 0
0 0 5 0
  0 0 0
 0 0 0
  0 5 0 0
    3 0 0
   0 0 0
    2 0 0 0
      8 0 0
     1 0 0
      2 0 0 0
        8 0 0
       1 0 0
        2 0 0 0
          8 0 0
         1 0 0
          2 0 0 0
```

$$+\frac{200}{300 \cdot 10^{0}}$$

Hinweis: Falls *ein sich wiederholender* Rest erkannt wird, wird dieser gelb hinterlegt. Die Nachkommastelle nach diesem Rest ist der Beginn der Periode.

[227] Sie können sich mit der Datei „Dezimalbruchentwicklung.xlsx“ weitere Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

c) Divisionsalgorithmus der *rein*periodischen (nichtabbrechenden) Zahl $\frac{10000}{820} = 12,\overline{19512}$

```
10000 : 820 ≅ 012,1951219512
000
 00
1000
 820
 000
 1800
  640
  100
  1600
   820
   000
   7800
    280
    710
    4200
     000
     410
     1000
      820
      000
      1800
       640
       100
       1600
        820
        000
        7800
         280
         710
         4200
          000
          410
          1000
           820
           000
           1800
            640
            100
            1600
```

Der Algorithmus bricht nie ab. *Von Beginn an* entsteht ein Rest 160, der sich zwar nicht direkt im darauffolgenden Schritt, jedoch später erneut ergibt, so dass sich ab dieser Stelle dann die Ziffernfolge wiederholt. Dass zwischendurch bereits eine Ziffer 1 ensteht, spielt für die Periodenlänge keine Rolle. Es gilt folgende Gleichung:

$$\frac{10000}{820} = 12,\overline{19512} = 12 + \frac{160}{820} = 12 + \frac{160}{820 \cdot 10^0}$$

Übung: Wandeln Sie $\frac{500}{111}$ mit Hilfe des Divisionsalgorithmus in einen Dezimalbruch um.[228]

Lösung:

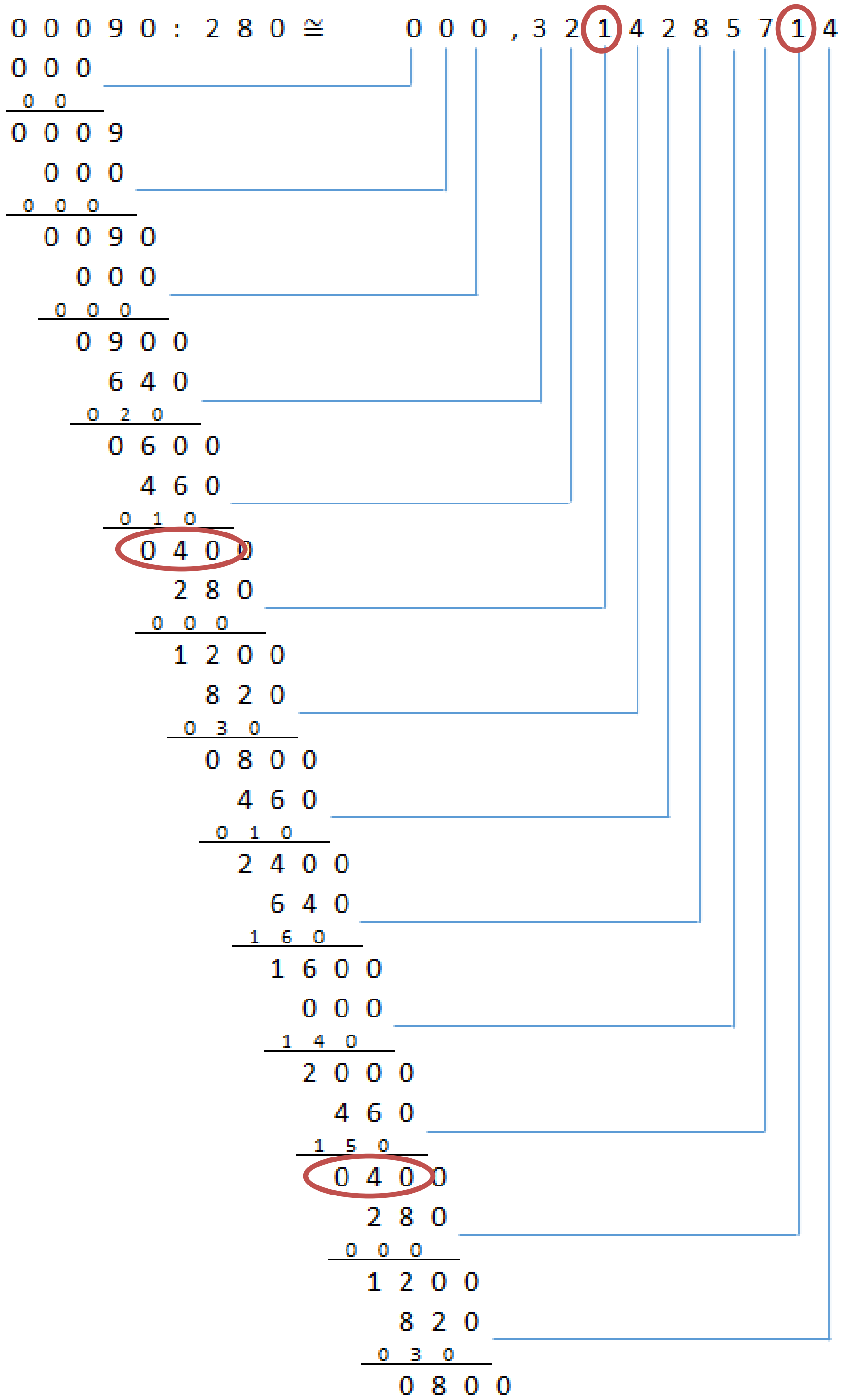
```
0 0 5 0 0 : 1 1 1 ≅   0 0 4 , 5 0 4 5 0 4 5 0 4 5   ≅  0  0 4
0 0 0
 0 0
0 0 5 0
  0 0 0
 0 0 0
  0 5 0 0
    4 4 4
   0 0 0
    0 5 6 0
      5 5 5
     0 0 0
      0 0 5 0
        0 0 0
       0 0 0
        0 5 0 0
          4 4 4
         0 0 0
          0 5 6 0
            5 5 5
           0 0 0
            0 0 5 0
```

$$+\frac{56}{111 \cdot 10^{0}}$$

Hinweis: Falls *ein sich wiederholender* Rest erkannt wird, wird dieser gelb hinterlegt. Die Nachkommastelle nach diesem Rest ist der Beginn der Periode.

[228] Sie können sich mit der Datei „Dezimalbruchentwicklung.xlsx“ weitere Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

d) Divisionsalgorithmus der *gemischt*periodischen (nichtabbrechenden) Zahl $\dfrac{90}{280} = 0{,}32\overline{142857}$



Der Algorithmus bricht nie ab. *Nicht von Beginn an (daher gemischtperiodisch), sondern erst an späterer Stelle* entsteht ein Rest 40, der sich zwar nicht direkt im darauffolgenden Schritt, jedoch später erneut ergibt, so dass sich ab dieser Stelle dann die Ziffernfolge wiederholt. Es gilt folgendes:

$$\frac{90}{280} = 0{,}32\overline{142857} = 0 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{40}{280 \cdot 100} = 0 + \frac{3}{10^1} + \frac{2}{10^2} + \frac{40}{280 \cdot 10^2}$$

Übung: Wandeln Sie $\frac{500}{880}$ mit Hilfe des Divisionsalgorithmus in einen Dezimalbruch um.[229]

Lösung:

0 0 5 0 0 : 8 8 0 ≅ 0 0 0 , 5 6 8 1 8 1 8 1 8 1 ≅ 0 0 0 $+ \frac{5}{10^1} + \frac{6}{10^2} + \frac{720}{880 \cdot 10^2}$

0 0 0
0 0
0 0 5 0
0 0 0
0 0 0
0 5 0 0
0 0 0
0 0 0
5 0 0 0
0 0 0
4 4 0
6 0 0 0
8 8 0
4 4 0
7 2 0 0
4 4 0
6 6 0
1 6 0 0
8 8 0
0 0 0
7 2 0 0
4 4 0
6 6 0
1 6 0 0

Hinweis: Falls *ein sich wiederholender* Rest erkannt wird, wird dieser gelb hinterlegt. Die Nachkommastelle nach diesem Rest ist der Beginn der Periode.

[229] Sie können sich mit der Datei „Dezimalbruchentwicklung.xlsx“ weitere Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

17.2.2 Wann besitzt ein Bruch eine endliche, reinperiodische oder gemischtperiodische Dezimalbruchdarstellung?

a) Endliche Dezimalbruchdarstellung

> Der vollständig gekürzte (echte) Bruch $\frac{a}{b}$ besitzt genau dann eine *endliche* Dezimalbruchdarstellung, wenn der Nenner b ein Teiler von 10 oder einer höheren Zehnerpotenz ist.

Hinweis: Wenn man eine Zahl durch 10^k teilt, verschiebt sich das Komma um k Stellen nach links.

Beispiele:

$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$	$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$	$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$
$\frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0{,}05$	$\frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 0{,}04$	$\frac{1}{50} = \frac{2}{100} = 0{,}02$	$\frac{1}{100} = 0{,}01$
$\frac{1}{200} = \frac{5}{1000} = 0{,}005$	$\frac{1}{250} = \frac{4}{1000} = 0{,}004$	$\frac{1}{500} = \frac{2}{1000} = 0{,}002$	$\frac{1}{1000} = 0{,}001$

b) Reinperiodische Dezimalbruchdarstellung

> Der vollständig gekürzte (echte) Bruch $\frac{a}{b}$ besitzt genau dann eine *reinperiodische* Dezimalbruchdarstellung, wenn der Nenner b *weder* den Primfaktor 2 *noch* den Primfaktor 5 enthält.

Beispiele:

$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = 0,\overline{3}$	$\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999} = 0,\overline{142857}$	$\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$
$\frac{1}{11} = \frac{09}{99} = 0,\overline{09}$	$\frac{1}{13} = \frac{076923}{999999} = 0,\overline{076923}$	$\frac{1}{21} = \frac{047619}{999999} = 0,\overline{047619}$

c) Gemischtperiodische Dezimalbruchdarstellung *) [230]

[230] Siehe Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 5. Zahlenbereiche / Gebrochene Zahlen, 2019, S. 23

17.3 Umwandlung eines Dezimalbruchs in einen Bruch

Dezimalbruch	Formel[231]	Beispiel
endlich	$q_0,q_1q_2 \ \dots \ q_n =$ $q_0 + \frac{q_1}{10^1} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \dots + \frac{q_n}{10^n}$	$1{,}2345 = 1 + \frac{2}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4}$ $= 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000}$ $= 1 + \frac{2000}{10000} + \frac{300}{10000} + \frac{40}{10000} + \frac{5}{10000} = 1 + \frac{2345}{10000} = \frac{2469}{2000}$
*rein*periodisch, < 1	$0,\overline{q_1q_2 \ \dots \ q_s} = \frac{P}{10^s - 1}$ (P: Periode)	$0,\overline{1} = \frac{1}{10^1 - 1} = \frac{1}{10 - 1} = \frac{1}{9}$ $0,\overline{18} = \frac{18}{10^2 - 1} = \frac{18}{100 - 1} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$ $0,\overline{076923} = \frac{076923}{10^6 - 1} = \frac{76923}{1.000.000 - 1} = \frac{76923}{999.999} = \frac{1}{13}$
*rein*periodisch, > 1	$q_0,\overline{q_1q_2 \ \dots \ q_s} = q_0 + \frac{P}{10^s - 1}$	$5,\overline{18} = 5 + \frac{18}{10^2 - 1} = 5 + \frac{18}{100 - 1} = 5 + \frac{18}{99} = 5 + \frac{2}{11}$
*gemischt*periodisch	1. Abspaltung des endlichen Dezimalbruchs 2. *rein*periodischen Dezimalbruch durch Multiplikation mit ein Zehnerpotenz erzeugen 3. Formel anwenden und Summe berechnen	$5{,}12\overline{18} \overset{1.}{\triangleq} 5{,}12 + 0{,}00\overline{18} \overset{2.}{\triangleq} 5{,}12 + 0,\overline{18} \cdot 10^{-2}$ $\overset{3.}{\triangleq} 5{,}12 + \frac{18}{10^2 - 1} \cdot 10^{-2} = 5{,}12 + \frac{18}{99} \cdot 10^{-2} = 5 + \frac{12}{100} + \frac{18}{9900} = \frac{2817}{550}$

[231] Siehe auch: Lehmann, I.: Faszination Mathematik: 4. Arithmetik/ Gebrochene Zahlen, 2018, S. 20 - 21

Übung[232]:

Wandeln Sie den *endlichen* Dezimalbruch 4,52 in einen vollständig gekürzten Bruch[233] um.

Lösung:

0 0 4 , 5 2

= 0 0 4

\+ 0 , 5 2 0 0 0 0 0 0 0

$$= 4 + \frac{52}{100}$$

$$= \frac{400}{100} + \frac{52}{100}$$

$$= \frac{452}{100}$$

$$= \frac{113}{25}$$

[232] Sie können sich mit der Datei „Umwandlung (periodischer) Dezimalbruch in Bruch.xlsx“ Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

[233] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Bruchrechnung#Gemischte_Br%C3%BCche

Übung[234]:

Wandeln Sie den *reinperiodische*n Dezimalbruch $0,\overline{81}$ (<1) in einen vollständig gekürzten Bruch um.

Lösung:

$000,\overline{8}\overline{1}$

$= 000$
$+ \quad 0,000000000$
$+ \quad 0,\overline{8}\overline{1}$

Abspaltung des endlichen Dezimalbruchs < 1

$= 000$
$+ \quad 0,000000000$
$+ \quad 0,\overline{8}\overline{1} \quad \cdot 1$

*Rein*periodischer Dezimalbruch wurde (falls Periode vorhanden) durch Multiplikation mit ein Zehnerpotenz erzeugt.

$= 000$
$+ \quad 0$
$+ \quad \dfrac{81}{10^{2}-1} \cdot 10^{-0}$

*Rein*periodischer Dezimalbruch wurde (falls Periode vorhanden) mithilfe der Formel

$$0,\overline{q_1 q_2 \ \dots \ q_s} = \frac{P}{10^s - 1}$$

umgewandelt.

$$= 0 + \frac{0}{1} + \frac{81}{99}$$

$$= \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$$

[234] Sie können sich mit der Datei „Umwandlung (periodischer) Dezimalbruch in Bruch.xlsx“ Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

Übung[235]:

Wandeln Sie den *reinperiodischen* Dezimalbruch $23,\overline{45}$ (>1) in einen vollständig gekürzten Bruch um.

Lösung:

$0\,2\,3,\overline{4\,5}$

$= 0\,2\,3 + 0,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 + 0,\overline{4\,5}$

Abspaltung des endlichen Dezimalbruchs < 1

$= 0\,2\,3 + 0,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 + 0,\overline{4\,5} \cdot 1$

*Rein*periodischer Dezimalbruch wurde (falls Periode vorhanden) durch Multiplikation mit ein Zehnerpotenz erzeugt.

$= 0\,2\,3 + 0 + \frac{45}{10^2 - 1} \cdot 10^{-0}$

*Rein*periodischer Dezimalbruch wurde (falls Periode vorhanden) mithilfe der Formel

$$0,\overline{q_1 q_2 \; \dots \; q_s} = \frac{P}{10^s - 1}$$

umgewandelt.

$= 23 + \frac{0}{1} + \frac{45}{99}$

$= \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}$

[235] Sie können sich mit der Datei „Umwandlung (periodischer) Dezimalbruch in Bruch.xlsx“ Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

Übung[236]:

Wandeln Sie den *gemischtperiodischen* Dezimalbruch $0{,}04\overline{36}$ in einen vollständig gekürzten Bruch um.

Lösung:

$000{,}04\overline{36}$

$= 000 + 0{,}040000000 + 0{,}00\overline{36}$

Abspaltung des endlichen Dezimalbruchs < 1

$= 000 + 0{,}040000000 + 0{,}\overline{36} \cdot 0{,}01$

*Rein*periodischer Dezimalbruch wurde (falls Periode vorhanden) durch Multiplikation mit ein Zehnerpotenz erzeugt.

$= 000 + 0{,}04 + \dfrac{36}{10^2 - 1} \cdot 10^{-2}$

*Rein*periodischer Dezimalbruch wurde (falls Periode vorhanden) mithilfe der Formel

$$0,\overline{q_1 q_2 \;\dots\; q_s} = \frac{P}{10^s - 1}$$

umgewandelt.

$= 0 + \dfrac{4}{100} + \dfrac{36}{9900}$

$= \dfrac{432}{9900} = \dfrac{12}{275}$

236 Sie können sich mit der Datei „Umwandlung (periodischer) Dezimalbruch in Bruch.xlsx“ Übungsaufgaben mit Rechenweg und Lösungen erzeugen.

17.4 Zusammenhang natürlicher und gebrochener Zahlen (Bruchzahlen)

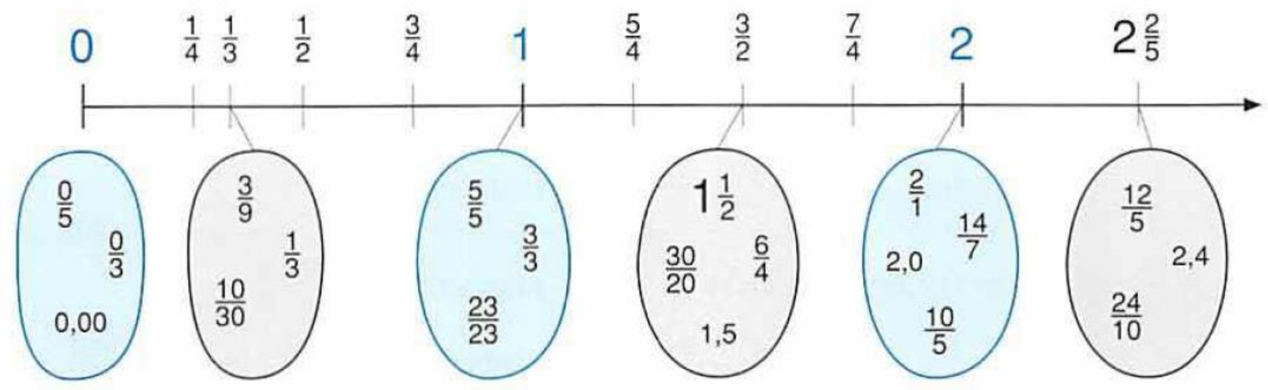
Die natürliche Zahl a wird mit der gebrochenen Zahl $\frac{a}{1}$ *identifiziert*.

17.5 Anordnung der Bruchzahlen

17.5.1 Bruchzahlen auf dem Zahlenstrahl

„Jeder Bruch kann einem Punkt des Zahlenstrahls zugeordnet werden. Zwei Brüche, die durch Erweitern (bzw. durch Kürzen) auseinander hervorgehen, werden demselben Punkt zugeordnet. Diese Brüche stellen dieselbe Bruchzahl (dieselbe gebrochene Zahl) dar. […]

Beim Zuordnen der Brüche zu Punkten des Zahlenstrahls trifft man Punkte, denen bereits natürliche Zahlen zugeordnet sind.“[237]



Beispiele: $$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}=\cdots$$ $$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{6}{8}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}=\cdots$$

[237] Aus: Aus: Warmuth, E.: Mathematik in Übersichten, 2015, S. 18

17.5.2 Dichtheit der Bruchzahlen

Die gebrochenen Zahlen liegen *dicht*: Zwischen je zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegen unendlich viele gebrochene Zahlen. [238]

17.5.3 Arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel $\bar{x}$ zweier Zahlen a und b ist:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

Mithilfe des arithmetischen Mittels erhält man eine Zahl, die zwischen a und b liegt.

Beispiel:

Seien

$$a = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

und

$$b = \frac{3}{4} = 0,75$$

Dann ist das arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{4}{12}+\frac{9}{12}}{2} = \frac{\frac{13}{12}}{2} = \frac{13}{24} = 0{,}541\overline{6}$$

eine Zahl, die zwischen a und b liegt.

[238] Siehe auch: https://www.mathe-online.at/lernpfade/Lernpfad848/?kapitel=3

18 Verhältnisgleichungen[239]

Den Quotienten x : y nennt man das *Verhältnis von x zu y* .

Seien x = 10 und y = 20

☐ Rechnungen ausblenden

Das Verhältnis von x zu y beträgt dann x : y = 10 : 20 = 1 : 2 ≅ 0,5

bzw. $\frac{x}{y} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \cong 0{,}5$

Stellt man die Gleichung nach x um, erhält man

$$x \cong 0{,}5 \cdot y$$

Also ist x (ungefähr) gleich dem 0,5 - fachen von y.

Beispiele für weitere Zahlenpaare, die zueinander im Verhältnis 1 : 2 stehen:

x	1	8	14	17	20	24	33	41
y	2	16	28	34	40	48	66	82

Es besteht *Quotientengleichheit* .

Das Verhältnis von y zu x beträgt dann y : x = 20 : 10 = 2 : 1 ≅ 2

bzw. $\frac{y}{x} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1} \cong 2$

Stellt man die Gleichung nach y um, erhält man

$$y \cong 2 \cdot x$$

Also ist y (ungefähr) gleich dem 2 - fachen von x.

Die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$y = f(x) = 2 \cdot x$

ist eine *proportionale* Funktion.

x und y sind zueinander *proportional*.

[239] Alle nachfolgenden Abbildungen entstammen der Datei „Verhältnisgleichungen.xlsx“, mit der Sie sich Übungsaufgaben generieren können.

18.1 Beispiel für eine proportionale Zuordnung[240]

Die Größen Anzahl der Flaschen (x - Wert)

und Preis in € (y - Wert) sind *direkt proportional* .

Jedem x-Wert wird das 2 - fache seines Wertes zugeordnet.

· 9 · 3

x	1	3	9	15	21	27	
y	2	6	18	30	42	54	· 2

· 9 · 3

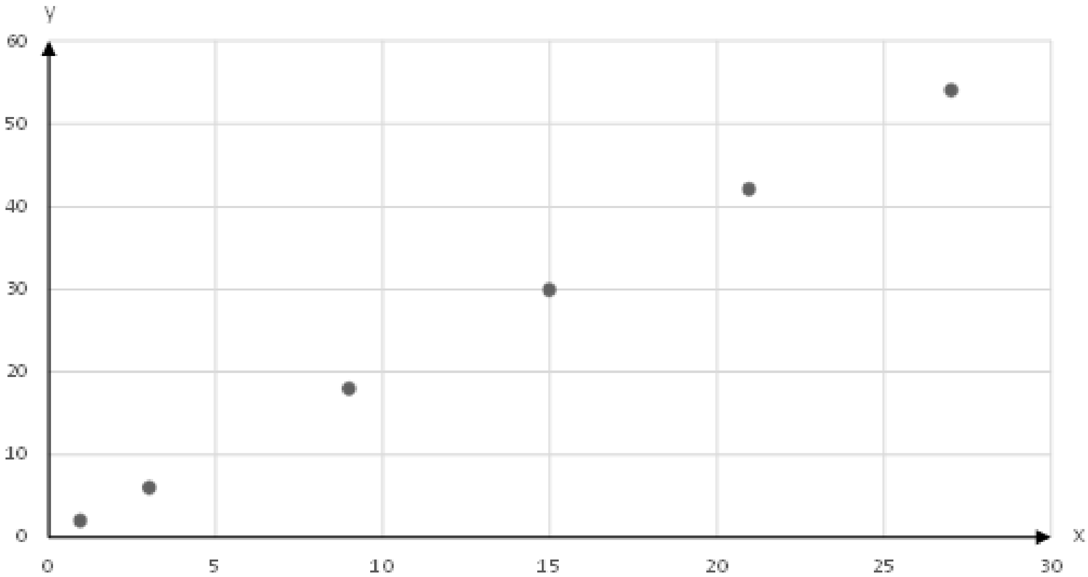
Zuordnungsvorschrift:
x ↦ y = 2 · x

y : x	2	2	2	2	2	2

Quotientengleichheit

Proportionalitätsfaktor:
m = y : x = 2

Diagramm:



Berechne mit dem Dreisatz (und vergleiche danach mit obiger Wertetabelle):

Wenn x = 21 ist, dann ist y = 42 . Wie groß ist y, wenn x = 3 ist?

Wenn y = 54 ist, dann ist x = 27 . Wie groß ist x, wenn y = 30 ist?

	x	y	
	21	42	
: 21	1	2	: 21
· 3	3	6	· 3

	x	y	
	27	54	
: 54	0,5	1	: 54
· 30	15	30	· 30

[240] Siehe auch: Proportionale Funktionen, S. 108

18.2 Umformen von Verhältnisgleichungen

18.2.1 Beispiel 1

Das Verhältnis von x zu y beträgt 1 : 2

☐ Rechnungen ausblenden

Wie groß ist x, wenn y = 30 ist?

Ansatz:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

Einsetzen von y:

$$\frac{x}{30} = \frac{1}{2}$$

Umstellen nach x:

$$x = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$$

Wie groß ist y, wenn x = 27 ist?

Ansatz:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

Einsetzen von x:

$$\frac{27}{y} = \frac{1}{2}$$

Umstellen nach y:

$$27 = \frac{1}{2} \cdot y$$

$$y = 27 \cdot \frac{2}{1} = 54$$

18.2.2 Beispiel 2

Das Verhältnis von x zu y beträgt 4 : 5

Das Verhältnis von y zu z beträgt 1 : 2

☐ Rechnungen ausblenden

Wie groß ist z, wenn x = 20 ist?

Gegeben:

$$1)\quad \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \qquad \text{und} \qquad 2)\quad \frac{y}{z} = \frac{1}{2}$$

Da z gesucht ist, wird die Gleichung 2) nach z aufgelöst:

$$2)'\quad z = y \cdot \frac{2}{1}$$

Da z abhängig von y ist, wird die Gleichung 1) nach y aufgelöst:

$$1)'\quad y = x \cdot \frac{5}{4}$$

Einsetzen von x:

$$1)''\quad y = 20 \cdot \frac{5}{4} = 25$$

Nun kann in 2)' der Wert für y eingesetzt werden:

$$2)''\quad z = 25 \cdot \frac{2}{1} = 50$$

18.2.3 Beispiel 3

Die Summe von x und y beträgt 40

☐ Rechnungen ausblenden

Das Verhältnis von y zu z beträgt 1 : 4

Wie groß ist x, wenn z = 20 ist?

Gegeben:

$$1) \quad x + y = 40 \qquad \text{und} \qquad 2) \quad \frac{y}{z} = \frac{1}{4}$$

Da x gesucht ist, wird die Gleichung 1) nach x aufgelöst:

$$1)' \quad x = 40 - y$$

Da x abhängig von y ist, wird die Gleichung 2) nach y aufgelöst:

$$2)' \quad y = \frac{1}{4} \cdot z$$

Einsetzen von z:

$$2)'' \quad y = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$$

Nun kann in 1)' der Wert für y eingesetzt werden:

$$1)'' \quad x = 40 - 5 = 35$$

18.2.4 Beispiel 4

Das Verhältnis von x zu y beträgt 5 : 4

Rechnungen ausblenden

Das Verhältnis von y zu z beträgt 10 : 1

Wie groß ist das Verhältnis der Differenz aus x und y zu z?

Gegeben:

1) $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$ und 2) $\frac{y}{z} = \frac{10}{1}$

Gesucht ist:

$$\frac{x - y}{z}$$

Auflösen der Gleichung 1) nach x ergibt:

1)' $x = \frac{5}{4} \cdot y$

Auflösen der Gleichung 2) nach y ergibt:

2)' $y = \frac{10}{1} \cdot z$

Nun kann in 1)' y ersetzt werden:

1)'' $x = \frac{5}{4} \cdot \frac{10}{1} \cdot z = \frac{50}{4} \cdot z = \frac{25}{2} \cdot z$

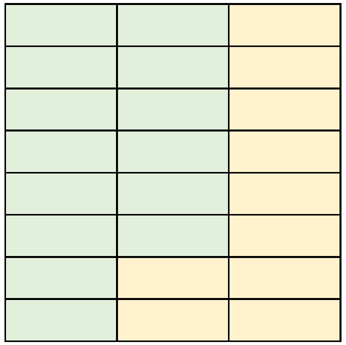
Damit ergibt sich durch Ersetzen von x und y:

$$\frac{x - y}{z} = \frac{\frac{25}{2} \cdot z - \frac{10}{1} \cdot z}{z} = \frac{25}{2} - \frac{10}{1} = \frac{25 - 20}{2} = \frac{5}{2}$$

19 Prozentrechnung[241]

19.1 Anteile in Prozent

14 von 24



$$\text{Der Anteil beträgt } p\% = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \cong 0{,}5833 \cong \frac{58{,}33}{100} \cong 58{,}33\%$$

Hinweis: Das "%"- Zeichen ist mit der Division durch 100 gleichzusetzen.

Der **Prozentwert** beträgt W = 14

Der **Grundwert** beträgt G = 24

Der **Prozentsatz** beträgt p% ≅ 58,33%

Es ergibt sich die Formel:

$$p\% = \frac{W}{G}$$

Diese kann durch Multiplikation mit G überführt werden in:

$$W = p\% \cdot G$$

Durch Division durch p% erhält man:

$$G = \frac{W}{p\%}$$

Hinweis: Das "%"-Zeichen kann durch Multiplikation mit 100 aufgehoben werden:

$$p\% = \frac{W}{G} \Leftrightarrow p = \frac{W \cdot 100}{G}$$

[241] Alle nachfolgenden Abbildungen entstammen der Datei „Prozentrechnung.xlsx“, mit der Sie sich Übungsaufgaben generieren können.

19.2 Berechnungen

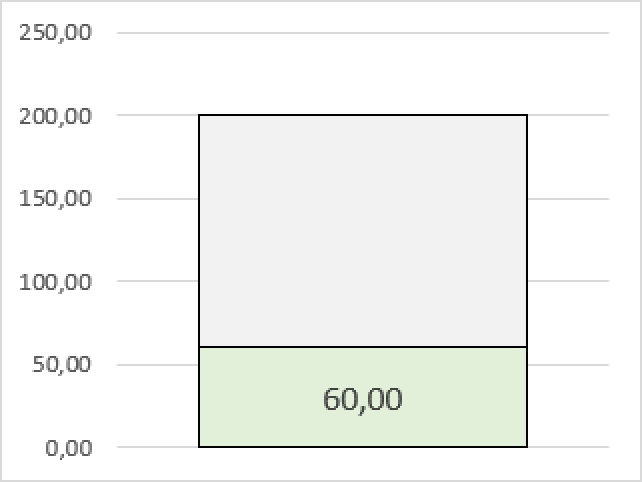
19.2.1 Prozentsatz

Geg.:	Grundwert:	G =	200,00
	Prozentwert:	W =	60,00

Ges.: Prozentsatz: p%

Ansatz: $p\% = \dfrac{W}{G}$

Rechnung: $p\% = \dfrac{60{,}00}{200{,}00} = 0{,}3 = 30{,}00\%$



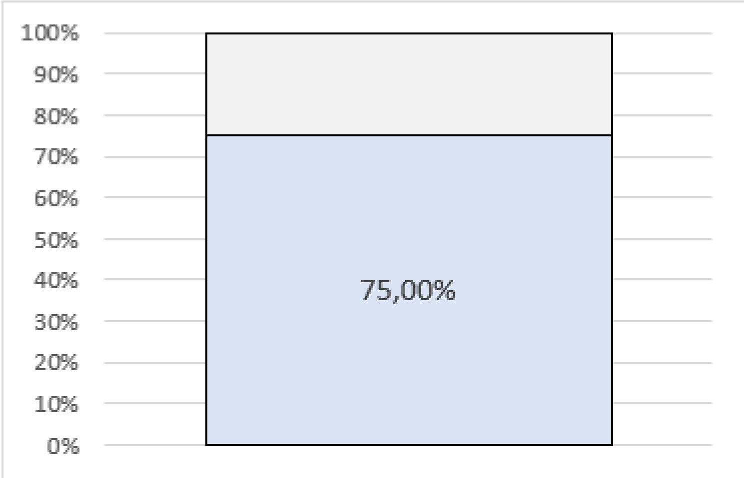
Berechnung des Prozentsatzes (mit Dreisatz)

200,00	≙	100,00%	|	: 200,00
1	≙	0,5000%	|	· 60,00
60,00	≙	30,00%		

19.2.2 Prozentwert

Geg.:	Prozentsatz:	p% =	75,00%
	Grundwert:	G =	295,00

Ges.: Prozentwert: W



Ansatz: $W = G \cdot p\%$

Rechnung: $W = 295{,}00 \cdot 75{,}00\% = 221{,}25$

Berechnung des Prozentwertes (mit Dreisatz)

295,00	≙	100,00%	|	:	100
2,95	≙	1,0000%	|	·	75,00
221,25	≙	75,00%			

19.2.3 Grundwert

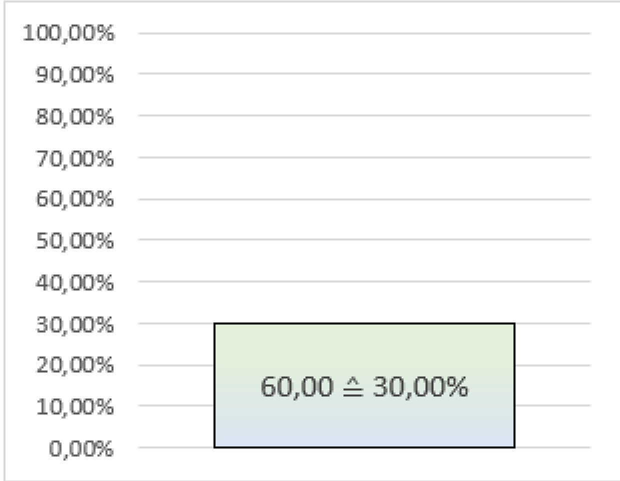
Geg.: Prozentwert: W = 60,00

Prozentsatz: p% = 30,00%

Ges.: Grundwert: G

Ansatz: $G = \dfrac{W}{p\%}$

Rechnung: $G = \dfrac{60{,}00}{30{,}00\%} = 200{,}00$



Berechnung des Grundwertes (mit Dreisatz)

60,00	≙	30,00%	|	:	30,00
2,00	≙	1%	|	·	100
200,00	≙	100%			

19.3 Änderungen

Prozentuale Erhöhung

☐ Rechnungen ausblenden

Geg.:	Grundwert: G =		200,00				
	Erhöhung *um* p% =		60,00%		(bzw. eine Erhöhung *auf* 160,00%)		
	Wachstumsfaktor: q = (1 + p%)			=	1,60		
Ges.:	Prozentwert: W						
Ansatz:		W =	G	·	(1 + p%)		
Rechnung:		W =	200	·	160,00%	=	320,00
	bzw.	W =	200	·	1,60	=	320,00

Prozentuale Abnahme

Geg.:	Grundwert: G =	200,00				
	Abnahme *um* p% =	60,00%	(bzw. eine Abnahme *auf* 40,00%)			
	Abnahmefaktor: q = (1 - p%)	=	0,40			
Ges.:	Prozentwert: W					
Ansatz:	W =	G	·	(1 - p%)		
Rechnung:	W =	200	·	40,00%	=	80,00
bzw.	W =	200	·	0,40	=	80,00

19.4 Umsatzsteuer *)

Bruttobetrag berechnen (brutto: zusammengesetzt - *enthält* Umsatzsteuer)

Geg.:	(Grundwert:)	Nettobetrag =	8,32 €					
	(Prozentsatz:)	Umsatzsteuersatz =	19%					
Ges.:	(Prozentwert:)	Umsatzsteuer						
		Bruttobetrag						
Ansatz 1:		Umsatzsteuer =	Umsatzsteuersatz	·	Nettobetrag			
Rechnung:		Umsatzsteuer =	19%	·	8,32 €	=	1,58 €	
Ansatz 2:		Bruttobetrag =	Nettobetrag		+ Umsatzsteuer			
Rechnung:		Bruttobetrag =	8,32 €	+	1,58 €	=	9,90 €	

oder (als Erhöhung auf 119%)

Bruttobetrag = Nettobetrag · (1 + Umsatzsteuersatz)

Bruttobetrag = 8,32 € · 1,19 = 9,90 €

Nettobetrag berechnen (netto: verbleibend - *ohne* Umsatzsteuer)

Geg.: Bruttobetrag = 9,90 €

Umsatzsteuersatz = 19%

Ges.: Nettobetrag

Ansatz: Bruttobetrag = Nettobetrag · (1 + Umsatzsteuersatz)

$$\text{Nettobetrag} = \frac{\text{Bruttobetrag}}{(1 + \text{Umsatzsteuersatz})}$$

Rechnung:

$$\text{Nettobetrag} = \frac{9{,}90\ €}{119\%} = 8{,}32\ €$$

$$\text{Nettobetrag} = 9{,}90\ € \cdot \frac{100}{119} = 8{,}32\ €$$

$$\text{Nettobetrag} = 9{,}90\ € \cdot 0{,}840336134 \cong 8{,}32\ €$$

19.5 Tageszinsen (Verzinsung einmal im Jahr) *)

Geg.:	(Grundwert:) Kapital K =	17.000,00 €	
	(Prozentsatz:) Zinssatz p% =	7,50%	
	Laufzeit (in Tagen) t =	60	(1 Jahr entspricht 360 Tagen)

Ges.:	(Prozentwert:) Jahreszinsen Z
	Zinsen für Laufzeit von t Tagen

Ansatz:	Z = K · p%	(Jahreszinsen)
	Z · t / 360	(Zinsen für eine Laufzeit von t Tagen)

Rechnung:	Z =	17.000,00 €	·	7,50%	=	1.275,00 €
	Z · t / 360 =	1.275,00 €	·	60 ------- 360	=	212,50 €

Antwort:	Es sind	212,50 €	Zinsen in	60	Tagen angefallen.

19.6 Exponentielles Wachstum

19.6.1 Mehrfache Zunahme um p%

(Grundwert G:)	Anfangsbestand	B(0) =	100
	Erhöhung um (prozentuale Wachstumsrate)	p% =	50,00%
(Prozentsatz:)	Erhöhung auf	1 + p% =	150,00%
	Wachstumsfaktor	q =	1,5

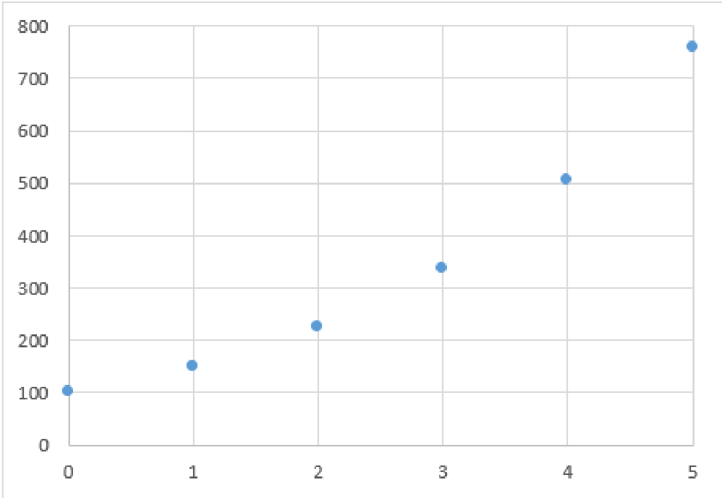
Bei mehrmaliger Erhöhung ergibt sich folgender Verlauf:

$$100 \xrightarrow{\cdot 1{,}5} 150 \xrightarrow{\cdot 1{,}5} 225 \xrightarrow{\cdot 1{,}5} 337{,}5 \xrightarrow{\cdot 1{,}5} 506{,}25 \xrightarrow{\cdot 1{,}5} 759{,}38$$

Hieraus ergibt sich

$$100 = 100 \cdot 1{,}5^{0}$$
$$150 = 100 \cdot 1{,}5^{1}$$
$$225 = 100 \cdot 1{,}5^{2}$$
$$337{,}5 = 100 \cdot 1{,}5^{3}$$
$$506{,}25 = 100 \cdot 1{,}5^{4}$$
$$759{,}375 = 100 \cdot 1{,}5^{5}$$

Allgemein $B(t) = B(0) \cdot q^{t}$



a) Beispiel: Bakterienkultur

Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 10 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich jede Stunde. Nach wie vielen Stunden hat die Bakterienkultur hinsichtlich des Anfangsbestandes das Zehnfache überschritten?

(Grundwert G:)	Anfangsbestand	B(0) =	10
	Erhöhung um (prozentuale Wachstumsrate)	p% =	100,00%
(Prozentsatz:)	Erhöhung auf	1 + p% =	200,00%
	Wachstumsfaktor	q =	2

Bei mehrmaliger Erhöhung ergibt sich folgender Verlauf: $10 \xrightarrow{\cdot 2} 20 \xrightarrow{\cdot 2} 40 \xrightarrow{\cdot 2} 80 \xrightarrow{\cdot 2} 160 \xrightarrow{\cdot 2} 320$

Hieraus ergibt sich

$10 = 10 \cdot 2^{0}$

$20 = 10 \cdot 2^{1}$

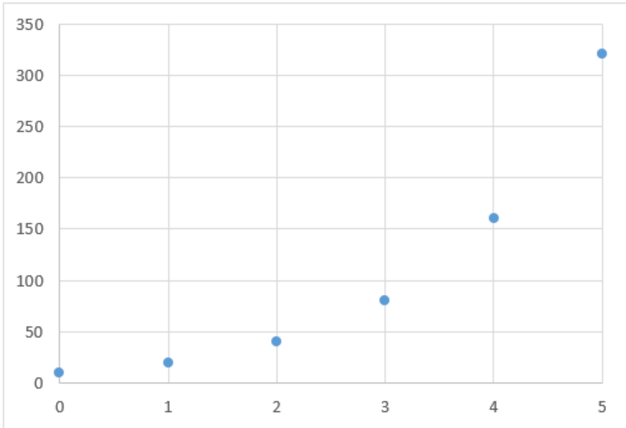
$40 = 10 \cdot 2^{2}$

$80 = 10 \cdot 2^{3}$

$160 = 10 \cdot 2^{4}$

$320 = 10 \cdot 2^{5}$

Allgemein $B(t) = B(0) \cdot q^{t}$



Nach 4 Stunden hat sich die Bakterienkultur mehr als verzehnfacht: $160 > 10 \cdot 10$

b) Beispiel: Roulette

Ein Spieler hat eine Glückssträhne: Er setzt jedes Mal sein ganzes Geld und erhält das 3-Fache zurück. Er will nicht aufhören, bis er mindestens das 100-Fache seines Anfangskapitals besitzt. Wie lange muss seine Glückssträhne anhalten?

(Grundwert G:)	Anfangsbestand	B(0) =	B(0)
	Erhöhung um (prozentuale Wachstumsrate)	p% =	200,00%
(Prozentsatz:)	Erhöhung auf	1 + p% =	300,00%
	Wachstumsfaktor	q =	3

Bei mehrmaliger Erhöhung ergibt sich folgender Verlauf:

$$B(0) \xrightarrow{\cdot 3} B(1) \xrightarrow{\cdot 3} B(2) \xrightarrow{\cdot 3} B(3) \xrightarrow{\cdot 3} B(4) \xrightarrow{\cdot 3} B(5)$$

Hieraus ergibt sich

$$B(0) = B(0) \cdot 3^{0} = B(0) \cdot 1 = B(0) \cdot 1$$
$$B(1) = B(0) \cdot 3^{1} = B(0) \cdot 3 = B(0) \cdot 3$$
$$B(2) = B(0) \cdot 3^{2} = B(0) \cdot 3 \cdot 3 = B(0) \cdot 9$$
$$B(3) = B(0) \cdot 3^{3} = B(0) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = B(0) \cdot 27$$
$$B(4) = B(0) \cdot 3^{4} = B(0) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = B(0) \cdot 81$$
$$B(5) = B(0) \cdot 3^{5} = B(0) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = B(0) \cdot 243$$

Wenn der Spieler 4-mal Glück gehabt hat, besitzt er das 81-Fache. Beim 5. Mal erst besitzt er mehr als das 100-Fache (nämlich das 243-Fache).

19.6.2 Exponentielle Abnahme – Mehrfache Abnahme um p%

(Grundwert G:) Anfangsbestand B(0) = 100

Abnahme um p% = 50,00%
(prozentuale Abnahmerate)

(Prozentsatz:) Abnahme auf 1 - p% = 50,00%

Abnahmefaktor q= 0,5

Bei mehrmaliger Verringerung ergibt sich folgender Verlauf: 100 $\xrightarrow{\cdot\, 0,5}$ 50 $\xrightarrow{\cdot\, 0,5}$ 25 $\xrightarrow{\cdot\, 0,5}$ 12,5 $\xrightarrow{\cdot\, 0,5}$ 6,25 $\xrightarrow{\cdot\, 0,5}$ 3,125

Hieraus ergibt sich

$100 = 100 \cdot 0{,}5^{0}$

$50 = 100 \cdot 0{,}5^{1}$

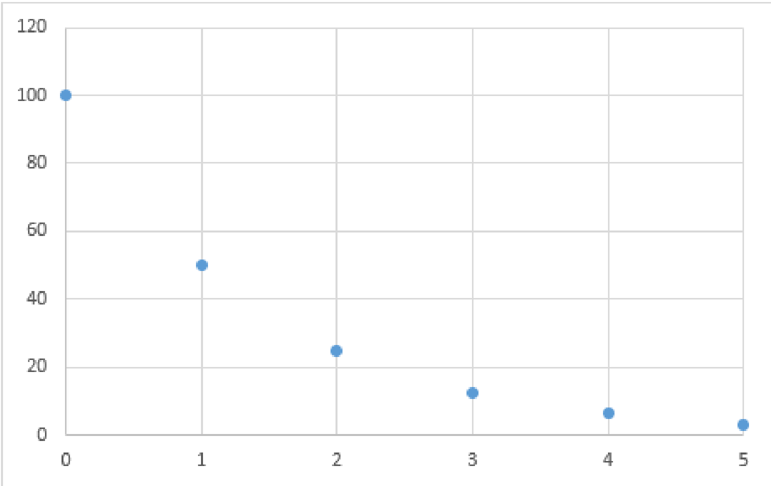
$25 = 100 \cdot 0{,}5^{2}$

$12{,}5 = 100 \cdot 0{,}5^{3}$

$6{,}25 = 100 \cdot 0{,}5^{4}$

$3{,}125 = 100 \cdot 0{,}5^{5}$

Allgemein $B(t) = B(0) \cdot q^{t}$



c) Beispiel: Einwohnerzahl eines Dorfes

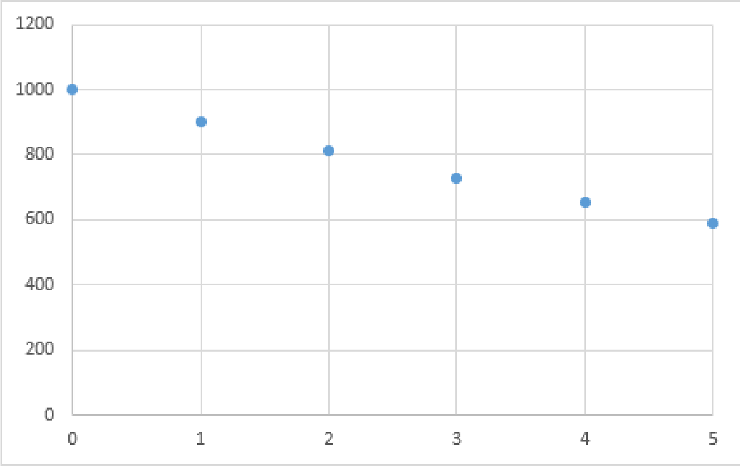
Im Jahr 2010 lebten in einem Dorf 1000 Einwohner. Jährlich sank die Einwohnerzahl um 10%. In welchem Jahr lebten weniger als 60% der Einwohnerzahl des Jahres 2010 in dem Dorf?

Bei mehrmaliger Verringerung ergibt sich folgender Verlauf: 1000 $\xrightarrow{\cdot 0{,}9}$ 900 $\xrightarrow{\cdot 0{,}9}$ 810 $\xrightarrow{\cdot 0{,}9}$ 729 $\xrightarrow{\cdot 0{,}9}$ 656,1 $\xrightarrow{\cdot 0{,}9}$ 590,49

Hieraus ergibt sich

$$1000 = 1000 \cdot 0{,}9^{0}$$
$$900 = 1000 \cdot 0{,}9^{1}$$
$$810 = 1000 \cdot 0{,}9^{2}$$
$$729 = 1000 \cdot 0{,}9^{3}$$
$$656{,}1 = 1000 \cdot 0{,}9^{4}$$
$$590{,}49 = 1000 \cdot 0{,}9^{5}$$

Allgemein $B(t) = B(0) \cdot q^{t}$



Nach 5 Jahren (also 2015) sank die Einwohnerzahl erstmalig unter 60%.

$$0{,}9^5 = \left(\frac{9}{10}\right)^5 = \frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10} = \frac{59049}{100000} < \frac{6}{10} = 60\%$$

19.6.3 Bestandsfunktion

$$B(t) = B(0) \cdot q^{t}$$

B(t) : Bestand zum Zeitpunkt t
B(0) : Anfangsbestand (zum Zeitpunkt t = 0)
q : Wachstums- bzw. Abnahmefaktor
t : Zeitpunkt

1. Fall ☐ ausblenden

Geg.: B(0) = 100,00
q = 1,5
t = 5

Ges.: B(5)

Ansatz: $$B(t) = B(0) \cdot q^{t}$$

Rechnung: $$B(5) = 100 \cdot 1{,}5^{5}$$

$$B(5) = 759{,}3750$$

2. Fall ☐ ausblenden

Geg.: B(t) = 225,00
B(0) = 100,00
q = 1,5

Ges.: t

Ansatz: $$B(t) = B(0) \cdot q^{t}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \log_{q}\left(\frac{B(t)}{B(0)}\right)$$

Rechnung: $$t = \log_{1{,}5}\left(\frac{225{,}00}{100{,}00}\right)$$

$$t = 2$$

$$B(t) = B(0) \cdot q^t$$

B(t) : Bestand zum Zeitpunkt t
B(0) : Anfangsbestand (zum Zeitpunkt t = 0)
q : Wachstums- bzw. Abnahmefaktor
t : Zeitpunkt

3. Fall

☐ ausblenden

Geg.:

t = 2
B(2) = 225,00
q = 1,5

Ges.: B(0)

Ansatz: $B(t) = B(0) \cdot q^t$

$$\Leftrightarrow \quad B(0) = \frac{B(t)}{q^t}$$

Rechnung: $$B(0) = \frac{B(\;2\;)}{q^t}$$

B(0) = 100,0000

4. Fall

☐ ausblenden

Geg.:

t = 2
B(2) = 225,00
B(0) = 100,00

Ges.: q

Ansatz: $B(t) = B(0) \cdot q^t$

$$\Leftrightarrow \quad q = \left(\frac{B(t)}{B(0)} \right)^{\frac{1}{t}}$$

Rechnung: $$q = \left(\frac{225,00}{100,00} \right)^{\frac{1}{2}}$$

q = 1,5

19.6.4 Zinseszinsformel *)

Man betrachte die Bestandsfunktion:

$$B(t) = B(0) \cdot q^t = B(0) \cdot (1 + p\%)^t = B(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

Hieraus ergibt sich die Zinseszinsformel:

$$K(t) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

K(0) : Anfangskapital
K(t) : Kapital nach t Jahren (bzw. t Zeiträumen)
p : Zinsfuß

$$K(t) = K(0) \cdot \left(1 + p\%\right)^t$$

p% : Zinssatz

Beispiel:

☐ Rechnung ausblenden

Anfangskapital:	K(0) =	3.000,00 €
Zinsatz:	p% =	3,300%
Zeitraum:	t =	10

$$K(\ 10\ ) = 3.000{,}00\ € \cdot \left(1 + \frac{3{,}3}{100}\right)^{10} = 4.150{,}73\ €$$

20 Empfohlene Literatur

- Lehmann, I. / Schulz, W.: Mengen, Relationen, Funktionen. Springer Spektrum, 2016, 4. Aufl.
- Warmuth, E. (Hrsg.): Mathematik in Übersichten. Cornelsen, 2014
- Padberg, F. / Büchter, A.: Einführung Mathematik. Primarstufe – Arithmetik, Springer Spektrum, 2015, 2. Aufl.
- Padberg, F. / Büchter, A.: Vertiefung Mathematik. Primarstufe – Arithmetik/Zahlentheorie, Springer Spektrum, 2015, 2. Aufl.
- Scheid, H. / Schwarz, W.: Elemente der Arithmetik und Algebra, Springer, 2016, 6. Aufl.
- Benölken, R. / Gorski, H.-J. / Müller-Phillip, S.: Leitfaden Arithmetik, Springer Spektrum, 7. Auflage