Skript zur Fachvorlesung

Stochastik

(19/20 bbSt / GS Ma D4-D6)

Stand: 26.5.2020

Ralf Kühnke

Zur Orientierung

Liebe Teilnehmerin, lieber Teilnehmer,

gerne möchte ich Ihnen vorab ein paar Hinweise geben:

Dieses Skript wird parallel zur Vorlesung weiterentwickelt werden, da es noch *einige Baustellen* besitzt. Bitte beachten Sie jeweils die aktuelle Version, welche ggf. ab 20 Uhr des Vorlesungsvorabends bei Moodle zum Download zur Verfügung stehen wird.

Einen herzlichen Dank möchte ich Frau Dr. Warmuth aussprechen, die mir gestattet, Inhalte aus ihrem Skript, welches ich *sehr empfehlen* möchte, auch in meinem zu verwenden.

Zu meinem Skript existieren Moodle-Fortschrittslisten. Hiermit können Sie

- den *zeitlichen Ablauf der Vorlesung* erkennen und
- durch die Unterteilung in „Pflicht-Elemente" und „Alle Elemente" erkennen, welche Inhalte als *Basis*- und welche als *Zusatzstoff* (in diesem Skript mit „*)" gekennzeichnet) angesehen werden.

Sowohl bei der zeitlichen Gliederung als auch bei der Unterteilung in Basis- und Zusatzstoff sind Veränderungen möglich.

Sie können die Moodle-Fortschrittslisten auch für sich selbst zur Arbeitsorganisation nutzen, indem Sie ein Häkchen setzen, wenn Sie einen Punkt bearbeitet haben. Dies hat jedoch keinerlei sonstige Auswirkungen.

Dieses Skript ist mit vielen Hinweisen auf Fußnoten versehen. Bitte lassen Sie sich dadurch nicht irritieren: Grundsätzlich können Sie alle Fußnoten einfach ignorieren. Für den Fall, dass Sie vertiefendes Interesse besitzen, finden Sie dort jedoch Hinweise auf Fachliteratur oder Dateien, die in diesem Skript verwendet wurden. Die Excel-Dateien wurden von mir meist so erstellt, dass Sie sich per Zufallsvariablen neue Aufgaben mit Lösungswegen (die ausblendbar sind) generieren können.

Zudem finden Sie in diesem Skript auch Links zu Wikipedia. Grundsätzlich bin ich der Meinung, dass diese Quelle hilfreich ist und möchte sie Ihnen daher gerne anbieten. Jedoch möchte ich Sie bitten, sie mit einer gewissen kritischen Distanz zu betrachten und mir ggf. eine Rückmeldung zu geben, falls sich herausstellen sollte, dass sich dort Fehler befinden.

Für Rückmeldungen und ggf. Fehler-Hinweise an skript@mathe.xyz wäre ich sehr dankbar.

Ich wünsche Ihnen eine interessante Lektüre!

Mit herzlichen Grüßen
Ralf Kühnke

Inhalt

1 Elemente der beschreibenden Statistik

1.1 Grundgesamtheit, Stichprobe

Grundgesamtheit (Population)

ist die Menge aller denkbaren Beobachtungseinheiten einer Untersuchung.

endlich (alle Schülerinnen einer Schule) oder unendlich (alle Würfelwürfe)

Stichprobe

ist eine (endliche) Teilmenge der Grundgesamtheit. Hat diese Teilmenge n Elemente, so heißt sie Stichprobe vom Umfang n.

Beispiele: aus jeder Klasse eine Schülerin, 20 Würfelwürfe

[1]

1.2 Urliste, Strichliste und Häufigkeitstabelle

Urliste

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ enthält die Ausprägungen des Merkmals X in einer Stichprobe vom Umfang n in der Reihenfolge ihres Auftretens.

[2]

Strichliste und Häufigkeitstabelle

<table>
<tr><td>Merkmalswert</td><td>ledig</td><td>verheiratet</td><td>verwitwet</td><td>geschieden</td><td>LP</td><td>andere</td></tr>
<tr><td>Häufigkeit</td><td>$||||$</td><td>$\cancel{||||}\,||$</td><td>$|$</td><td>$|||$</td><td>$||$</td><td>$|$</td></tr>
<tr><td>Häufigkeit</td><td>4</td><td>7</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

[3]

[1] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 8
[2] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 10
[3] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 11

1.3 Absolute und relative Häufigkeit, Häufigkeitsverteilung

Beispiel 1 (Würfeln, $n = 12$)

Urliste: 2, 1, 2, 1, 2, 4, 6, 2, 5, 5, 2, 4

$H_{12}(1) = 2,\ H_{12}(2) = 5, \ldots$

Häufigkeitstabelle

Merkmalswert x_i	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit $H_{12}(x_i)$	2	5	0	2	2	1

Urliste

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ enthält die Ausprägungen des Merkmals X in einer Stichprobe vom Umfang n in der Reihenfolge ihres Auftretens.

$H_n(x_i)$ – **absolute** Häufigkeit des Beobachtungswertes x_i

[4]

n – Umfang der Stichprobe

Relative Häufigkeit des Wertes x_i

$$h_n(x_i) = \frac{H_n(x_i)}{n}, i = 1, \ldots, s.$$

Häufigkeits**verteilung**

Merkmalsausprägung	x_1	x_2	...	x_s
rel. Häufigkeit	$h_n(x_1)$	$h_n(x_2)$	...	$h_n(x_s)$

[5]

[4] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 10
[5] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 18

1.3.1 Beispiel: Korrektur einer Matheklausur[6]

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 30)

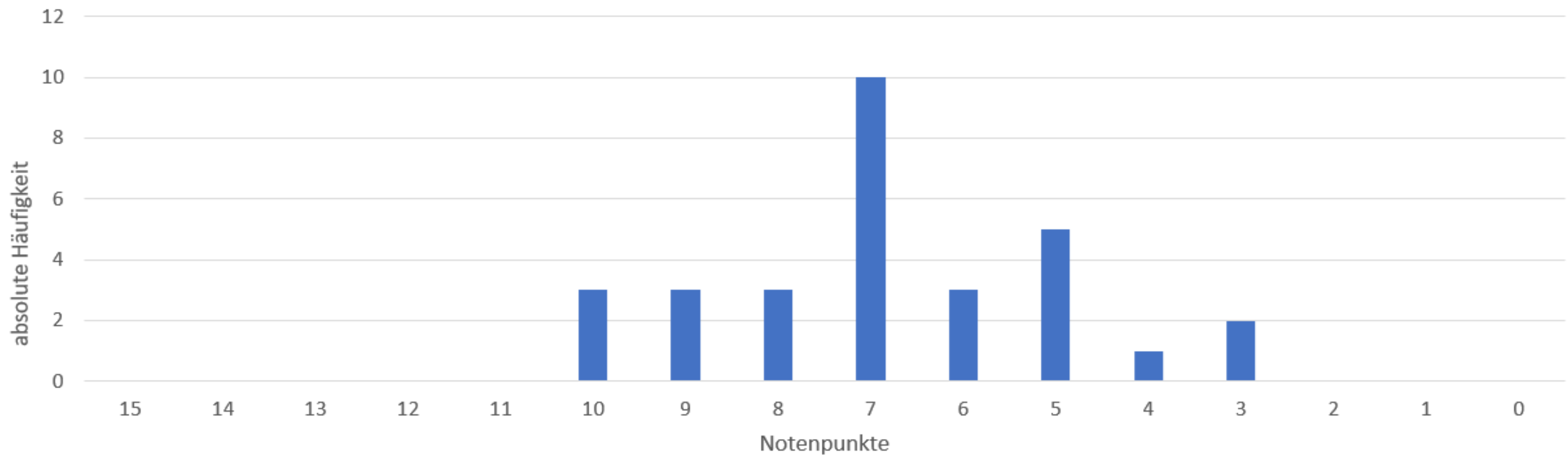
Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	7	9	4	9	8	7	5	5	7	5	5	7	8	7	10	7	6	10	10	7	6	7	7	5	9	3	3	8	7	6

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	0	0	0	3	3	3	10	3	5	1	2	0	0	0	30
relative Häufigkeit	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,333	0,1	0,167	0,033	0,067	0	0	0	1

Säulendiagramm:



[6] Siehe: Beschreibende Statistik.xlsm

Übung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit																	
relative Häufigkeit																	

Säulendiagramm:

Lösung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

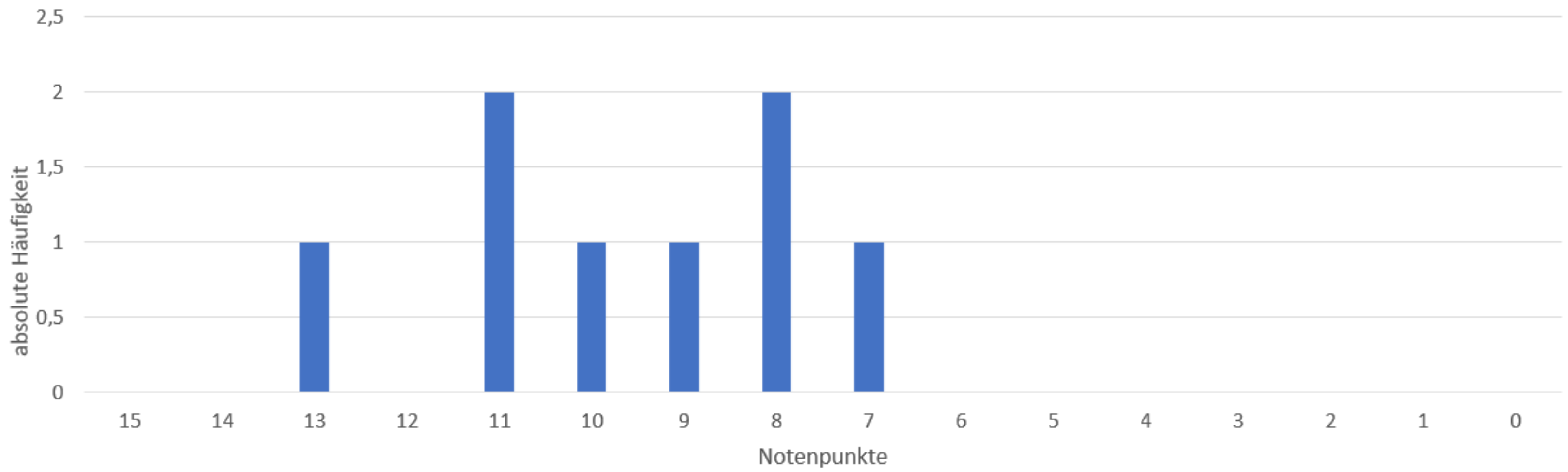
Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	1	0	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	8
relative Häufigkeit	0	0	0,125	0	0,25	0,125	0,125	0,25	0,125	0	0	0	0	0	0	0	1

Säulendiagramm:



1.4 Klasseneinteilung

Klasseneinteilung

Wertebereich der Merkmalsausprägungen wird in disjunkte Intervalle (Klassen) zerlegt und ein Element des Intervalls (meist die Klassenmitte) wird als Repräsentant der Klasse für weitere Rechnungen verwendet.

[7]

[7] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 16

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 30)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	7	9	4	9	8	7	5	5	7	5	5	7	8	7	10	7	6	10	10	7	6	7	7	5	9	3	3	8	7	6

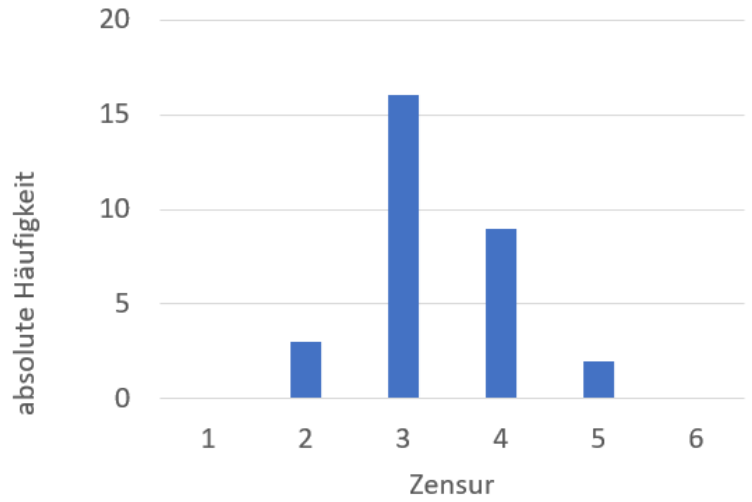
Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	0	0	0	3	3	3	10	3	5	1	2	0	0	0	30
relative Häufigkeit	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,333	0,1	0,167	0,033	0,067	0	0	0	1

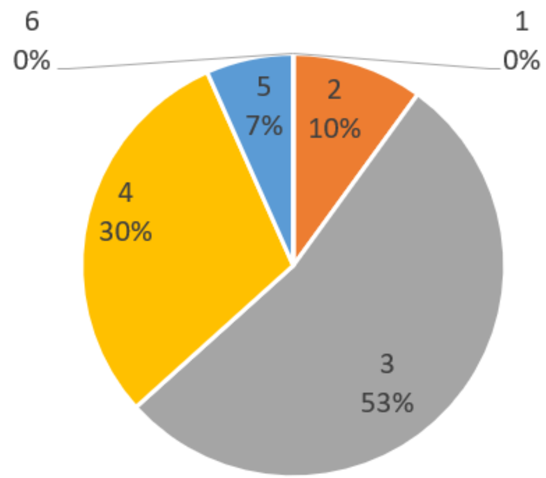
Klasseneinteilung (Zensuren): ☑ Farben anzeigen

Zensuren	1	2	3	4	5	6	Summe
absolute Häufigkeit	0	3	16	9	2	0	30
relative Häufigkeit	0	0,1	0,533	0,3	0,067	0	1

Säulendiagramm:



Kreisdiagramm:



Übung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	1	0	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	8
relative Häufigkeit	0	0	0,125	0	0,25	0,125	0,125	0,25	0,125	0	0	0	0	0	0	0	1

Klasseneinteilung (Zensuren): ☑ Farben anzeigen

Zensuren	1	2	3	4	5	6	Summe
absolute Häufigkeit							
relative Häufigkeit							

Säulendiagramm:

Kreisdiagramm:

Lösung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

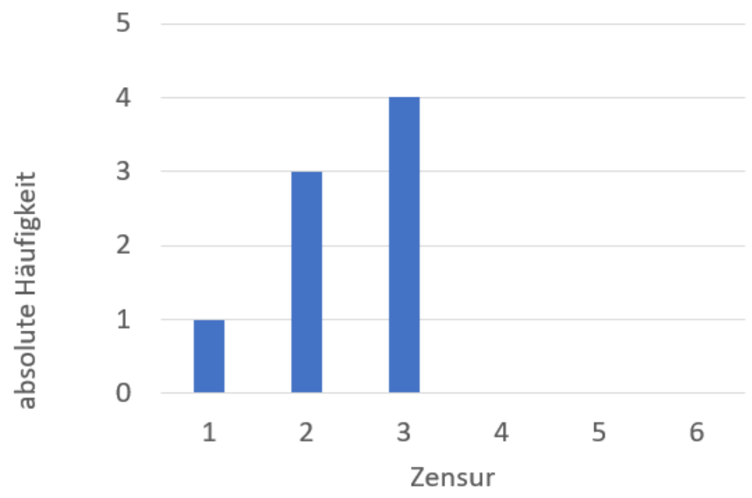
Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	1	0	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	8
relative Häufigkeit	0	0	0,125	0	0,25	0,125	0,125	0,25	0,125	0	0	0	0	0	0	0	1

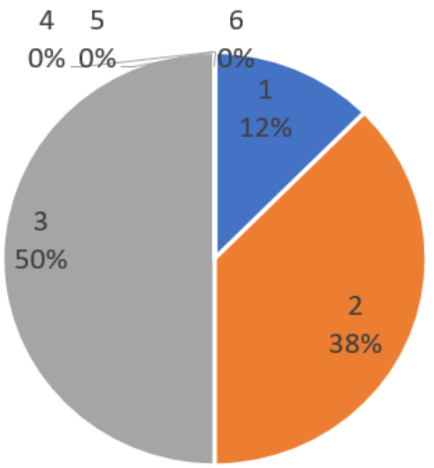
Klasseneinteilung (Zensuren): ☑ Farben anzeigen

Zensuren	1	2	3	4	5	6	Summe
absolute Häufigkeit	1	3	4	0	0	0	8
relative Häufigkeit	0,125	0,375	0,5	0	0	0	1

Säulendiagramm:



Kreisdiagramm:



Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 30)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	7	9	4	9	8	7	5	5	7	5	5	7	8	7	10	7	6	10	10	7	6	7	7	5	9	3	3	8	7	6

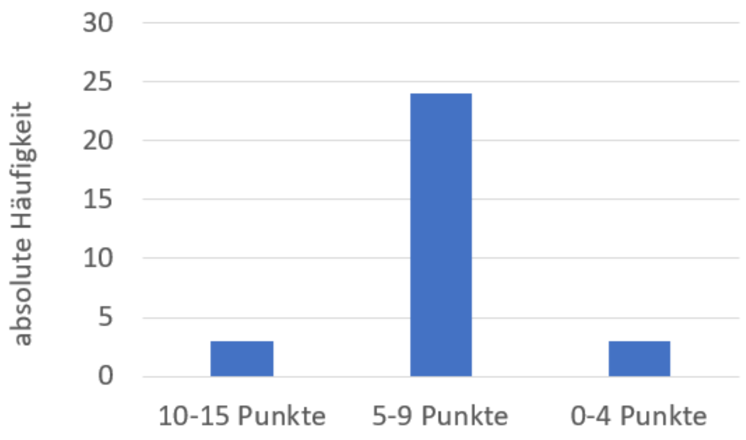
Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	0	0	0	3	3	3	10	3	5	1	2	0	0	0	30
relative Häufigkeit	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,333	0,1	0,167	0,033	0,067	0	0	0	1

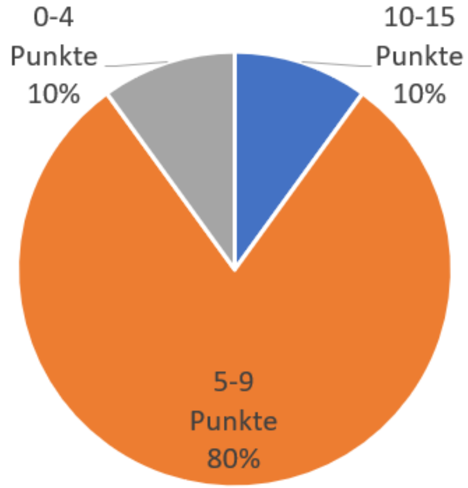
Klasseneinteilung (3 Klassen): ☑ Farben anzeigen

Klasse	10-15 Punkte	5-9 Punkte	0-4 Punkte	Summe
absolute Häufigkeit	3	24	3	30
relative Häufigkeit	0,1	0,8	0,1	1

Säulendiagramm:



Kreisdiagramm:



Übung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	1	0	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	8
relative Häufigkeit	0	0	0,125	0	0,25	0,125	0,125	0,25	0,125	0	0	0	0	0	0	0	1

Klasseneinteilung (3 Klassen): ☑ Farben anzeigen

Klasse	10-15 Punkte	5-9 Punkte	0-4 Punkte	Summe
absolute Häufigkeit				
relative Häufigkeit				

Lösung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

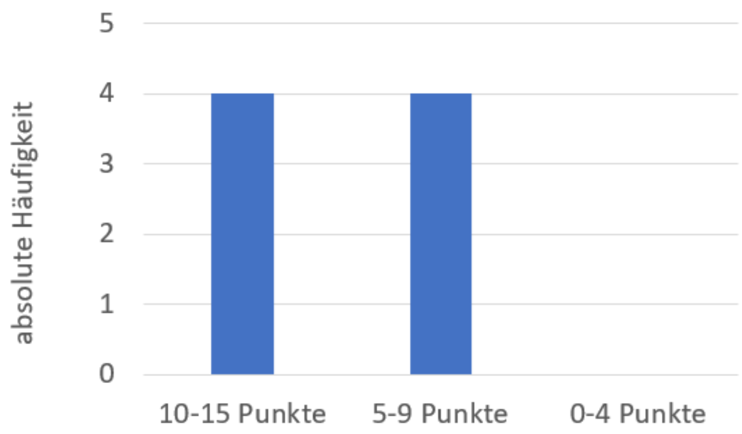
Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	1	0	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	8
relative Häufigkeit	0	0	0,125	0	0,25	0,125	0,125	0,25	0,125	0	0	0	0	0	0	0	1

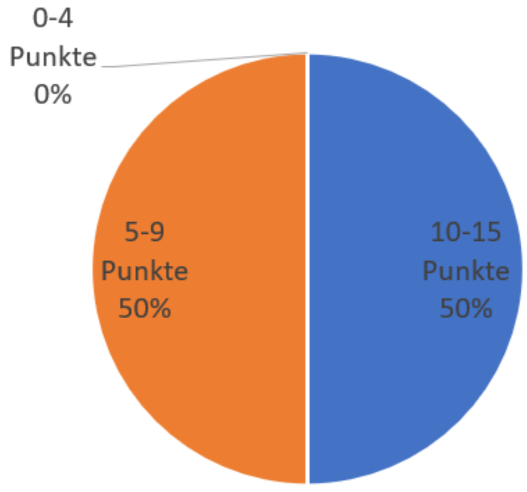
Klasseneinteilung (3 Klassen): ☑ Farben anzeigen

Klasse	10-15 Punkte	5-9 Punkte	0-4 Punkte	Summe
absolute Häufigkeit	4	4	0	8
relative Häufigkeit	0,5	0,5	0	1

Säulendiagramm:



Kreisdiagramm:



1.5 Kenngrößen von Häufigkeitsverteilungen

1.5.1 Mittelwerte

- Ziel: Lage der Verteilung auf der Achse beschreiben
- nur bei quantitativen Merkmalen möglich
- hier:
  - arithmetisches Mittel (Durchschnitt) $\bar{x}$
  - Median (Zentralwert) $x_{0,5} = x_{1/2} = \tilde{x} = z$
  - Modalwerte
  - Viertelwerte $x_{0,25} = x_{1/4}$, $x_{0,75} = x_{3/4}$

[8]

a) Arithmetisches Mittel

arithmetisches Mittel $\bar{x}$

n Beobachtungen

Merkmalsausprägung	x_1	x_2	...	x_s
Häufigkeit	$H_n(x_1)$	$H_n(x_2)$	...	$H_n(x_s)$
rel. Häufigkeit	$h_n(x_1)$	$h_n(x_2)$	...	$h_n(x_s)$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 \cdot H_n(x_1) + x_2 \cdot H_n(x_2) + \cdots + x_s \cdot H_n(x_s)}{n} \\ &= x_1 \cdot h_n(x_1) + x_2 \cdot h_n(x_2) + \cdots + x_s \cdot h_n(x_s)\end{aligned}$$

bei Klasseneinteilung: x_i – Repräsentant der Klasse

[9]

(Siehe auch: Erwartungswert einer Zufallsgröße, S. 129)

[8] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 34

[9] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 36

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 30)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	7	9	4	9	8	7	5	5	7	5	5	7	8	7	10	7	6	10	10	7	6	7	7	5	9	3	3	8	7	6

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	0	0	0	3	3	3	10	3	5	1	2	0	0	0	30
relative Häufigkeit	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,333	0,1	0,167	0,033	0,067	0	0	0	1

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 15 + 0 \cdot 14 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 11 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 10 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{30} \cong 6{,}8$$

$$= \frac{+ 3 \cdot 10 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 10 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{30} \cong 6{,}8$$

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über die *relative* Häufigkeit:

$$\bar{x} \cong 0 \cdot 15 + 0 \cdot 14 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 11 + 0{,}1 \cdot 10 + 0{,}1 \cdot 9 + 0{,}1 \cdot 8 + 0{,}333 \cdot 7 + 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}167 \cdot 5 + 0{,}033 \cdot 4 + 0{,}067 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cong 6{,}8$$

Übung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	1	0	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	8
relative Häufigkeit	0	0	0,125	0	0,25	0,125	0,125	0,25	0,125	0	0	0	0	0	0	0	1

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

$\bar{x} =$ ____

$=$ ____

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über die *relative* Häufigkeit:

$\bar{x} \cong$

Lösung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	1	0	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	8
relative Häufigkeit	0	0	0,125	0	0,25	0,125	0,125	0,25	0,125	0	0	0	0	0	0	0	1

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 15 + 0 \cdot 14 + 1 \cdot 13 + 0 \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{8} \cong 9{,}625$$

$$= \frac{+1 \cdot 13 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 7}{8} \cong 9{,}625$$

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über die *relative* Häufigkeit:

$$\bar{x} \cong 0 \cdot 15 + 0 \cdot 14 + 0{,}125 \cdot 13 + 0 \cdot 12 + 0{,}25 \cdot 11 + 0{,}125 \cdot 10 + 0{,}125 \cdot 9 + 0{,}25 \cdot 8 + 0{,}125 \cdot 7 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cong 9{,}625$$

b) Modalwert

Modalwert
ist der Beobachtungswert mit der größten relativen Häufigkeit. Es kann mehrere Modalwerte geben. [10]

[10] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 38

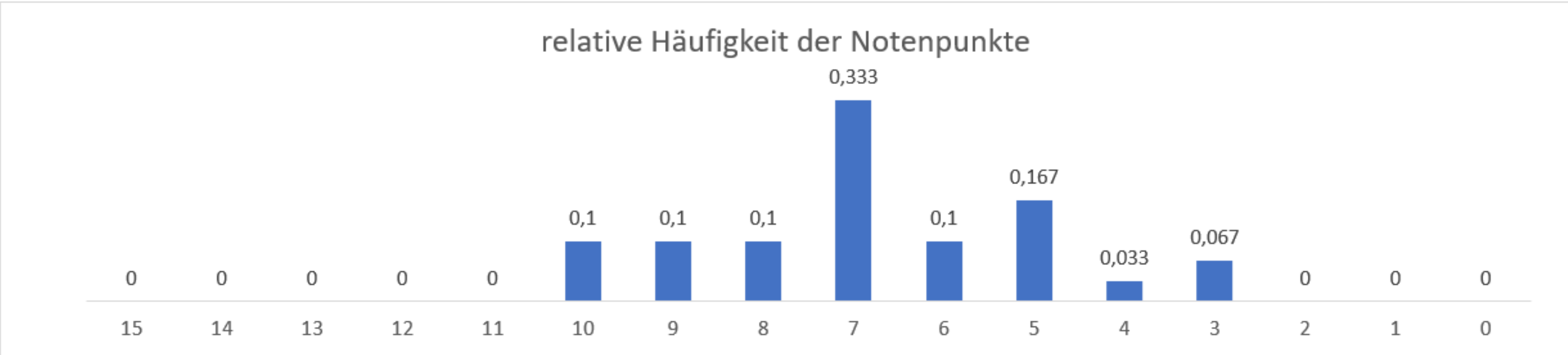
Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 30)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	7	9	4	9	8	7	5	5	7	5	5	7	8	7	10	7	6	10	10	7	6	7	7	5	9	3	3	8	7	6

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	0	0	0	3	3	3	10	3	5	1	2	0	0	0	30
relative Häufigkeit	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,333	0,1	0,167	0,033	0,067	0	0	0	1



Modalwert(e): 7 (Werte mit der größten relativen Häufigkeit)

Übung:

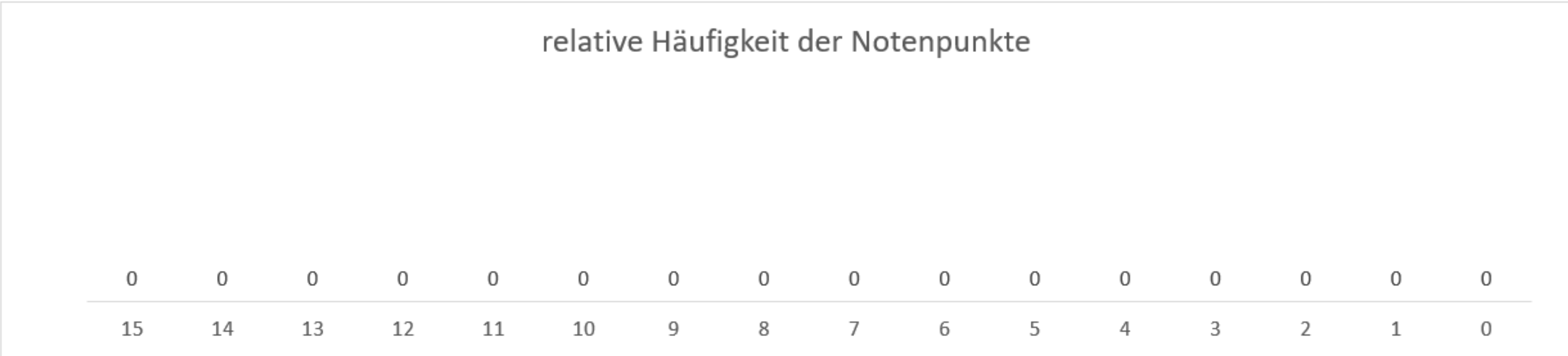
Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit																	
relative Häufigkeit																	



Modalwert(e): (Werte mit der größten relativen Häufigkeit)

Lösung:

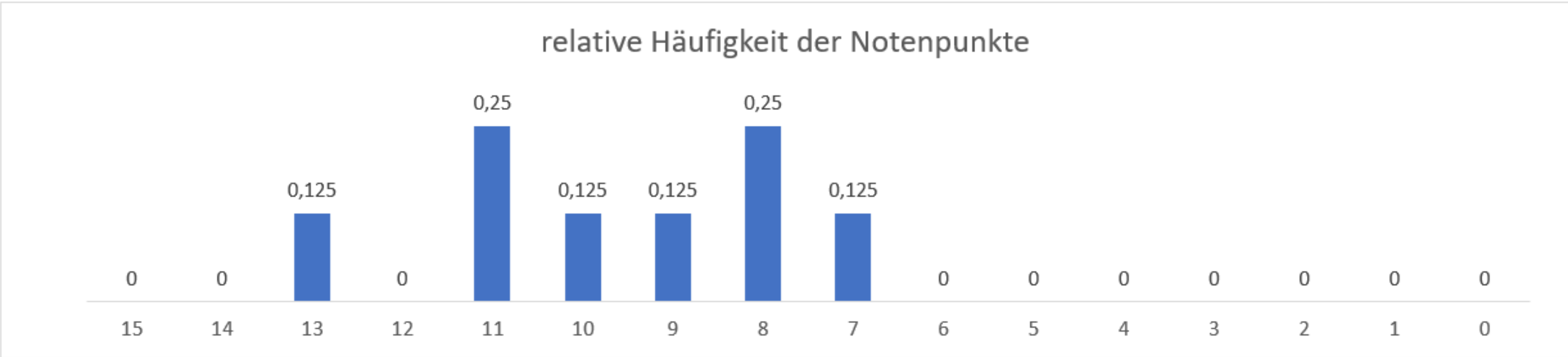
Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	1	0	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	8
relative Häufigkeit	0	0	0,125	0	0,25	0,125	0,125	0,25	0,125	0	0	0	0	0	0	0	1



Modalwert(e): 8 (Werte mit der größten relativen Häufigkeit)
11

c) Median und Viertelwerte

Median $x_{1/2}$

ist der Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.

- Für $n = 2k + 1$ Daten ist $x_{1/2}$ gleich dem $(k+1)$-ten Wert in dieser geordneten Reihe.
- Für $n = 2k$ Daten ist $x_{1/2}$ gleich dem arithmetischen Mittel aus dem k-ten und dem $(k+1)$-ten Wert.

[11]

Viertelwerte $x_{1/4}$ und $x_{3/4}$

Durch $x_{1/2}$ wird die geordnete Datenreihe in eine „untere“ und eine „obere“ Hälfte geteilt.
Der untere Viertelwert $x_{1/4}$ ist der Median der „unteren“ Hälfte, der obere Viertelwert $x_{3/4}$ ist der Median der „oberen“ Hälfte.

[12]

[11] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 41
[12] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 44

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 29)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Notenpunkte	7	9	4	9	8	7	5	5	7	5	5	7	8	7	10	7	6	10	10	7	6	7	7	5	9	3	3	8	7

Der Große nach geordnet:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Notenpunkte	3	3	4	5	5	5	5	5	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10

Median (Lage): x
Untermedian (Lage):
Obermedian (Lage):

untere Hälfte:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14															
Notenpunkte	3	3	4	5	5	5	5	5	6	6	7	7	7	7															

obere Hälfte:

Nummer der Klausur																16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Notenpunkte																7	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10

Median $x_{1/2}$: 7 (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.)

Viertelwert $x_{1/4}$: 5 (Median der unteren Hälfte) 25%-Quartil: 5

Viertelwert $x_{3/4}$: 8 (Median der oberen Hälfte) 75%-Quartil: 8

Übung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Der Große nach geordnet:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte								

Median (Lage):
Untermedian (Lage):
Obermedian (Lage):

untere Hälfte:

Nummer der Klausur								
Notenpunkte								

obere Hälfte:

Nummer der Klausur								
Notenpunkte								

Median $x_{1/2}$: (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.)
Viertelwert $x_{1/4}$: (Median der unteren Hälfte)
Viertelwert $x_{3/4}$: (Median der oberen Hälfte)

Lösung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Der Große nach geordnet:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	7	8	8	9	10	11	11	13

Median (Lage):
Untermedian (Lage): x
Obermedian (Lage): x

untere Hälfte:

Nummer der Klausur	1	2	3	4				
Notenpunkte	7	8	8	9				

obere Hälfte:

Nummer der Klausur					5	6	7	8
Notenpunkte					10	11	11	13

Median $x_{1/2}$: 9,5 (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.)
Viertelwert $x_{1/4}$: 8 (Median der unteren Hälfte) 25%-Quartil: 8
Viertelwert $x_{3/4}$: 11 (Median der oberen Hälfte) 75%-Quartil: 11

1.6 Streuungsmaße

1.6.1 Spannweite und Halbweite

Spannweite d
ist die Differenz aus dem größten und dem kleinsten Beobachtungswert

$$d = x_{\max} - x_{\min}$$

Halbweite H
ist die Differenz der beiden Viertelwerte

$$H = x_{3/4} - x_{1/4},$$

also die Länge des Intervalls $[x_{1/4}; x_{3/4}]$.[13]

[13] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 47

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 30)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	7	9	4	9	8	7	5	5	7	5	5	7	8	7	10	7	6	10	10	7	6	7	7	5	9	3	3	8	7	6

Der Große nach geordnet:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	3	3	4	5	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10

Median $x_{1/2}$: 7 (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.)

Viertelwert $x_{1/4}$: 5 (Median der unteren Hälfte)

Viertelwert $x_{3/4}$: 8 (Median der oberen Hälfte)

Minimalwert x_{min}: 3

Maximalwert x_{max}: 10

Spannweite d: $d = x_{max} - x_{min} =$ 7

Halbweite H: $H = x_{3/4} - x_{1/4} =$ 3

Übung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Der Große nach geordnet:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	7	8	8	9	10	11	11	13

Median $x_{1/2}$: (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.)

Viertelwert $x_{1/4}$: (Median der unteren Hälfte)

Viertelwert $x_{3/4}$: (Median der oberen Hälfte)

Minimalwert x_{min}:

Maximalwert x_{max}:

Spannweite d: $d = x_{max} - x_{min} =$

Halbweite H: $H = x_{3/4} - x_{1/4} =$

Lösung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13

Der Große nach geordnet:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	7	8	8	9	10	11	11	13

Median $x_{1/2}$: 9,5 (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.)

Viertelwert $x_{1/4}$: 8 (Median der unteren Hälfte)

Viertelwert $x_{3/4}$: 11 (Median der oberen Hälfte)

Minimalwert x_{min}: 7

Maximalwert x_{max}: 13

Spannweite d: $d = x_{max} - x_{min} =$ 6

Halbweite H: $H = x_{3/4} - x_{1/4} =$ 3

1.6.2 Boxplot

Median $x_{1/2}$: 7 (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.)

Viertelwert $x_{1/4}$: 5 (Median der unteren Hälfte)

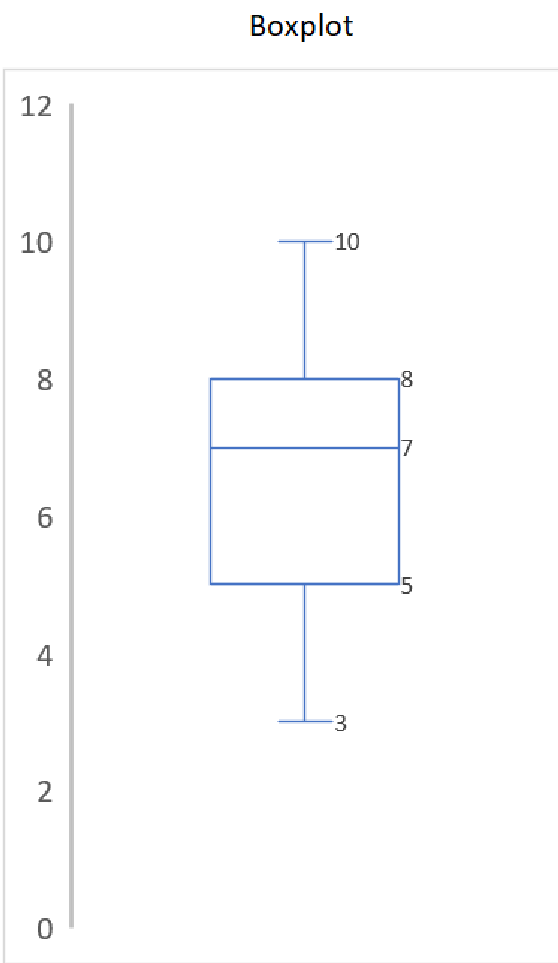
Viertelwert $x_{3/4}$: 8 (Median der oberen Hälfte)

Minimalwert x_{min}: 3

Maximalwert x_{max}: 10

Spannweite d: $d = x_{max} - x_{min} = 7$

Halbweite H: $H = x_{3/4} - x_{1/4} = 3$



Übung:

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13	6	8	9	8	6	6	15	8	15	15	5	9	11	8	7	9	6	14	11	8	11	7

Der Große nach geordnet:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	10	11	11	11	11	11	13	14	15	15	15

Median $x_{1/2}$: (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.)

Viertelwert $x_{1/4}$: (Median der unteren Hälfte)

Viertelwert $x_{3/4}$: (Median der oberen Hälfte)

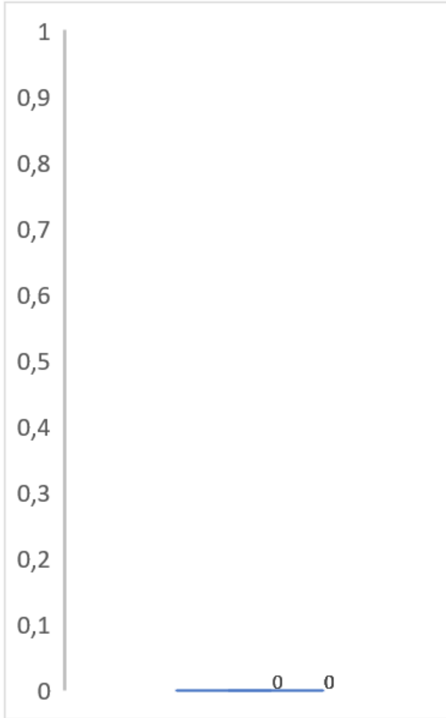
Minimalwert x_{min}:

Maximalwert x_{max}:

Spannweite d:

Halbweite H:

Boxplot



Lösung:

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	9	8	7	10	8	11	11	13	6	8	9	8	6	6	15	8	15	15	5	9	11	8	7	9	6	14	11	8	11	7

Der Große nach geordnet:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	10	11	11	11	11	11	13	14	15	15	15

Median $x_{1/2}$: 8,5 (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert.)

Viertelwert $x_{1/4}$: 7 (Median der unteren Hälfte)

Viertelwert $x_{3/4}$: 11 (Median der oberen Hälfte)

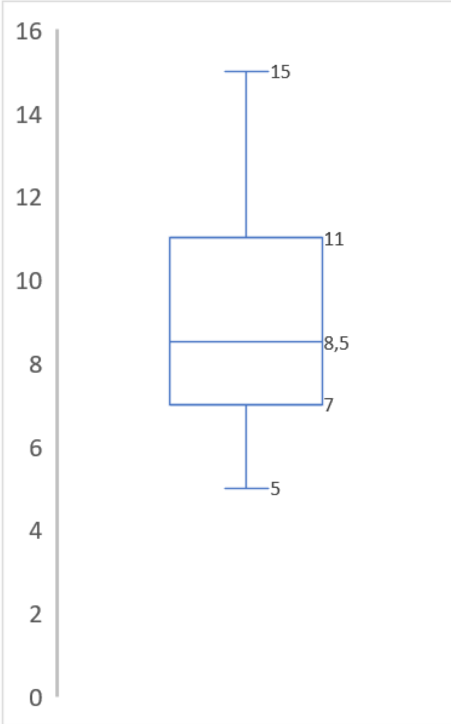
Minimalwert x_{min}: 5

Maximalwert x_{max}: 15

Spannweite d: $d = x_{max} - x_{min} =$ 10

Halbweite H: $H = x_{3/4} - x_{1/4} =$ 4

Boxplot



1.7 Streuung und Standardabweichung *)

empirische Streuung s^2 und Standardabweichung s

n Beobachtungen, arithmetisches Mittel $\bar{x}$

Merkmalsausprägung	x_1	x_2	$\dots$	x_r
Häufigkeit	$H_n(x_1)$	$H_n(x_2)$	$\dots$	$H_n(x_r)$
rel. Häufigkeit	$h_n(x_1)$	$h_n(x_2)$	$\dots$	$h_n(x_r)$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(x_1-\bar{x})^2 \cdot H_n(x_1) + (x_2-\bar{x})^2 \cdot H_n(x_2) + \cdots + (x_r-\bar{x})^2 \cdot H_n(x_r)}{n} \\ &= (x_1-\bar{x})^2 \cdot h_n(x_1) + (x_2-\bar{x})^2 \cdot h_n(x_2) + \cdots + (x_r-\bar{x})^2 \cdot h_n(x_r) \end{aligned}$$

s^2 ist die mittlere quadratische Abweichung vom arithmetischen Mittel.

Die Wurzel aus s^2 heißt Standardabweichung s.

[14]

[14] Aus: Warmuth, E.: 8.1. Auswertung statistischer Daten, 2019/2020, S. 54

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 30)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Notenpunkte	7	9	4	9	8	7	5	5	7	5	5	7	8	7	10	7	6	10	10	7	6	7	7	5	9	3	3	8	7	6

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	0	0	0	3	3	3	10	3	5	1	2	0	0	0	30
relative Häufigkeit	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,333	0,1	0,167	0,033	0,067	0	0	0	1

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

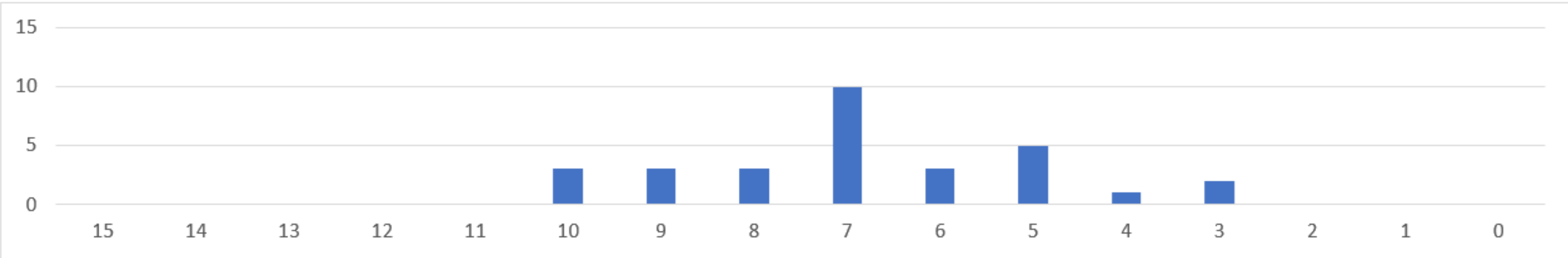
$$\bar{x} = \frac{+\,3 \cdot 10 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 10 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{30} \cong 6{,}8$$

Empirische Streuung s^2 - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

$$s^2 \cong \frac{+\,(10-6{,}8)^2 \cdot 3 + (9-6{,}8)^2 \cdot 3 + (8-6{,}8)^2 \cdot 3 + (7-6{,}8)^2 \cdot 10 + (6-6{,}8)^2 \cdot 3 + (5-6{,}8)^2 \cdot 5 + (4-6{,}8)^2 \cdot 1 + (3-6{,}8)^2 \cdot 2}{30} \cong 3{,}493$$

Standardabweichung s :

$$s \cong \sqrt{s^2} \cong \quad 1{,}869$$



Übung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	12	13	8	7	8	10	2	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	2	1	0	1	0	2	1	0	0	0	0	1	0	0	8
relative Häufigkeit																	1

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

$\bar{x} =$ ______________________________ $\cong$

Empirische Streuung s^2 - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

$s^2 \cong$ ______________________________ $\cong$

Standardabweichung s :

$s \cong \sqrt{s^2} \cong$

Lösung:

Beispiel: Korrektur Matheklausur in der Oberstufe (Anzahl der Klausuren: 8)

Urliste:

Nummer der Klausur	1	2	3	4	5	6	7	8
Notenpunkte	12	13	8	7	8	10	2	13

Häufigkeitstabelle:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Summe
absolute Häufigkeit	0	0	2	1	0	1	0	2	1	0	0	0	0	1	0	0	8
relative Häufigkeit	0	0	0,25	0,125	0	0,125	0	0,25	0,125	0	0	0	0	0,125	0	0	1

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

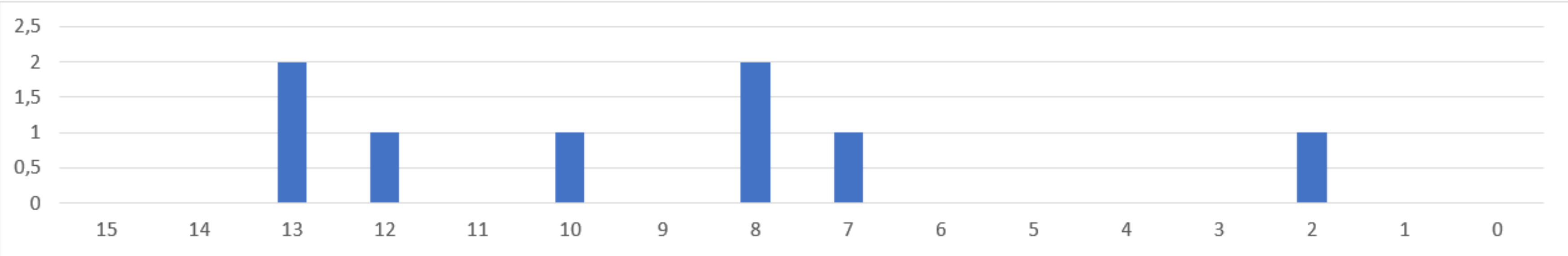
$$\bar{x} = \frac{+\,2 \cdot 13 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 2}{8} \cong 9{,}125$$

Empirische Streuung s^2 - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

$$s^2 \cong \frac{+\,(13 - 9{,}125)^2 \cdot 2 + (12 - 9{,}125)^2 \cdot 1 + (10 - 9{,}125)^2 \cdot 1 + (8 - 9{,}125)^2 \cdot 2 + (7 - 9{,}125)^2 \cdot 1 + (2 - 9{,}125)^2 \cdot 1}{8} \cong 12{,}11$$

Standardabweichung s :

$$s \cong \sqrt{s^2} \cong 3{,}48$$



2 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

2.1 Vorgang mit zufälligem Ergebnis

Vorgang mit zufälligem Ergebnis
ist ein Vorgang, bei dem es im Allgemeinen mehrere mögliche Ergebnisse gibt und bei dem vor Ablauf das Ergebnis nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann.

Beispiele 1

1. Würfelwurf, Augenzahl
2. Geburten, Geschlecht des nächsten Babys
3. Fußballspiel, Ausgang des nächsten BL-Spiels von Hertha BSC
4. Ziehung 6 aus 49, Gewinnzahlen

[15]

2.2 Ergebnismenge

Ergebnismenge
Alle möglichen Ergebnisse bilden die Ergebnismenge Ω. Ω ist eine nichtleere Menge.

[16]

---

[15] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 3
[16] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 4

2.2.1 Beschreibung des Zufallsexperiments

Um die Ergebnismenge Ω festlegen zu können, muss das Zufallsexperiment beschrieben und das Beobachtungskriterium festgelegt werden.

Beispiel 1:

Gefäß mit Kugeln: 6 Stück

3

1

1

4

3

4

☐ Farben ausschreiben

3 Varianten zur Festlegung des Zufallsexperiments (bzw. der Ergebnismenge Ω)

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   Ω = {rot, grün, blau, gelb, grau}

   |Ω| = 5

2. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Zahl

   Ω = {1, 3, 4}

   |Ω| = 3

3. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe und Zahl

   Ω = {(rot, 4), (grün, 3), (blau, 1), (gelb, 1), (grau, 3), (grau, 4)}

   |Ω| = 6

Beispiel 2:

Gefäß mit Kugeln: 49 Stück

2	1	6	9	3	5	2
10	10	7	5	8	3	5
2	1	4	4	4	10	10
2	5	3	6	2	9	1
9	7	8	4	5	4	3
8	6	7	2	1	5	2
6	10	4	6	6	8	5

☐ Farben ausschreiben

3 Varianten zur Festlegung des Zufallsexperiments (bzw. der Ergebnismenge Ω)

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   Ω = {rot, grün, blau, gelb, grau}

   $|\Omega| = 5$

2. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Zahl

   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

   $|\Omega| = 10$

3. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe und Zahl

   Ω = {(rot, 1), (rot, 5), (rot, 6), (rot, 8), (rot, 10), (grün, 1), (grün, 2), (grün, 3), (grün, 4), (grün, 5), (grün, 7), (grün, 8), (grün, 9), (blau, 1), (blau, 3), (blau, 4), (blau, 5), (blau, 6), (blau, 10), (gelb, 2), (gelb, 4), (gelb, 5), (gelb, 6), (gelb, 7), (gelb, 8), (gelb, 9), (gelb, 10), (grau, 2), (grau, 4), (grau, 5), (grau, 6), (grau, 7), (grau, 10)}

   $|\Omega| = 33$

2.2.2 Ergebnisse und Ereignisse

Unterschied zwischen Ergebnissen und Ereignissen:

Ein *Ergebnis* ist *ein Element* der Ergebnismenge.

Ein *Ereignis* ist eine *Teilmenge* der Ergebnismenge.

(Einelementige Ereignisse werden als *Elementarereignisse* (=Ergebnisse) bezeichnet.)

Beispiel 1:

Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

Ω = {rot, grün, blau, gelb, grau}

$|\Omega| = 5$

Der Satz „Es wird eine rote Kugel gezogen." deutet hier auf ein *Ergebnis* hin, weil „rot" *ein Element* der Ergebnismenge ist.

Beispiel 2:

Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe und Zahl

Ω = {(rot, 1), (rot, 5), (rot, 6), (rot, 8), (rot, 10), (grün, 1), (grün, 2), (grün, 3), (grün, 4), (grün, 5), (grün, 7), (grün, 8), (grün, 9), (blau, 1), (blau, 3), (blau, 4), (blau, 5), (blau, 6), (blau, 10), (gelb, 2), (gelb, 4), (gelb, 5), (gelb, 6), (gelb, 7), (gelb, 8), (gelb, 9), (gelb, 10), (grau, 2), (grau, 4), (grau, 5), (grau, 6), (grau, 7), (grau, 10)}

Der Satz „Es wird eine rote Kugel gezogen." deutet hier auf ein *Ereignis* hin, weil „rot" auf *mehrere Elemente* der Ergebnismenge zutrifft.

Die Menge {(rot, 1), (rot, 5), (rot, 6), (rot, 8), (rot, 10)} ist eine Teilmenge von Ω.

2.2.3 Unmögliches und sicheres Ereignis

Die leere Menge $\varnothing$ heißt das *unmögliche* und die Ergebnismenge Ω das *sichere* Ereignis.

Das unmögliche Ereignis tritt *nie* ein. Das sichere Ereignis tritt *immer* ein.

Beispiel:

Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe und Zahl

Ω = {(rot, 1), (rot, 5), (rot, 6), (rot, 8), (rot, 10), (grün, 1), (grün, 2), (grün, 3), (grün, 4), (grün, 5), (grün, 7), (grün, 8), (grün, 9), (blau, 1), (blau, 3), (blau, 4), (blau, 5), (blau, 6), (blau, 10), (gelb, 2), (gelb, 4), (gelb, 5), (gelb, 6), (gelb, 7), (gelb, 8), (gelb, 9), (gelb, 10), (grau, 2), (grau, 4), (grau, 5), (grau, 6), (grau, 7), (grau, 10)}

„Es wird eine rote Zwei gezogen." beschreibt ein *unmögliches* Ereignis.

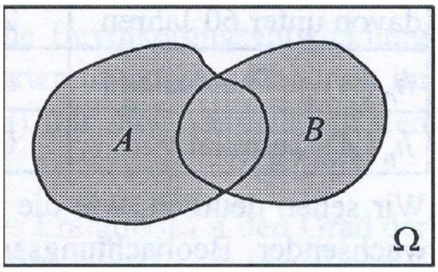
„Es wird entweder eine rote, grüne, blaue, gelbe oder graue Kugel gezogen." beschreibt das *sichere* Ereignis.

2.2.4 Operationen mit Ereignissen

a) Vereinigung[17]

$A \cup B$ tritt ein genau dann, wenn A oder B oder beide eintreten

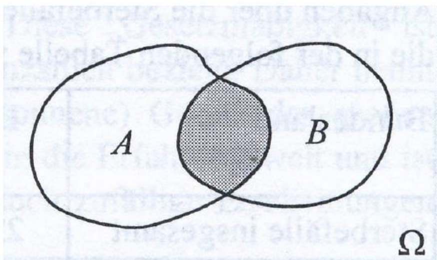
$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ oder } \omega \in B\}$



b) Durchschnitt

$A \cap B$ tritt genau dann ein, wenn sowohl A als auch B eintritt

$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ und } \omega \in B\}$

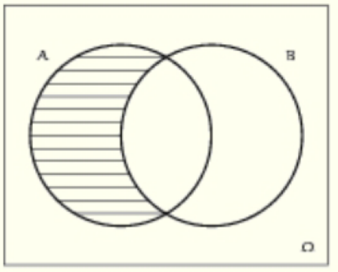


[17] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 24f

c) Differenzmenge

$A \setminus B$ tritt genau dann ein, wenn A eintritt und B nicht eintritt

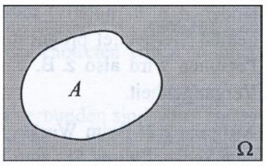
$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ und } \omega \notin B\}$



d) Gegenereignis

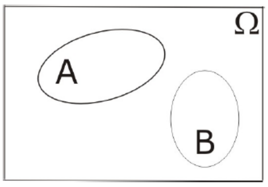
$\bar{A}$ tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt

$\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$



e) Ereignisse unvereinbar (disjunkt)

A und B heißen *unvereinbar (disjunkt)*, wenn $A \cap B = \emptyset$



2.3 Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit gibt den Grad der Möglichkeit des Eintretens bzw. der Voraussagbarkeit eines Ereignisses an. Wahrscheinlichkeiten sind Zahlen zwischen 0 und 1, wobei 0 und 1 zulässige Werte sind. Einem unmöglichen Ereignis wird die Wahrscheinlichkeit 0 zugewiesen, einem sicheren Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1. [18]

2.3.1 Empirisches Gesetz der großen Zahlen

> **Empirisches Gesetz der großen Zahlen**
>
> Die Erfahrung zeigt: Nach einer großen Zahl von Versuchen ändert sich die relative Häufigkeit $h_n(A)$ eines Ereignisses A durch weitere Versuche in der Regel nur noch wenig.
>
> ...
>
> Die relative Häufigkeit $h_n(A)$ nach einer großen Zahl von Beobachtungen dient als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A in einem Modell.

[19]

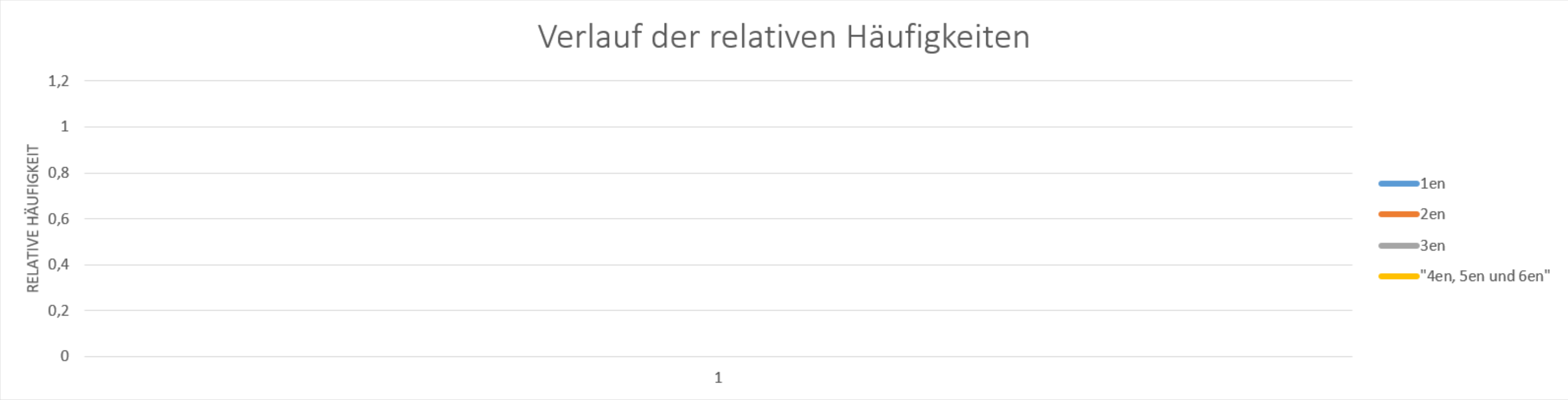
[18] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Wahrscheinlichkeit#Stochastik

[19] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 41

Beispiel 1: Ein Würfel wird 1-mal geworfen. [20]

- Das Ergebnis ist eine 1.
- Die *absolute* Häufigkeit der gewürftelten 1en ist gleich 1: $H_n(1) = 1$
- Die *relative* Häufigkeit der gewürftelten 1en ist gleich 1: $h_n(1) = 1$

Anzahl der Würfe: n = 1 (Klick hier: Diese Zeile unten anzeigen!)



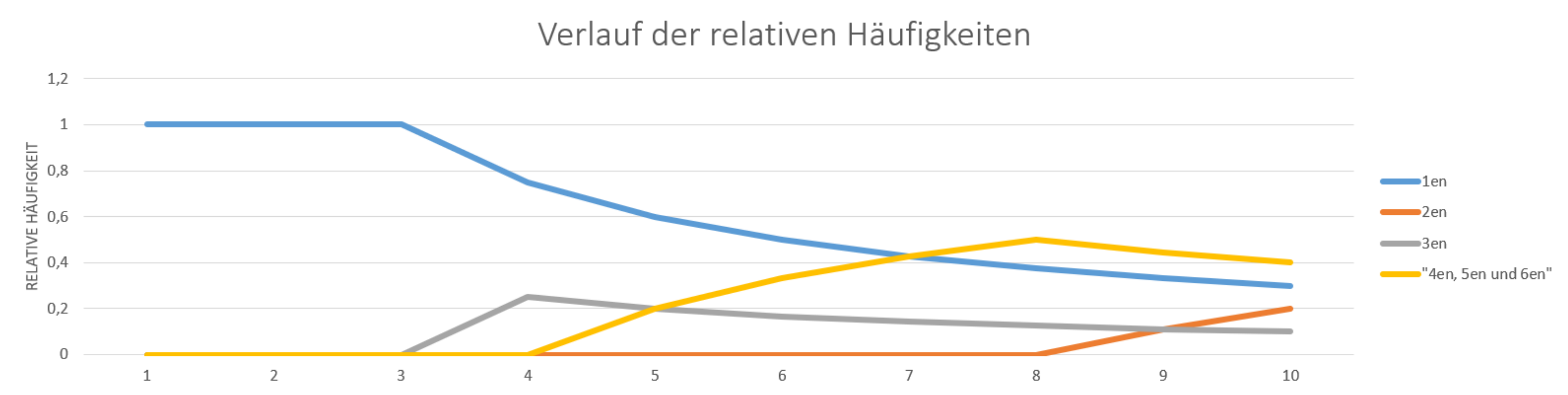
n	Würfel-ergebnis	$H_n(1)$	$h_n(1)$	$H_n(2)$	$h_n(2)$	$H_n(3)$	$h_n(3)$	$H_n(4,5,6)$	$h_n(4,5,6)$	$\sum_{i=1}^{6} H_n(i)$	$\sum_{i=1}^{6} h_n(i)$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

[20] Siehe: Empirisches Gesetz der großen Zahlen.xlsm

Beispiel 2: Ein Würfel wird 10-mal geworfen.

- Die Ergebnisse sind: 1, 1, 1, 3, 5, 6, 6, 6, 2 und 2
- Die *absolute* Häufigkeit der gewürfelten 1en ist gleich 3: $H_n(1) = 3$
- Die *relative* Häufigkeit der gewürfelten 1en ist gleich 0,3: $h_n(1) = 0,3$

Anzahl der Würfe: n = 10 (Klick hier: Diese Zeile unten anzeigen!)

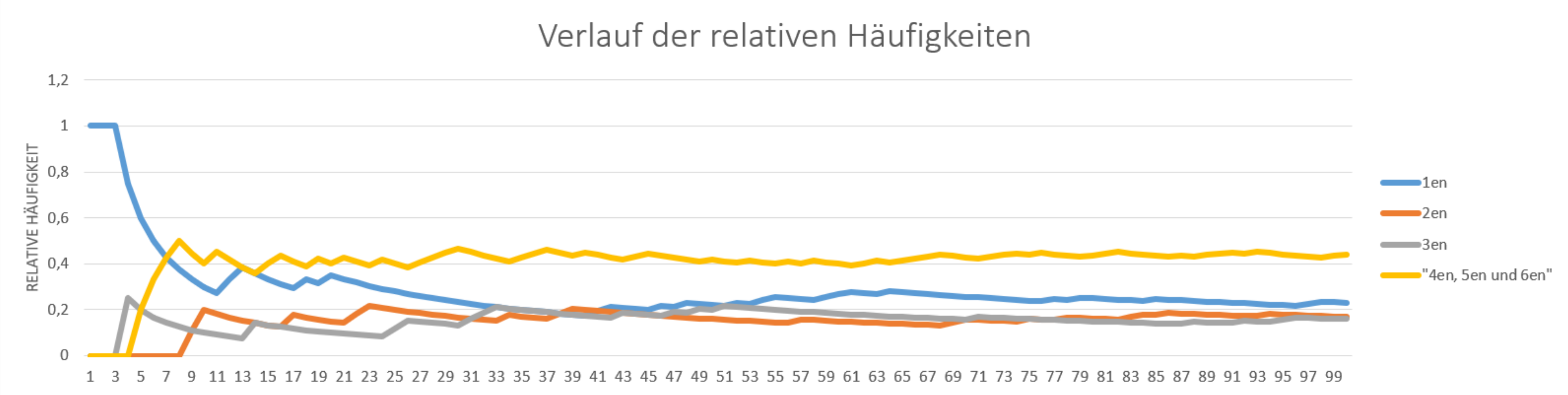


n	Würfel-ergebnis	$H_n(1)$	$h_n(1)$	$H_n(2)$	$h_n(2)$	$H_n(3)$	$h_n(3)$	$H_n(4,5,6)$	$h_n(4,5,6)$	$\sum_{i=1}^{6} H_n(i)$	$\sum_{i=1}^{6} h_n(i)$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	2	1
3	1	3	1	0	0	0	0	0	0	3	1
4	3	3	0,75	0	0	1	0,25	0	0	4	1
5	5	3	0,6	0	0	1	0,2	1	0,2	5	1
6	6	3	0,5	0	0	1	0,1667	2	0,3333	6	1
7	6	3	0,4286	0	0	1	0,1429	3	0,4286	7	1
8	6	3	0,375	0	0	1	0,125	4	0,5	8	1
9	2	3	0,3333	1	0,1111	1	0,1111	4	0,4444	9	1
10	2	3	0,3	2	0,2	1	0,1	4	0,4	10	1

Beispiel 2: Ein Würfel wird 100-mal geworfen.

- Die Ergebnisse sind: 1, 1, 1, 3, 5, 6, 6, 6, 2, 2, ... , 2, 3, 3, 1, 1, 6 und 5
- Die *absolute* Häufigkeit der gewürftelten 1en ist gleich 23: $H_n(1) = 23$
- Die *relative* Häufigkeit der gewürftelten 1en ist gleich 0,23: $h_n(1) = 0,23$

Anzahl der Würfe: n = 100 (Klick hier: Diese Zeile unten anzeigen!)

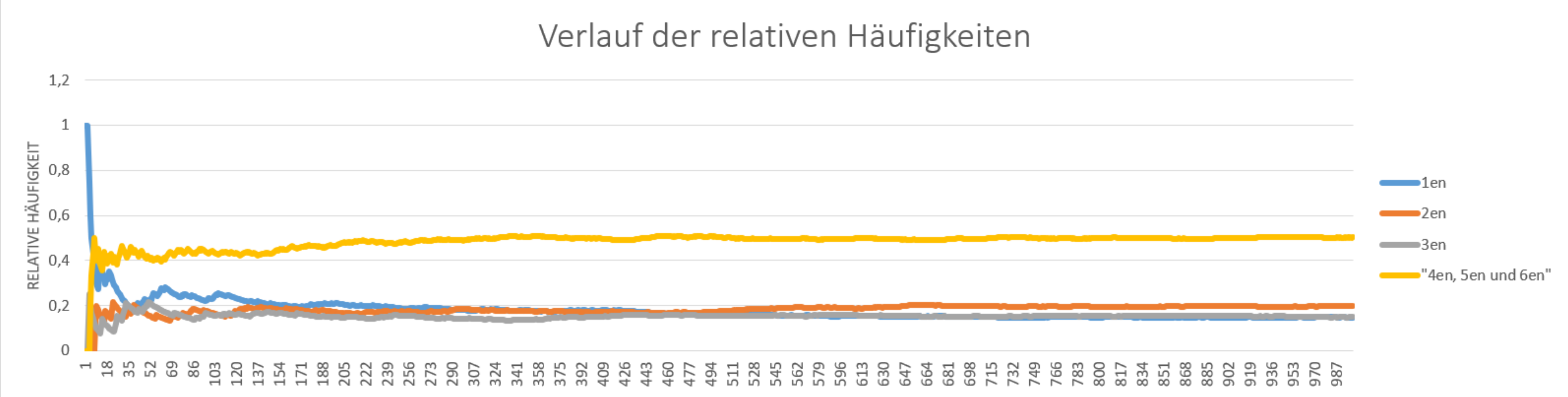


n	Würfel-ergebnis	$H_n(1)$	$h_n(1)$	$H_n(2)$	$h_n(2)$	$H_n(3)$	$h_n(3)$	$H_n(4,5,6)$	$h_n(4,5,6)$	$\sum_{i=1}^{6} H_n(i)$	$\sum_{i=1}^{6} h_n(i)$
94	2	21	0,2234	17	0,1809	14	0,1489	42	0,4468	94	1
95	3	21	0,2211	17	0,1789	15	0,1579	42	0,4421	95	1
96	3	21	0,2188	17	0,1771	16	0,1667	42	0,4375	96	1
97	1	22	0,2268	17	0,1753	16	0,1649	42	0,433	97	1
98	1	23	0,2347	17	0,1735	16	0,1633	42	0,4286	98	1
99	6	23	0,2323	17	0,1717	16	0,1616	43	0,4343	99	1
100	5	23	0,23	17	0,17	16	0,16	44	0,44	100	1

Beispiel 4: Ein Würfel wird 1.000-mal geworfen.

- Die Ergebnisse sind: 1, 1, 1, 3, 5, 6, 6, 6, 2, 2, … , 2, 3, 3, 1, 1, 6, 5, … , 6, 2, 6, 3, 4, 2, und 4
- Die *absolute* Häufigkeit der gewürftelten 1en ist gleich 148: $H_n(1) = 148$
- Die *relative* Häufigkeit der gewürftelten 1en ist gleich 0,23: $h_n(1) = 0{,}148$

Anzahl der Würfe: n = 1000 (Klick hier: Diese Zeile unten anzeigen!)

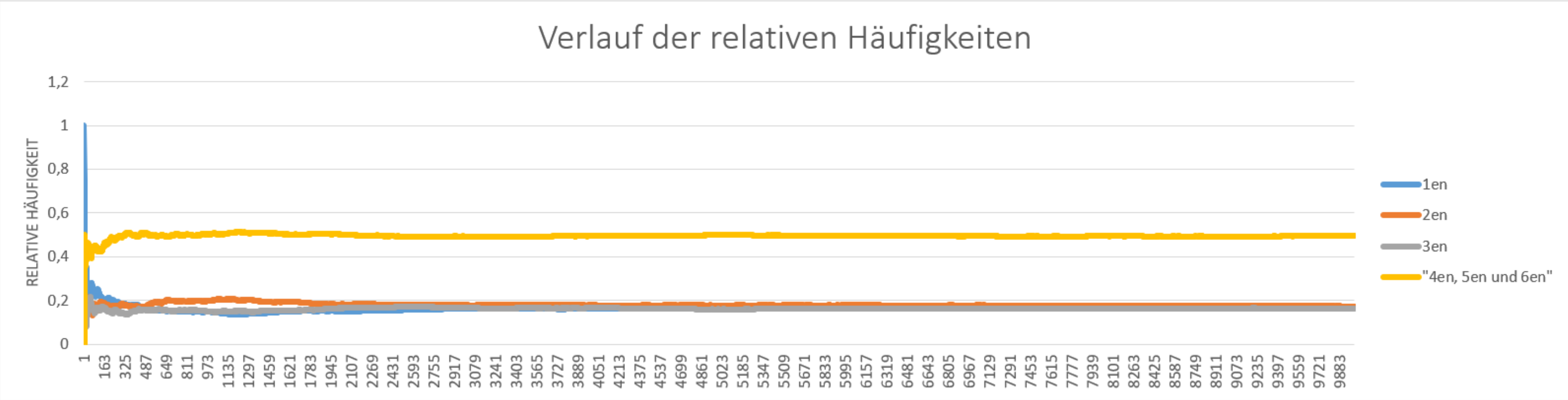


n	Würfel-ergebnis	$H_n(1)$	$h_n(1)$	$H_n(2)$	$h_n(2)$	$H_n(3)$	$h_n(3)$	$H_n(4,5,6)$	$h_n(4,5,6)$	$\sum_{i=1}^{6} H_n(i)$	$\sum_{i=1}^{6} h_n(i)$
994	6	148	0,1489	198	0,1992	148	0,1489	500	0,503	994	1
995	2	148	0,1487	199	0,2	148	0,1487	500	0,5025	995	1
996	6	148	0,1486	199	0,1998	148	0,1486	501	0,503	996	1
997	3	148	0,1484	199	0,1996	149	0,1494	501	0,5025	997	1
998	4	148	0,1483	199	0,1994	149	0,1493	502	0,503	998	1
999	2	148	0,1481	200	0,2002	149	0,1491	502	0,5025	999	1
1000	4	148	0,148	200	0,2	149	0,149	503	0,503	1000	1

Beispiel 5: Ein Würfel wird 10.000-mal geworfen.

- Die Ergebnisse sind: 1, 1, 1, 3, 5, 6, 6, 6, 2, 2, ... , 2, 3, 3, 1, 1, 6, 5, ... , 6, 2, 6, 3, 4, 2, 4, ... ,3, 3, 4, 4, 6, 3 und 2
- Die *absolute* Häufigkeit der gewürftelten 1en ist gleich 1667: $H_n(1) = 1667$
- Die *relative* Häufigkeit der gewürftelten 1en ist gleich 0,1667: $h_n(1) = 0{,}1667$

Anzahl der Würfe: n = 10000 (Klick hier: Diese Zeile unten anzeigen!)



n	Würfel-ergebnis	$H_n(1)$	$h_n(1)$	$H_n(2)$	$h_n(2)$	$H_n(3)$	$h_n(3)$	$H_n(4,5,6)$	$h_n(4,5,6)$	$\sum_{i=1}^{6} H_n(i)$	$\sum_{i=1}^{6} h_n(i)$
9994	3	1667	0,1668	1733	0,1734	1646	0,1647	4948	0,4951	9994	1
9995	3	1667	0,1668	1733	0,1734	1647	0,1648	4948	0,495	9995	1
9996	4	1667	0,1668	1733	0,1734	1647	0,1648	4949	0,4951	9996	1
9997	4	1667	0,1668	1733	0,1734	1647	0,1647	4950	0,4951	9997	1
9998	6	1667	0,1667	1733	0,1733	1647	0,1647	4951	0,4952	9998	1
9999	3	1667	0,1667	1733	0,1733	1648	0,1648	4951	0,4951	9999	1
10000	2	1667	0,1667	1734	0,1734	1648	0,1648	4951	0,4951	10000	1

Wie aus den Beispielen 1 bis 5 zu erkennen ist, wird die relative Häufigkeit für unendliche viele Versuche gegen $0{,}1\bar{6} = 16{,}\bar{6}\% = \frac{1}{6}$ streben.

Die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu würfeln, beträgt demnach $P(1) = 0{,}1\bar{6} = 16{,}\bar{6}\% = \frac{1}{6}$.

Für die Wahrscheinlichkeit der anderen Zahlen ergibt sich der gleiche Wert. Es gilt:

$$P(1) = 0{,}1\bar{6} = 16{,}\bar{6}\% = \frac{1}{6}$$

$$P(2) = 0{,}1\bar{6} = 16{,}\bar{6}\% = \frac{1}{6}$$

$$P(3) = 0{,}1\bar{6} = 16{,}\bar{6}\% = \frac{1}{6}$$

$$P(4) = 0{,}1\bar{6} = 16{,}\bar{6}\% = \frac{1}{6}$$

$$P(5) = 0{,}1\bar{6} = 16{,}\bar{6}\% = \frac{1}{6}$$

$$P(6) = 0{,}1\bar{6} = 16{,}\bar{6}\% = \frac{1}{6}$$

Also besitzen alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit. Die Ergebnisse sind *gleichwahrscheinlich*.

2.3.2 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ eine endliche Menge und alle Ergebnisse seien gleichwahrscheinlich. Die dadurch gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(A) = \frac{|A|}{r}$$

heißt Laplace-Wahrscheinlichkeit.

[21]

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich sind, heißt *Laplace-Experiment*.

Hinweis:
A ist ein Ereignis, also eine Teilmenge von Ω. Wählt man z.B. $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$, so ist $|A| = 4$.

Die Ergebnisse $\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6$ heißen *für das Ereignis A günstige* Ergebnisse.

Es ergibt sich: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{r} = \frac{4}{r}$

[21] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 34

a) Beispiel für ein Laplace-Experiment

(Siehe auch: Bernoulli-Experiment, S. 149)

In einem Gefäß befinden sich 30 Kugeln, die (bis auf Farbe und Zahl) alle gleich sind. Es wird blind gezogen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, ist für jede Kugel gleich.

Gefäß mit Kugeln: 30 Stück

1	8	15	22	29
2	9	16	23	30
3	10	17	24	
4	11	18	25	
5	12	19	26	
6	13	20	27	
7	14	21	28	

Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe und Zahl

Ω = {(rot, 3), (rot, 5), (rot, 10), (rot, 15), (rot, 20), (rot, 21), (rot, 23), (rot, 26), (rot, 27), (rot, 28), (grün, 8), (grün, 18), (grün, 19), (grün, 25), (blau, 6), (blau, 14), (blau, 16), (blau, 24), (gelb, 1), (gelb, 2), (gelb, 4), (gelb, 7), (gelb, 9), (gelb, 12), (gelb, 17), (gelb, 22), (gelb, 29), (gelb, 30), (grau, 11), (grau, 13)}

|Ω| = 30

Da jede Kugel ein Ergebnis darstellt und die *Ergebnisse* alle *gleichwahrscheinlich* sind, handelt es sich um ein *Laplace-Experiment*.

Man definiere das Ereignis A:
A: Es wird eine rote Kugel gezogen. bzw. A = {(rot, 3), (rot, 5), (rot, 10), (rot, 15), (rot, 20), (rot, 21), (rot, 23), (rot, 26), (rot, 27), (rot, 28)}

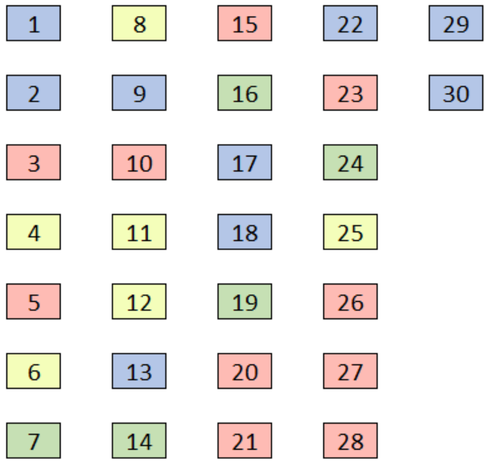
Die Anzahl der Elemente von A beträgt $|A| = 10$.

Nach der Laplace-Formel ergibt sich: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 33,\overline{3}\ \%$

b) Beispiel für KEIN Laplace-Experiment

Es wird exakt das gleiche Gefäß wie in Beispiel a) betrachtet. Jedoch wird nun die Ergebnismenge anders festgelegt:

Gefäß mit Kugeln: 30 Stück



Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

Ω = {rot, grün, blau, gelb}

$|\Omega| = 4$

10	rote Kugeln	$P(\text{rot}) = \dfrac{10}{30}$	$\cong$ 0,3333	$\cong$	33%
5	grüne Kugeln	$P(\text{grün}) = \dfrac{5}{30}$	$\cong$ 0,1667	$\cong$	17%
9	blaue Kugeln	$P(\text{blau}) = \dfrac{9}{30}$	$\cong$ 0,3	$\cong$	30%
6	gelbe Kugeln	$P(\text{gelb}) = \dfrac{6}{30}$	$\cong$ 0,2	$\cong$	20%
30	Kugeln (gesamt)	$P(\Omega) = \dfrac{30}{30}$	$\cong$ 1	$\cong$	100%

Alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich: nein

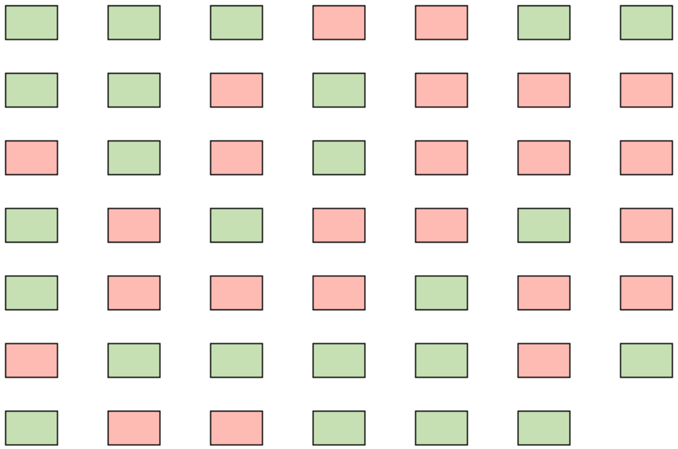
$\Rightarrow$ KEIN Laplace-Experiment

Es ist zwar weiterhin möglich, die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse „rot“, „grün“, „blau“ und „gelb“ mit Hilfe der Laplace-Formel zu berechnen. Da jedoch bei dieser Festlegung der Ergebnismenge die *Ergebnisse NICHT gleichwahrscheinlich* sind, handelt es sich um KEIN Laplace-Experiment.

c) Beispiel für ein weiteres Laplace-Experiment

In einem Gefäß befinden sich 48 Kugeln, die (bis auf die Farbe) alle gleich sind. Es wird blind gezogen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, ist für jede Kugel gleich.

Gefäß mit Kugeln: 48 Stück



☐ Farben ausschreiben

***Ergebnis*- Wahrscheinlichkeiten**

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   $\Omega = \{\text{rot, grün}\}$

   $|\Omega| = 2$

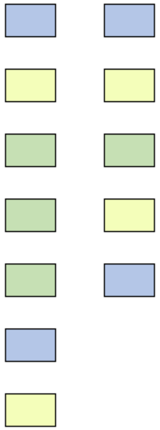
24	rote Kugeln	$P(\text{rot}) = \frac{24}{48} \cong 0{,}5 \cong 50\%$	Alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich: ja
24	grüne Kugeln	$P(\text{grün}) = \frac{24}{48} \cong 0{,}5 \cong 50\%$	$\Rightarrow$ Laplace-Experiment
48	Kugeln (gesamt)	$P(\Omega) = \frac{48}{48} \cong 1 \cong 100\%$	

Da P(rot) = P(grün) ist und somit alle Ergebnisse *gleichwahrscheinlich* sind, *handelt* es sich um ein *Laplace-Experiment*.

Übung 1:

In einem Gefäß befinden sich 12 Kugeln, die (bis auf die Farbe) alle gleich sind. Es wird blind gezogen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, ist für jede Kugel gleich.

Gefäß mit Kugeln: Stück



☐ Farben ausschreiben

***Ergebnis*-** **Wahrscheinlichkeiten**

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   $\Omega =$

   $|\Omega| =$

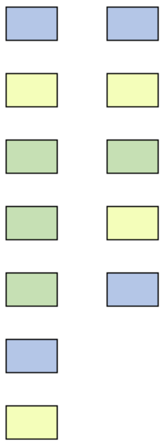
grüne Kugeln	P(grün) $= \frac{\quad}{\quad} \cong \qquad \cong$	
blaue Kugeln	P(blau) $= \frac{\quad}{\quad} \cong \qquad \cong$	
gelbe Kugeln	P(gelb) $= \frac{\quad}{\quad} \cong \qquad \cong$	
Kugeln (gesamt)	P(Ω) $= \frac{\quad}{\quad} \cong \qquad \cong$	

Alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich:

$\Rightarrow$

Lösung 1:

Gefäß mit Kugeln: 12 Stück



☐ Farben ausschreiben

***Ergebnis*- Wahrscheinlichkeiten**

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   $\Omega = \{\text{grün, blau, gelb}\}$

   $|\Omega| = 3$

4	grüne Kugeln	$P(\text{grün}) = \frac{4}{12}$	$\cong$ 0,3333	$\cong$ 33%
4	blaue Kugeln	$P(\text{blau}) = \frac{4}{12}$	$\cong$ 0,3333	$\cong$ 33%
4	gelbe Kugeln	$P(\text{gelb}) = \frac{4}{12}$	$\cong$ 0,3333	$\cong$ 33%
12	Kugeln (gesamt)	$P(\Omega) = \frac{12}{12}$	$\cong$ 1	$\cong$ 100%

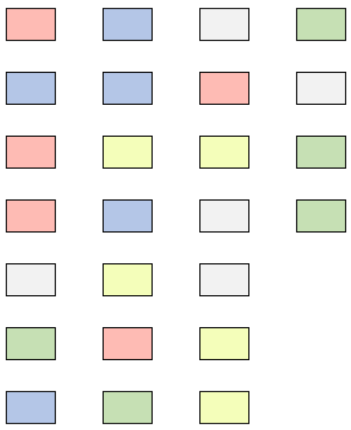
Alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich: ja

$\Rightarrow$ Laplace-Experiment

Übung 2:

In einem Gefäß befinden sich 25 Kugeln, die (bis auf die Farbe) alle gleich sind. Es wird blind gezogen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, ist für jede Kugel gleich.

Gefäß mit Kugeln: Stück



☐ Farben ausschreiben

***Ergebnis*- Wahrscheinlichkeiten**

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

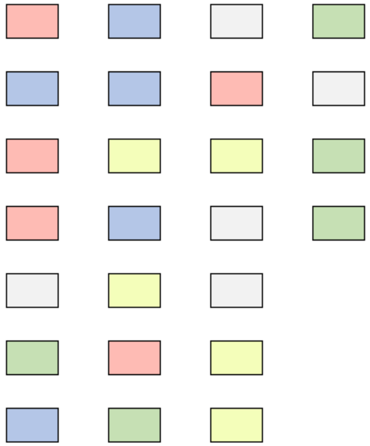
   Ω =

   $|\Omega|$ =

rote Kugeln	P(rot) = —— ≅	≅	
grüne Kugeln	P(grün) = —— ≅	≅	Alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich:
blaue Kugeln	P(blau) = —— ≅	≅	⇒
gelbe Kugeln	P(gelb) = —— ≅	≅	
graue Kugeln	P(grau) = —— ≅	≅	
Kugeln (gesamt)	P(Ω) = —— ≅	≅	

Lösung 2:

Gefäß mit Kugeln: 25 Stück



☐ Farben ausschreiben

***Ergebnis-* Wahrscheinlichkeiten**

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   Ω = {rot, grün, blau, gelb, grau}

   $|\Omega| = 5$

5	rote Kugeln	P(rot)	=	$\frac{5}{25}$	$\cong$	0,2	$\cong$	20%
5	grüne Kugeln	P(grün)	=	$\frac{5}{25}$	$\cong$	0,2	$\cong$	20%
5	blaue Kugeln	P(blau)	=	$\frac{5}{25}$	$\cong$	0,2	$\cong$	20%
5	gelbe Kugeln	P(gelb)	=	$\frac{5}{25}$	$\cong$	0,2	$\cong$	20%
5	graue Kugeln	P(grau)	=	$\frac{5}{25}$	$\cong$	0,2	$\cong$	20%
25	Kugeln (gesamt)	P(Ω)	=	$\frac{25}{25}$	$\cong$	1	$\cong$	100%

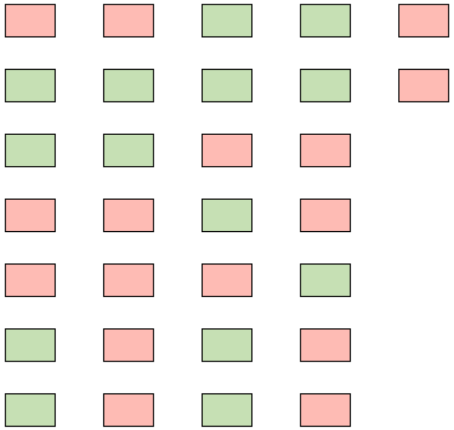
Alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich: ja

$\Rightarrow$ Laplace-Experiment

Übung 3:

In einem Gefäß befinden sich 30 Kugeln, die (bis auf die Farbe) alle gleich sind. Es wird blind gezogen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, ist für jede Kugel gleich.

Gefäß mit Kugeln: Stück



☐ Farben ausschreiben

***Ergebnis*- Wahrscheinlichkeiten**

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   Ω =

   $|\Omega|$ =

rote Kugeln P(rot) = —— ≅ ≅

grüne Kugeln P(grün) = —— ≅ ≅

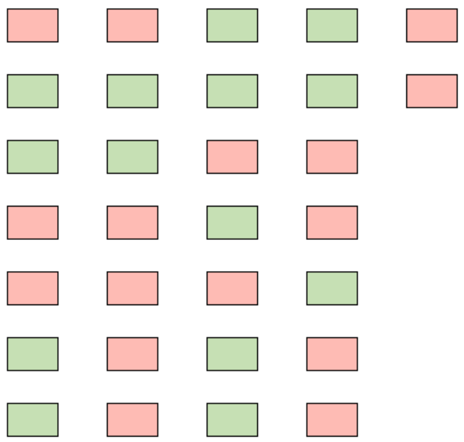
Alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich:

⇒

Kugeln (gesamt) P(Ω) = —— ≅ ≅

Lösung 3:

Gefäß mit Kugeln: 30 Stück



☐ Farben ausschreiben

***Ergebnis*- Wahrscheinlichkeiten**

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   Ω = {rot, grün}

   $|\Omega| = 2$

16 rote Kugeln $\quad P(\text{rot}) = \dfrac{16}{30} \cong 0{,}5333 \cong 53\%$

14 grüne Kugeln $\quad P(\text{grün}) = \dfrac{14}{30} \cong 0{,}4667 \cong 47\%$

Alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich: nein

$\Rightarrow$ KEIN Laplace-Experiment

30 Kugeln (gesamt) $\quad P(\Omega) = \dfrac{30}{30} \cong 1 \cong 100\%$

2.4 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung

2.4.1 Wahrscheinlichkeitsverteilung

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$

Eine Wahrscheinlichkeits**verteilung** P ist durch eine Tabelle der folgenden Art eindeutig bestimmt:

Ergebnis	ω_1	ω_2	$\ldots$	ω_r
Wahrscheinlichkeit	p_1	p_2	$\ldots$	p_r

- $p_k = P(\{\omega_k\})$, d. h. p_k ist die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses ω_k.
- $0 \leq p_k \leq 1$
- $p_1 + p_2 + \cdots p_r = 1$

[22]

2.4.2 Nichtnegativität, Normiertheit und Additivität

Es seien Ω eine nichtleere endliche Menge und 2^Ω die Menge aller Teilmengen von Ω. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P ist eine auf 2^Ω definierte Funktion mit Werten in $[0; 1]$, welche den folgenden Bedingungen genügt:

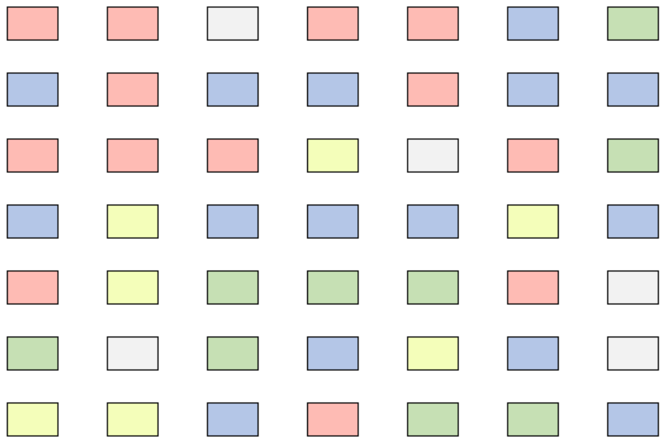
1. $P(A) \geq 0$ *(Nichtnegativität)*
2. $P(\Omega) = 1$ *(Normiertheit)*
3. *Für unvereinbare Ereignisse A und B gilt*
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(Additivität)*

[23]

[22] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 15
[23] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 27

Beispiel:

Gefäß mit Kugeln: 49 Stück



☐ Farben ausschreiben

***Ergebnis*-** **Wahrscheinlichkeiten**

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   $\Omega = \{\text{rot, grün, blau, gelb, grau}\}$

   $|\Omega| = 5$

13 rote Kugeln $P(\text{rot}) = \dfrac{13}{49} \cong 0{,}2653 \cong 26{,}53\%$

9 grüne Kugeln $P(\text{grün}) = \dfrac{9}{49} \cong 0{,}1837 \cong 18{,}37\%$

15 blaue Kugeln $P(\text{blau}) = \dfrac{15}{49} \cong 0{,}3061 \cong 30{,}61\%$

7 gelbe Kugeln $P(\text{gelb}) = \dfrac{7}{49} \cong 0{,}1429 \cong 14{,}29\%$

5 graue Kugeln $P(\text{grau}) = \dfrac{5}{49} \cong 0{,}102 \cong 10{,}20\%$

49 Kugeln (gesamt) $P(\Omega) = \dfrac{49}{49} \cong 1 \cong 100\%$

Alle *Ergebnisse* gleichwahrscheinlich: nein

$\Rightarrow$ KEIN Laplace-Experiment

Tabelle zur Wahrscheinlichkeitsverteilung P:

Ergebnis	rot	grün	blau	gelb	grau
Wahrscheinlichkeit	0,2653	0,1837	0,3061	0,1429	0,102

P(rot oder grün) = 0,2653 + 0,1837 = 0,449

Die Summe *aller* Ergebniswahrscheinlichkeiten ist gleich 1.

2.4.3 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (unmögliches Ereignis, Gegenereignis, Differenz und Vereinigung)

In einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) *gilt:*

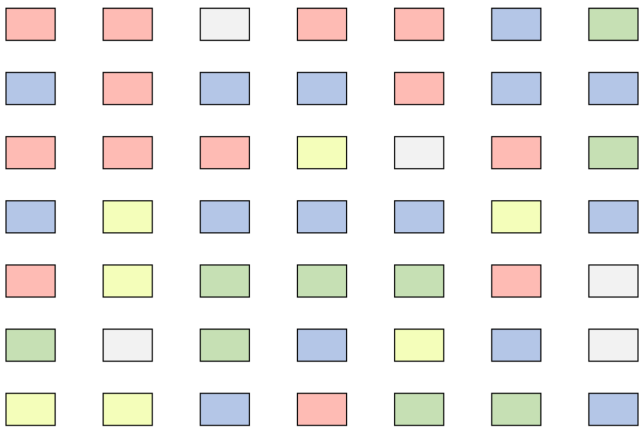
$$
\begin{array}{lrcl}
1. & P(\emptyset) & = & 0 \\
2. & P(\bar{A}) & = & 1 - P(A) \\
3. & P(A \setminus B) & = & P(A) - P(A \cap B) \\
4. & P(A \cup B) & = & P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{array}
$$

[24]

[24] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 28

Beispiel: A und B sind unvereinbar (disjunkt): $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Gefäß mit Kugeln: 49 Stück



☐ Farben ausschreiben

P(rot)	≅	0,26531
P(grün)	≅	0,18367
P(blau)	≅	0,30612
P(gelb)	≅	0,14286
P(grau)	≅	0,10204
P(Ω)	≅	1

***Ereignis*- Wahrscheinlichkeiten (1)**

1. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Farbe

   Ω = {rot, grün, blau, gelb, grau}

   |Ω| = 5

(Elementar-)Ereignisse:

A : Es wird eine rote Kugel gezogen.	⇒	P(A)	≅	0,26531
B : Es wird eine grüne Kugel gezogen.	⇒	P(B)	≅	0,18367
C : Es wird eine blaue Kugel gezogen.	⇒	P(C)	≅	0,30612
D : Es wird eine gelbe Kugel gezogen.	⇒	P(D)	≅	0,14286
E : Es wird eine graue Kugel gezogen.	⇒	P(E)	≅	0,10204

Verknüpfung von Ereignissen:

A ∪ B : Es wird eine rote ODER grüne Kugel gezogen. ⇒ P(A ∪ B) ≅ P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

≅ 0,26531 + 0,18367 - 0

≅ 0,44898

Weil nur *entweder* eine rote (A) *oder* eine grüne Kugel (B) gezogen werden kann (aber keine Kugel, die *sowohl* rot *als auch* grün ist), ist:

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

Es gilt also: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) = 0{,}26531 + 0{,}18367 = 0{,}44898$

Beispiel: A und B sind vereinbar (nicht disjunkt): $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Gefäß mit Kugeln: 49 Stück

1	9	9	10	1	6	8
5	3	6	9	7	3	7
4	2	6	1	4	7	1
1	10	8	4	6	4	6
8	10	7	7	4	3	4
6	8	6	10	2	2	2
9	10	6	9	6	1	7

***Ereignis*- Wahrscheinlichkeiten (2)**

2. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Zahl

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$|\Omega| = 10$

$$\left.\begin{array}{l} P(3) = \frac{3}{49} \cong 0{,}061 \\ P(4) = \frac{6}{49} \cong 0{,}122 \\ P(5) = \frac{1}{49} \cong 0{,}02 \\ P(6) = \frac{9}{49} \cong 0{,}184 \end{array}\right\} \Rightarrow P([3;6]) \cong 0{,}3878$$

Ereignisse (= Teilmengen von Ω):

A : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [3 ; 5] gezogen.

B : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [4 ; 6] gezogen.

$A \cup B$: Es wird eine Zahl aus dem Intervall [3 ; 5] ODER dem Intervall [4 ; 6] gezogen.

$A \cap B$: Es wird eine Zahl aus dem Intervall [4 ; 5] gezogen.

$P(A) \cong 0{,}204$

$P(B) \cong 0{,}327$

$P(A \cap B) \cong 0{,}143$

$$P(A \cup B) \cong P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\cong 0{,}204 + 0{,}327 - 0{,}1429 \cong 0{,}3878$$

Die Ergebnisse 4 und 5 sind sowohl für das Ereignis A als auch für das Ereignis B *günstig*: $A \cap B = \{4, 5\} \neq \emptyset$

Es gilt also: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3878$

Übung 1:

Gefäß mit Kugeln: 10 Stück

6	3
10	8
5	3
8	
6	
6	
5	

***Ereignis*-** **Wahrscheinlichkeiten (2)**

2. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Zahl

   Ω = {3, 5, 6, 8, 10}

   $|\Omega| = 5$

P(1) = —— ≅	P(5) = —— ≅	P(9) = —— ≅
P(2) = —— ≅	P(6) = —— ≅	P(10) = —— ≅
P(3) = —— ≅	P(7) = —— ≅	
P(4) = —— ≅	P(8) = —— ≅	

Ereignisse (= Teilmengen von Ω):

A : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [1 ; 5] gezogen.

B : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [8 ; 10] gezogen.

$A \cup B$:

$A \cap B$:

P(A) ≅

P(B) ≅

$P(A \cap B)$ ≅

$P(A \cup B)$ ≅

≅

Lösung 1:

Gefäß mit Kugeln: 10 Stück

6	3
10	8
5	3
8	
6	
6	
5	

***Ereignis*-Wahrscheinlichkeiten (2)**

2. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Zahl

$\Omega = \{3, 5, 6, 8, 10\}$

$|\Omega| = 5$

$P(1) = \frac{0}{10} \cong 0$ $\quad P(5) = \frac{2}{10} \cong 0{,}2$ $\quad P(9) = \frac{0}{10} \cong 0$

$P(2) = \frac{0}{10} \cong 0$ $\quad P(6) = \frac{3}{10} \cong 0{,}3$ $\quad P(10) = \frac{1}{10} \cong 0{,}1$

$P(3) = \frac{2}{10} \cong 0{,}2$ $\quad P(7) = \frac{0}{10} \cong 0$

$P(4) = \frac{0}{10} \cong 0$ $\quad P(8) = \frac{2}{10} \cong 0{,}2$

Ereignisse (= Teilmengen von Ω):

A : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [1 ; 5] gezogen.

B : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [8 ; 10] gezogen.

A ∪ B : Es wird eine Zahl aus dem Intervall [1 ; 5] ODER dem Intervall [8 ; 10] gezogen.

A ∩ B : Es ist nicht möglich eine Zahl zu ziehen, die im Intervall [1 ; 5] UND im Intervall [8 ; 10] liegt.

$P(A) \cong 0{,}4$

$P(B) \cong 0{,}3$

$P(A \cap B) \cong 0$

$P(A \cup B) \cong P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\cong 0{,}4 + 0{,}3 - 0 \cong 0{,}7$

Es ist auch möglich, P(A ∪ B) über das Gegenereignis zu berechnen: $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\{6,7\}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Übung 2:

Gefäß mit Kugeln: 10 Stück

6	3
10	8
5	3
8	
6	
6	
5	

Ereignis- **Wahrscheinlichkeiten (2)**

2. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Zahl

$\Omega = \{3, 5, 6, 8, 10\}$

$|\Omega| = 5$

P(1) = —— ≅	P(5) = —— ≅	P(9) = —— ≅
P(2) = —— ≅	P(6) = —— ≅	P(10) = —— ≅
P(3) = —— ≅	P(7) = —— ≅	
P(4) = —— ≅	P(8) = —— ≅	

Ereignisse (= Teilmengen von Ω):

A : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [2 ; 6] gezogen.

B : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [4 ; 9] gezogen.

A ∪ B :

A ∩ B :

P(A) ≅

P(B) ≅

P(A ∩ B) ≅

P(A ∪ B) ≅

≅

Lösung 2:

Gefäß mit Kugeln: 10 Stück

6	3
10	8
5	3
8	
6	
6	
5	

***Ereignis*- Wahrscheinlichkeiten (2)**

2. Es wird 1-mal gezogen, Beobachtungskriterium: Zahl

$\Omega = \{3, 5, 6, 8, 10\}$

$|\Omega| = 5$

$P(1) = \frac{0}{10} \cong 0$ $\quad P(5) = \frac{2}{10} \cong 0{,}2$ $\quad P(9) = \frac{0}{10} \cong 0$

$P(2) = \frac{0}{10} \cong 0$ $\quad P(6) = \frac{3}{10} \cong 0{,}3$ $\quad P(10) = \frac{1}{10} \cong 0{,}1$

$P(3) = \frac{2}{10} \cong 0{,}2$ $\quad P(7) = \frac{0}{10} \cong 0$

$P(4) = \frac{0}{10} \cong 0$ $\quad P(8) = \frac{2}{10} \cong 0{,}2$

Ereignisse (= Teilmengen von Ω):

A : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [2 ; 6] gezogen.

B : Es wird eine Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall [4 ; 9] gezogen.

A ∪ B : Es wird eine Zahl aus dem Intervall [2 ; 6] ODER dem Intervall [4 ; 9] gezogen.

A ∩ B : Es wird eine Zahl aus dem Intervall [4 ; 6] gezogen.

$P(A) \cong 0{,}7$

$P(B) \cong 0{,}7$

$P(A \cap B) \cong 0{,}5$

$P(A \cup B) \cong P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\cong 0{,}7 + 0{,}7 - 0{,}5 \cong 0{,}9$

Es ist auch möglich, P(A ∪ B) über das Gegenereignis zu berechnen: $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\{1, 10\}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

3 Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit Abzählproblemen.

Im Folgenden soll die Frage „Wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es?“ für verschiedene Modelle beantwortet werden.

Beim Lotto „6 aus 49“ gibt es z.B. 13.983.816 mögliche Ziehungen. Da alle möglichen Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind, liegt die Wahrscheinlichkeit, für „6 Richtige“ demnach bei

$$\frac{1}{13.983.816} \approx 0.00000007.$$

Es ergeben sich z.B. folgende Fragen:

- Wie kommt man auf diese Anzahl der Möglichkeiten?
- Wie viele Möglichkeiten gäbe es, wenn man zusätzlich noch die Reihenfolge der gezogenen Kugeln beachten würde oder die Kugeln nach dem Ziehen wieder zurücklegen würde?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 3, 4 oder 5 Richtige?

Ziel ist es zudem, die Formeln in der *Übersichtstabelle* (siehe S. 90) mit einfachen Beispielen (und kleinen Zahlen) verständlich zu machen und den Vorgang des Kugelziehens auch auf andere Sachverhalte zu übertragen.

Grundlage für alle Formeln ist die „Produktregel“.

3.1 Zählalgorithmus (Produktregel)

Zählalgorithmus

Eine Auswahl werde in k aufeinanderfolgenden Schritten vollzogen. Das Ergebnis ist ein k-Tupel. Gibt es dabei

im 1. Schritt		n_1 Möglichkeiten,
im 2. Schritt	**jeweils**	n_2 Möglichkeiten,
...	...	...
im k-ten Schritt	**jeweils**	n_k Möglichkeiten,

so gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ Möglichkeiten der Auswahl. [25]

Die nachfolgenden Abbildungen wurden mit der Exceldatei „Kombinatorik.xls“ erstellt.

[25] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis,Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 62

Beispiel:

Zählalgorithmus (Produktregel)

☐ ausblenden

$k = 4$

$n_1 =$	2	Salat	Suppe		
$n_2 =$	4	Fisch	Gans	Ente	vegan
$n_3 =$	3	Eis	Pudding	Kompott	
$n_4 =$	2	Sport	faul		

Kombinationen: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4$

$= 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$

1 . Möglichkeit:	(Salat, Fisch, Eis, Sport)	17 . Möglichkeit:	(Salat, Fisch, Kompott, Sport)	33 . Möglichkeit:	(Salat, Fisch, Pudding, faul)
2 . Möglichkeit:	(Suppe, Fisch, Eis, Sport)	18 . Möglichkeit:	(Suppe, Fisch, Kompott, Sport)	34 . Möglichkeit:	(Suppe, Fisch, Pudding, faul)
3 . Möglichkeit:	(Salat, Gans, Eis, Sport)	19 . Möglichkeit:	(Salat, Gans, Kompott, Sport)	35 . Möglichkeit:	(Salat, Gans, Pudding, faul)
4 . Möglichkeit:	(Suppe, Gans, Eis, Sport)	20 . Möglichkeit:	(Suppe, Gans, Kompott, Sport)	36 . Möglichkeit:	(Suppe, Gans, Pudding, faul)
5 . Möglichkeit:	(Salat, Ente, Eis, Sport)	21 . Möglichkeit:	(Salat, Ente, Kompott, Sport)	37 . Möglichkeit:	(Salat, Ente, Pudding, faul)
6 . Möglichkeit:	(Suppe, Ente, Eis, Sport)	22 . Möglichkeit:	(Suppe, Ente, Kompott, Sport)	38 . Möglichkeit:	(Suppe, Ente, Pudding, faul)
7 . Möglichkeit:	(Salat, vegan, Eis, Sport)	23 . Möglichkeit:	(Salat, vegan, Kompott, Sport)	39 . Möglichkeit:	(Salat, vegan, Pudding, faul)
8 . Möglichkeit:	(Suppe, vegan, Eis, Sport)	24 . Möglichkeit:	(Suppe, vegan, Kompott, Sport)	40 . Möglichkeit:	(Suppe, vegan, Pudding, faul)
9 . Möglichkeit:	(Salat, Fisch, Pudding, Sport)	25 . Möglichkeit:	(Salat, Fisch, Eis, faul)	41 . Möglichkeit:	(Salat, Fisch, Kompott, faul)
10 . Möglichkeit:	(Suppe, Fisch, Pudding, Sport)	26 . Möglichkeit:	(Suppe, Fisch, Eis, faul)	42 . Möglichkeit:	(Suppe, Fisch, Kompott, faul)
11 . Möglichkeit:	(Salat, Gans, Pudding, Sport)	27 . Möglichkeit:	(Salat, Gans, Eis, faul)	43 . Möglichkeit:	(Salat, Gans, Kompott, faul)
12 . Möglichkeit:	(Suppe, Gans, Pudding, Sport)	28 . Möglichkeit:	(Suppe, Gans, Eis, faul)	44 . Möglichkeit:	(Suppe, Gans, Kompott, faul)
13 . Möglichkeit:	(Salat, Ente, Pudding, Sport)	29 . Möglichkeit:	(Salat, Ente, Eis, faul)	45 . Möglichkeit:	(Salat, Ente, Kompott, faul)
14 . Möglichkeit:	(Suppe, Ente, Pudding, Sport)	30 . Möglichkeit:	(Suppe, Ente, Eis, faul)	46 . Möglichkeit:	(Suppe, Ente, Kompott, faul)
15 . Möglichkeit:	(Salat, vegan, Pudding, Sport)	31 . Möglichkeit:	(Salat, vegan, Eis, faul)	47 . Möglichkeit:	(Salat, vegan, Kompott, faul)
16 . Möglichkeit:	(Suppe, vegan, Pudding, Sport)	32 . Möglichkeit:	(Suppe, vegan, Eis, faul)	48 . Möglichkeit:	(Suppe, vegan, Kompott, faul)

Übung: Bestimmen Sie die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten für ein Menü, wenn es als Vorspeise „Salat“ oder „Suppe“, als Hauptgericht „Fisch“, „Gans“, „Ente“, „vegan“ oder „Diät“ und als Dessert „Eis“, Pudding“ oder „Kompott“ möglich sind.

Lösung: **Zählalgorithmus (Produktregel)**

☐ ausblenden

$k = 3$

$n_1 =$	2	Salat	Suppe			
$n_2 =$	5	Fisch	Gans	Ente	vegan	Diät
$n_3 =$	3	Eis	Pudding	Kompott		

Kombinationen: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$

$= 2 \cdot 5 \cdot 3 \quad = 30$

1 . Möglichkeit:	(Salat, Fisch, Eis)	17 . Möglichkeit:	(Salat, vegan, Pudding)
2 . Möglichkeit:	(Suppe, Fisch, Eis)	18 . Möglichkeit:	(Suppe, vegan, Pudding)
3 . Möglichkeit:	(Salat, Gans, Eis)	19 . Möglichkeit:	(Salat, Diät, Pudding)
4 . Möglichkeit:	(Suppe, Gans, Eis)	20 . Möglichkeit:	(Suppe, Diät, Pudding)
5 . Möglichkeit:	(Salat, Ente, Eis)	21 . Möglichkeit:	(Salat, Fisch, Kompott)
6 . Möglichkeit:	(Suppe, Ente, Eis)	22 . Möglichkeit:	(Suppe, Fisch, Kompott)
7 . Möglichkeit:	(Salat, vegan, Eis)	23 . Möglichkeit:	(Salat, Gans, Kompott)
8 . Möglichkeit:	(Suppe, vegan, Eis)	24 . Möglichkeit:	(Suppe, Gans, Kompott)
9 . Möglichkeit:	(Salat, Diät, Eis)	25 . Möglichkeit:	(Salat, Ente, Kompott)
10 . Möglichkeit:	(Suppe, Diät, Eis)	26 . Möglichkeit:	(Suppe, Ente, Kompott)
11 . Möglichkeit:	(Salat, Fisch, Pudding)	27 . Möglichkeit:	(Salat, vegan, Kompott)
12 . Möglichkeit:	(Suppe, Fisch, Pudding)	28 . Möglichkeit:	(Suppe, vegan, Kompott)
13 . Möglichkeit:	(Salat, Gans, Pudding)	29 . Möglichkeit:	(Salat, Diät, Kompott)
14 . Möglichkeit:	(Suppe, Gans, Pudding)	30 . Möglichkeit:	(Suppe, Diät, Kompott)
15 . Möglichkeit:	(Salat, Ente, Pudding)		
16 . Möglichkeit:	(Suppe, Ente, Pudding)		

3.2 Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen von Kugeln

3.2.1 Modell 1: *Geordnet* / *mit* Wiederholung *)

Beispiel 1:

In einem Gefäß befinden sich 2 Kugeln. Es wird 2-mal gezogen. Nach jedem Ziehen wird die Kugel zurückgelegt. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll beachtet werden.

Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen von Kugeln

n = 2 (durchnummerierte Kugeln)

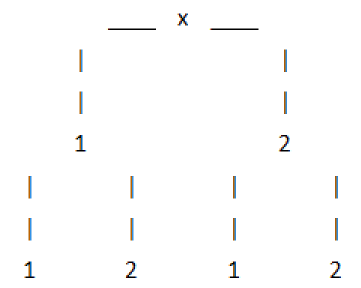
k = 2 (Ziehungen)

Art: geordnet / mit Wiederholung

Anzahl: 4

Möglichkeit	geordnet/ mit Wdh.			Kugel 1	Kugel 2
1	1			1	1
2	1			2	1
3	1			1	2
4	1			2	2

Veranschaulichung durch ein Baumdiagramm:



Beispiel 2:

In einem Gefäß befinden sich 3 Kugeln. Es wird 3-mal gezogen. Nach jedem Ziehen wird die Kugel zurückgelegt. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll beachtet werden.

Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen von Kugeln

n = 3 (durchnummerierte Kugeln)

k = 3 (Ziehungen)

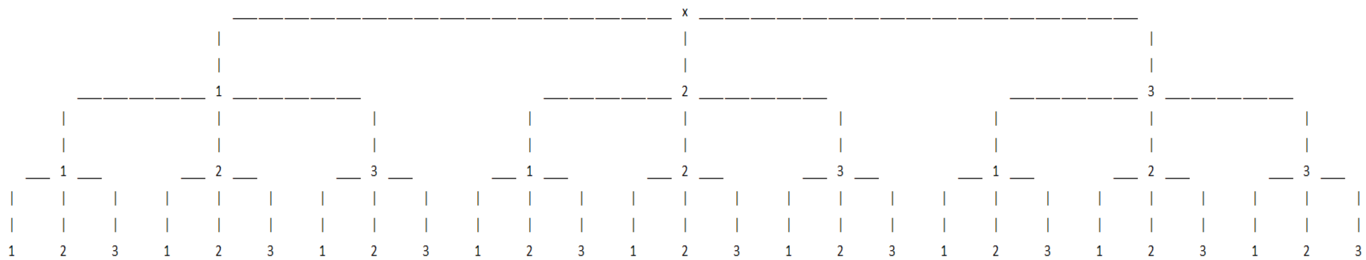
Art: geordnet / mit Wiederholung

Möglichkeit	Kugel 1	Kugel 2	Kugel 3
1	1	1	1
2	2	1	1
3	3	1	1
4	1	2	1
5	2	2	1
6	3	2	1
7	1	3	1
8	2	3	1
9	3	3	1
10	1	1	2
11	2	1	2
12	3	1	2
13	1	2	2
14	2	2	2
15	3	2	2
16	1	3	2
17	2	3	2
18	3	3	2
19	1	1	3
20	2	1	3
21	3	1	3
22	1	2	3
23	2	2	3
24	3	2	3
25	1	3	3
26	2	3	3
27	3	3	3

Anzahl: 27 (durch Zählen ermittelt)

Veranschaulichung durch ein Baumdiagramm:

1. Ziehung (3 Kugeln)
2. Ziehung (pro Kugel 3 weitere Kugeln)
3. Ziehung (pro Kugel 3 weitere Kugeln)



Anzahl: 27 $= 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ (durch Systematik ermittelt)

Übung:

In einem Gefäß befinden sich 4 Kugeln. Es wird 2-mal gezogen. Nach jedem Ziehen wird die Kugel zurückgelegt. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll beachtet werden.

1. Bestimmen Sie die Kombinationsmöglichkeiten.
2. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
3. Geben Sie eine *allgemeine Formel* zur Bestimmung der Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten an.

Lösung: In einem Gefäß befinden sich 4 Kugeln. Es wird 2-mal gezogen. Nach jedem Ziehen wird die Kugel zurückgelegt. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll beachtet werden.

Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen von Kugeln

n = 4 (durchnummerierte Kugeln)

k = 2 (Ziehungen)

Art: geordnet / mit Wiederholung

Anzahl: 16

Möglichkeit	geordnet/ mit Wdh.			Kugel 1	Kugel 2
1	1			1	1
2	1			2	1
3	1			3	1
4	1			4	1
5	1			1	2
6	1			2	2
7	1			3	2
8	1			4	2
9	1			1	3
10	1			2	3
11	1			3	3
12	1			4	3
13	1			1	4
14	1			2	4
15	1			3	4
16	1			4	4

Veranschaulichung durch ein Baumdiagramm:

```
                          ____________________ x ____________________
                          |              |              |              |
                          |              |              |              |
                   ___    1    ___  ___  2   ___  ___   3   ___  ___   4   ___
                  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
                  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
                  1    2    3    4    1    2    3    4    1    2    3    4    1    2    3    4
```

Lösung (geordnet / mit Wiederholung): $4 \cdot 4 = 4^2$

a) Modell 1: Formel (*ge*ordnet / *mit* Wiederholung)

Anzahl der Möglichkeiten (bei n Kugeln und k Ziehungen): n^k

3.2.2 Modell 2: *Geordnet* / *ohne* Wiederholung *)

In einem Gefäß befinden sich 3 Kugeln. Es wird 3-mal gezogen. Nach jedem Ziehen wird die Kugel NICHT zurückgelegt. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll beachtet werden.

Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen von Kugeln

n = 3 (durchnummerierte Kugeln)

k = 3 (Ziehungen)

Art: geordnet / ohne Wiederholung

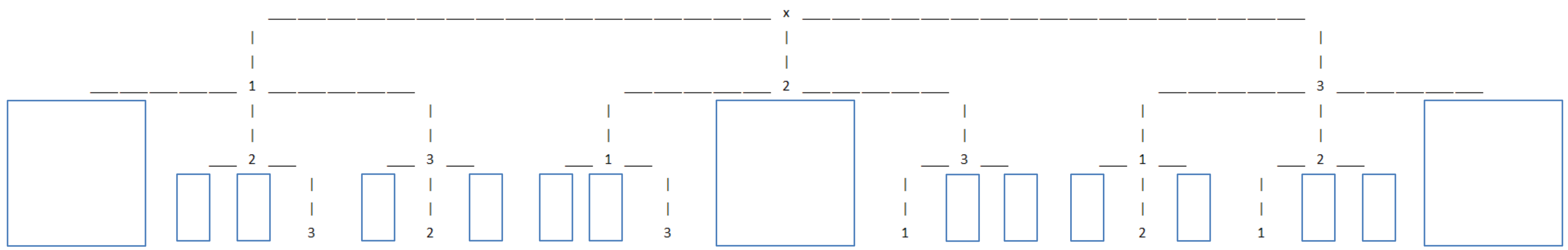
Anzahl: 6

Möglichkeit	geordnet/ ohne Wdh.	Kugel 1	Kugel 2	Kugel 3
6	1	3	2	1
8	1	2	3	1
12	1	3	1	2
16	1	1	3	2
20	1	2	1	3
22	1	1	2	3

Übung:

1. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, welches den Sachverhalt veranschaulicht.
2. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten.

Lösung: Veranschaulichung am Baumdiagramm:



Berechnung:

Es gibt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ Möglichkeiten.

b) Modell 2 (Spezialfall): Formel (*ge*ordnet / *ohne* Wiederholung, Spezialfall: n = k)

Anzahl der Möglichkeiten (bei $n = k$ Kugeln und $n = k$ Ziehungen): $n!$ bzw. $k!$

Übung 1:

In einem Gefäß befinden sich 4 Kugeln. Es wird 4-mal gezogen. Nach jedem Ziehen wird die Kugel NICHT zurückgelegt. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll beachtet werden.

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten.

Übung 2:

In einem Gefäß befinden sich 5 Kugeln. Es wird 5-mal gezogen. Nach jedem Ziehen wird die Kugel NICHT zurückgelegt. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll beachtet werden.

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten.

Lösung 1 (geordnet / ohne Wiederholung):

Anzahl der Möglichkeiten (bei 4 Kugeln und 4 Ziehungen): $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Lösung 2 (geordnet / ohne Wiederholung):

Anzahl der Möglichkeiten (bei 5 Kugeln und 5 Ziehungen): $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Übung 3:

In einem Gefäß befinden sich n Kugeln (mit $n = 5$). Es wird k-mal (mit $k = 3$) gezogen. Nach jedem Ziehen wird die Kugel NICHT zurückgelegt. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll beachtet werden.

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten und *entwickeln Sie eine Formel, in der Fakultäten enthalten sind*.

Lösung 3 (geordnet / ohne Wiederholung):

Anzahl der Möglichkeiten (bei 5 Kugeln und 3 Ziehungen):

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Um die Berechnung für große Zahlen etwas handhabbarer durchführen zu können, kann man auch schreiben:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

c) Modell 2: Formel (*ge*ordnet / *ohne* Wiederholung)

Anzahl der Möglichkeiten (bei n Kugeln und k Ziehungen):

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

3.2.3 Modell 3: *Ungeordnet / ohne* Wiederholung *)

Beispiel: In einem Gefäß befinden sich 4 Kugeln. Es wird 2-mal gezogen.

Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen von Kugeln

n = 4 (durchnummerierte Kugeln)

k = 2 (Ziehungen)

Art: alles

Formel:	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Anzahl:	16	12	6

Möglichkeit	geordnet/ mit Wdh.	geordnet/ ohne Wdh.	ungeordnet/ ohne Wdh.	Kugel 1	Kugel 2
1	1	0	0	1	1
2	1	1	1	2	1
3	1	1	1	3	1
4	1	1	1	4	1
5	1	1	0	1	2
6	1	0	0	2	2
7	1	1	1	3	2
8	1	1	1	4	2
9	1	1	0	1	3
10	1	1	0	2	3
11	1	0	0	3	3
12	1	1	1	4	3
13	1	1	0	1	4
14	1	1	0	2	4
15	1	1	0	3	4
16	1	0	0	4	4

Erläuterung:

Es lassen sich die Möglichkeiten berechnen für

- geordnet / mit Wiederholung: $n^k = 4^2 = 16$
- geordnet / ohne Wiederholung:
$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

Wenn die Reihenfolge nun aber keine Rolle mehr spielt (= ungeordnet), fallen z.B. die Ergebnisse (1,2) und (2,1) zusammen und man schreibt {1,2} = {2,1}.

In diesem Beispiel fällt dadurch die Hälfte der Ergebnisse weg: Von 12 Möglichkeiten bleiben nur noch 6 übrig.

Allgemein muss man die bisherige Anzahl von „geordnet / ohne Wiederholung" noch durch die Anzahl der Möglichkeiten, die gezogenen Kugeln *anzuordnen*, teilen.

Hierfür gibt es $k!$ Möglichkeiten.

In diesem Beispiel wären es also $2! = 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, durch die man die 12 (Anzahl von „geordnet / ohne Wiederholung") teilen muss.

d) Modell 3: Formel (*un*geordnet / *ohne* Wiederholung)

Anzahl der Möglichkeiten (bei n Kugeln und k Ziehungen):

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Der Ausdruck $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ wird als Binomialkoeffizient bezeichnet.

Schreibweise: $\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$ (gesprochen: „n über k“)

Hinweis: Zwischen n und k wird KEIN BRUCHSTRICH geschrieben.

Beispiel:

Beim Lotto „6 aus 49“ gibt es $\frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \binom{49}{6} = 13.983.816$ Möglichkeiten.

Berechnung mit dem Taschenrechner: 49 nCr 6

3.2.4 Zwischenübersicht in Tabellenform *)

Beispiel (siehe oben): In einem Gefäß befinden sich 4 Kugeln. Es wird 2-mal gezogen.

Anzahl möglicher Stichproben vom Umfang k (k<=n)

n = 4 Elemente k = 2 Ziehungen	ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen)	mit Wiederholung (mit Zurücklegen)
geordnet (k-Tupel) (mit Beachtung der Reihenfolge)	$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ Modell 2	$n^k = 4^2 = 16$ Modell 1
ungeordnet (ohne Beachtung der Reihenfolge)	$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ Modell 3	

3.3 Verallgemeinerung der Formeln *)

3.3.1 Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge (Permutationen)

Elemente (Kugeln, Karten, Schüler, Lehrer, ...) mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ sollen in einer Reihe angeordnet werden. Es gibt

für den 1. Platz		n Möglichkeiten,
für den 2. Platz	**jeweils**	$n-1$ Möglichkeiten,
...	...	...
für den n-ten Platz	**jeweils**	1 Möglichkeit.

Es gibt folglich $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten der Anordnung.

[26]

Dies entspricht dem bisherigen Fall „geordnet / ohne Wiederholung, Spezialfall: n = k“.

3.3.2 Anzahl der Anordnungen von k Elementen einer n-elementigen Menge

Aus einer Menge von Elementen (Kugeln, Karten, Schüler, Lehrer, ...) mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ sollen k ausgewählt und in einer Reihe angeordnet werden. Es gibt

für den 1. Platz		n Möglichkeiten,
für den 2. Platz	**jeweils**	$n-1$ Möglichkeiten,
...	...	...
für den k-ten Platz	**jeweils**	$n-(k-1)$ Möglichkeiten.

Es gibt folglich $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ Möglichkeiten der Anordnung.

[27]

Dies entspricht dem bisherigen Fall „geordnet / ohne Wiederholung“. Es ergibt sich für die Tabelle:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(Anzahl der Anordnungen von k Objekten aus einer Menge von n Objekten)

(Sonderfall k=n: n! Permutationen (Anzahl der Anordnungen von n Objekten))

[26] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 63
[27] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 64

3.3.3 Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

Um den Unterschied zu 3.3.2 zu verdeutlichen, sei folgendes Beispiel gegeben:

Beispiel:

Die Zahlen 1, 3 und 7 können folgendermaßen angeordnet werden:

(1, 3, 7) ≠ (1, 7, 3) ≠ (3, 1, 7) ≠ (3, 7, 1) ≠ (7, 1, 3) ≠ (7, 3, 1)

Da es k = 3 Elemente gibt, kann man diese auf k! = 3! = 3 · 2 · 1 = 6 verschiedene Arten anordnen.

Die Anzahl der Permutationen von k Elementen ist k! .

Wenn aus "Anzahl der Anordnungen von k Elementen" nun die "Anzahl der k-elementigen Teilmengen" wird, bedeutet dies, dass die Reihenfolge keine Rolle mehr spielt:

{1, 3, 7} = {1, 7, 3} = {3, 1, 7} = {3, 7, 1} = {7, 1, 3} = {7, 3, 1}

Aus obigen 6 Möglichkeiten ist durch die Wegnahme der Beachtung der Reihenfolge nur noch eine Möglichkeit geblieben. Es wurde also durch k! = 3! = 6 geteilt.

Allgemein ergibt sich für die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge:

Anzahl von Teilmengen

Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge.

[28]

Dies entspricht dem bisherigen Fall „ungeordnet / ohne Wiederholung“.

[28] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 62

3.4 Übersicht in Tabellenform *)

Anzahl möglicher Stichproben vom Umfang k (k<=n)

n = 49 Elemente k = 6 Ziehungen	ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen)	mit Wiederholung (mit Zurücklegen)
geordnet (k-Tupel) (mit Beachtung der Reihenfolge)	$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{49\,!}{(\ 49 - \ 6\ )\,!} = 10.068.347.520$ (Anzahl der Anordnungen von k Objekten aus einer Menge von n Objekten) Modell 2 (Sonderfall k=n: n! Permutationen (Anzahl der Anordnungen von n Objekten))	$n^k = 49^6 = 13.841.287.201$ Modell 1
ungeordnet (ohne Beachtung der Reihenfolge)	$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{49\,!}{6!\,(\ 49 - \ 6\ )\,!} = 13.983.816$ Modell 3 (Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge)	

3.5 Übungen

Übung 1:

10 Personen stoßen miteinander an. Wie oft klingen die Gläser?

[29]

Lösung:

Wie lässt sich diese Fragestellung auf eines der Modelle übertragen?

Antwort:

- Die 10 Personen entsprechen 10 Kugeln: $n = 10$
- Es werden aus den 10 Personen 2 ausgewählt (die dann miteinander anstoßen): $k = 2$
- Da NICHT erst die erstausgewählte Person mit der zweitausgewählten Person und danach die zweitausgewählte Person mit der erstausgewählten Person anstößt, scheint die *Reihenfolge keine Rolle* zu spielen. Zudem stößt keine Person mit sich selbst an.
  => Modell 3

Lösung: $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$-mal.

[29] Aus: Warmuth, E.: 8.2. Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, Elemente der Kombinatorik, 2019/2020, S. 70

Übung 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Mäntel anzuordnen?

Findest du eine Strategie, die Anzahl der Möglichkeiten zu bestimmen?

a) Wie viele Plätze gibt es für den ersten Mantel, wenn noch kein Platz besetzt ist?

b) Wenn du den ersten Mantel hängen lässt, wie viele Möglichkeiten gibt es dann für den zweiten Mantel, ihn aufzuhängen?

c) Wenn nun zwei Mäntel hängen, wie viele Möglichkeiten gibt es, für den dritten Mantel einen Platz zu finden?

[30]

Lösung 2:

Wie lässt sich diese Fragestellung auf eines der Modelle übertragen?

Antwort:

- Die 8 Mäntel entsprechen 8 Kugeln: n = 8
- Die Position des Mantels (Reihenfolge der Kugeln) spielt eine Rolle. Ein Mantel kann nur einmal aufgehängt werden.
  => Modell 2
- Von 8 Mänteln werden alle 8 aufgehängt: k = n = 8
  => Spezialfall Modell 2

a) Für den ersten Mantel gibt es 8 Möglichkeiten.

b) Für den zweiten Mantel gibt es noch 7 Möglichkeiten.

c) Für den dritten Mantel gibt es noch 6 Möglichkeiten.

- Es gibt $n! = k! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ Möglichkeiten.
- Hinweis: Beim Spezialfall gilt: $n! = k! = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = \frac{8!}{1} = 8!$

[30] Cornelsen: 10.000 Aufgaben Mathematik

Übung 3:

Ein Basketballtrainer hat sieben Ersatzspieler auf der Bank. Er darf noch fünf Spieler einwechseln.

a) Wie viele Möglichkeiten bieten sich dem Trainer ohne Berücksichtigung der Reihenfolge?

b) Wie viele Möglichkeiten bieten sich dem Trainer mit Berücksichtigung der Reihenfolge?

31

Lösung 3:

Wie lässt sich diese Fragestellung auf eines der Modelle übertragen?

Antwort:

- Die 7 Spieler entsprechen 7 Kugeln: n = 7
- Es können 5 Spieler eingewechselt (Kugeln gezogen) werden: k = 5
- Wenn ein Spieler eingewechselt wurde, kann er nicht nochmal eingewechselt werden:
  => Modell 1 scheidet aus.
- Berücksichtigung der Reihenfolge => Modell 2: $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2520$
- ohne Berücksichtigung der Reihenfolge => Modell 3: $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{7!}{5!\cdot(7-5)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$

Hinweise zur Eingabe mit dem Taschenrechner:

- $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ ist der Binomialkoeffizient, Kurzschreibweise: $\binom{n}{k} = \binom{7}{5}$, Eingabe: 7 nCr 5
- Fällt $k!$ im Nenner weg, bleibt $\frac{n!}{(n-k)!}$; Eingabe: 7 nPr 5

[31] Cornelsen: 10.000 Aufgaben Mathematik

Übung 4:

Anke hat ihr Fahrrad mit einem dreistelligen Zahlenschloss (Ziffern jeweils von 0 bis 9) gesichert. Leider hat sie die Zahlenkombination vergessen.

a) Wie lange dauert es, alle Einstellungen durchzuprobieren, wenn sie für eine Einstellung 3 Sekunden benötigt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrraddieb das Schloss beim ersten Versuch „knacken" kann?

c) Wie verändern sich die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b), wenn ein vierstelliges Zahlenschloss vorliegt?

[32]

Lösung 4:

Wie lässt sich diese Fragestellung auf eines der Modelle übertragen?

Antwort:

- Die 10 Ziffern entsprechen 10 Kugeln: n = 10
- Es werden 3 Ziffern ausgewählt: k = 3
- Die Ziffern können sich wiederholen, die Reihenfolge spielt eine Rolle
  => Modell 1
- $n^k = 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

a) Es gibt 1000 Möglichkeiten, also braucht man 3000 Sekunden = 50 Minuten.

b) Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{1000} = 0{,}001$.

c) Bei einem vierstelligen Zahlenschloss gibt es $10^4 = 10000$ Möglichkeiten.
Um alle Einstellungen durchzuprobieren, benötigt man 30000 s = 8 h 20 min.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Schloss sofort zu knacken, wäre $\frac{1}{10000} = 0{,}0001$.

3.6 Weitere Übungen

Beachten Sie bitte den Ordner Übungsaufgaben.

[32] Cornelsen: 10.000 Aufgaben Mathematik

3.7 Das Lottomodell *)

Bisher wurde nur die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige beantwortet. Wie groß ist aber z.B. die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige?

Hierbei hilft folgende Veranschaulichung: Es gibt $\binom{49}{6} = 13.983.816$ Möglichkeiten, 6 aus 49 Kugeln (ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen) zu ziehen.

Man nehme an, die 6 gezogenen Kugeln werden nach der Ziehung in ein extra Gefäß gelegt. Es gibt also

6 gezogene Kugeln	43 übrige Kugeln

Es stellt sich nun die Frage nach den Kombinationsmöglichkeiten.

Fall: „6 Richtige“

- Es wurde auf 6 Kugeln aus dem Behälter „6 gezogene Kugeln“ und auf keine aus dem Behälter „43 übrige Kugeln“ getippt.
- Auf 6 Kugeln aus dem Behälter „6 gezogene Kugeln“ zu tippen, gibt es $\binom{6}{6} = 1$ Möglichkeit.
- Auf 0 Kugeln aus dem Behälter „43 übrige Kugeln“ zu tippen, gibt es $\binom{43}{0} = 1$ Möglichkeit.
- Es gibt also $\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0} = 1 \cdot 1 = 1$ Kombinationsmöglichkeit für „6 Richtige“.
- Die Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ beträgt also $\frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816} \approx 0.00000007$.

Fall: „5 Richtige“

- Es wurde auf 5 Kugeln aus dem Behälter „6 gezogene Kugeln“ und auf 1 aus dem Behälter „43 übrige Kugeln“ getippt.
- Auf 5 Kugeln aus dem Behälter „6 gezogene Kugeln“ zu tippen, gibt es $\binom{6}{5} = 6$ Möglichkeiten.
- Auf 1 Kugeln aus dem Behälter „43 übrige Kugeln“ zu tippen, gibt es $\binom{43}{1} = 43$ Möglichkeiten.
- Es gibt also $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 6 \cdot 43 = 258$ Kombinationsmöglichkeiten für „5 Richtige“.
- Die Wahrscheinlichkeit für „5 Richtige“ beträgt also $\frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{6\cdot 43}{13.983.816} \approx 0{,}000018$.

Fall: „4 Richtige“

- Die Wahrscheinlichkeit für „4 Richtige“ beträgt $\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15\cdot 903}{13.983.816} \approx 0{,}00096$.

3.7.1 Formel: Lottomodell

rote Kugeln :	$r =$	6
schwarze Kugeln :	$s =$	43
=> Gesamtzahl :	$r + s =$	49
gezogene Kugeln :	$k =$	6
Treffer (rote Kugeln) :	$t =$	4

$$P(\text{ t rote Kugeln}) = \frac{\binom{r}{t} \cdot \binom{s}{k-t}}{\binom{r+s}{k}} = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13.983.816} \cong 0{,}00096861972440$$

Übung:

Bestimmen Sie beim Lotto „5 aus 29“ die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige.

Lösung:

Lottomodell

rote Kugeln :	r =	5
schwarze Kugeln :	s =	24
=> Gesamtzahl :	r + s =	29
gezogene Kugeln :	k =	5
Treffer (rote Kugeln) :	t =	4

$$P(\text{ t rote Kugeln}) = \frac{\binom{r}{t} \cdot \binom{s}{k-t}}{\binom{r+s}{k}} = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{29}{5}} = \frac{5 \cdot 24}{118.755} \cong 0{,}00101048376910$$

3.7.2 Formel: Hypergeometrische Verteilung (Urnenmodell) *)

Es kann noch der Fall $k \neq r$ eintreten: Die Anzahl der roten Kugeln ist dann ungleich der Anzahl der gezogenen Kugeln.

Hypergeometrische Verteilung (Urnenmodell - ohne Zurücklegen, ungeordnet)

rote Kugeln :	r =	12
schwarze Kugeln :	s =	37
=> Gesamtzahl :	r + s =	49
gezogene Kugeln :	k =	6
Treffer (rote Kugeln) :	t =	4

$$P(\text{ t rote Kugeln}) = \frac{\binom{r}{t} \cdot \binom{s}{k-t}}{\binom{r+s}{k}} = \frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{37}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{495 \cdot 666}{13.983.816} \cong 0{,}02357510996998$$

Übung:

In einer Klasse sind m = 12 Mädchen und j = 18 Jungen. Es werden zufällig k = 6 Personen ausgewählt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass t = 4 der gewählten Personen Mädchen sind.

Lösung:

Hypergeometrische Verteilung (Urnenmodell)

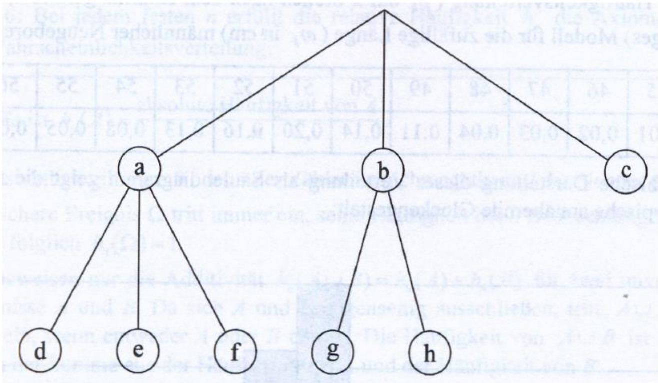
Mädchen :	m =	12
Jungen :	j =	18
=> Gesamtzahl :	m + j =	30
Auswahl SuS :	k =	6
Treffer (Mädchen) :	t =	4

$$P(\text{ t Mädchen}) = \frac{\binom{m}{t} \cdot \binom{j}{k-t}}{\binom{m+j}{k}} = \frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{18}{2}}{\binom{30}{6}} = \frac{495 \cdot 153}{593.775} \cong 0{,}12754831375521$$

4 Mehrstufige Zufallsexperimente

4.1 Baumdiagramm und Ergebnismenge

Ein Vorgang mit zufälligem Ergebnis, der sich aus mehreren Teilvorgängen zusammensetzt, heißt mehrstufiger Vorgang.



Ein Baumdiagramm veranschaulicht Ablauf eines mehrstufigen Vorgangs.[33]

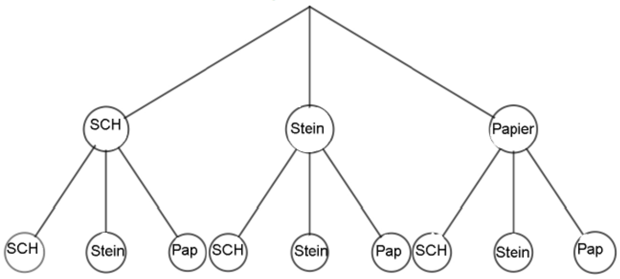
$$\Omega = \{ad, ae, af, bg, bh, c\}$$

- Jedem möglichen Ablauf des Gesamtvorgangs entspricht genau ein Pfad durch das Baumdiagramm.
- Ergebnismenge – Menge aller möglichen Pfade

Beispiel 2 (Schere–Stein–Papier)

1. Person

2. Person



Günstige Ergebnisse für 1. Person:

$A = \{$Sch-Pap, Stein-Sch, Pap-Stein$\}$

[33] Aus: Warmuth, E.: 8.3. Pfadregeln - Vierfeldertafeln, 2019/2020, S. 3

4.2 Produktregel (1. Pfadregel)

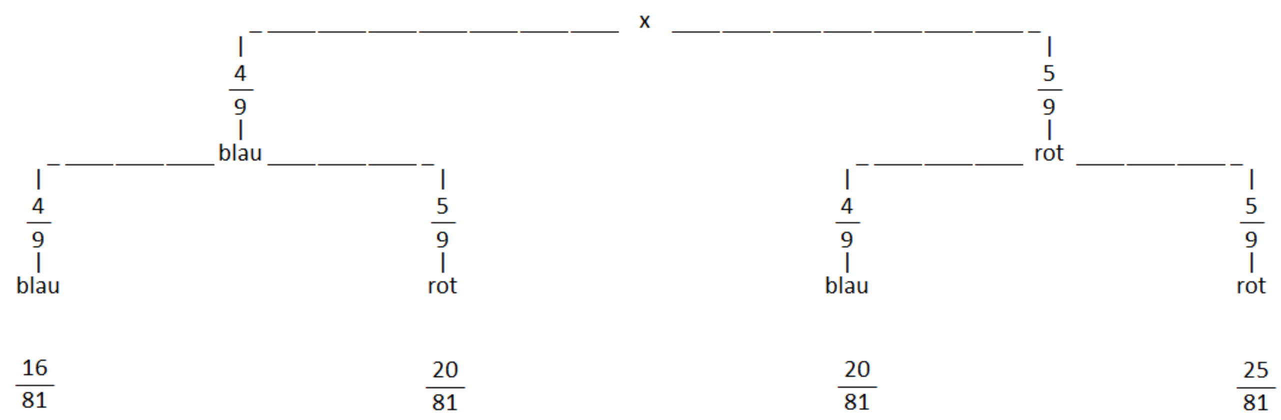
Produktregel (1. Pfadregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

[34]

Beispiel: Kugeln ziehen (MIT Zurücklegen)

Anzahl der Ziehungen:	2	
Anzahl der Möglichkeiten:	2	
Möglichkeiten:	blau	rot
Anzahl:	4	5
Anzahl gesamt:	9	
Mit Zurücklegen/Wdh.:	ja	



P((blau, blau)) =[35] P(blau, blau) = $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$

Übung: Berechnen Sie die Pfadwahrscheinlichkeiten für den Fall, dass die Kugeln NICHT zurückgelegt werden.

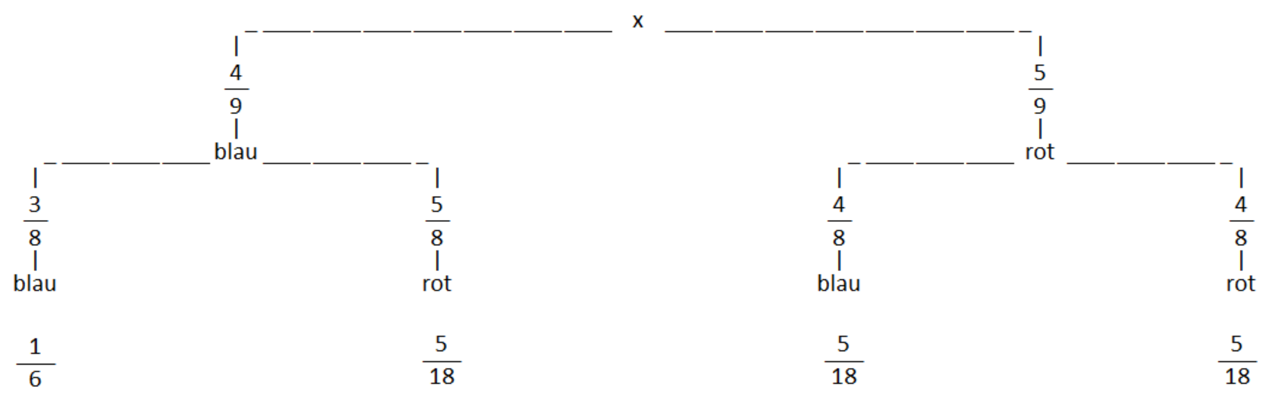
---

[34] Aus: Warmuth, E.: 8.3. Pfadregeln - Vierfeldertafeln, 2019/2020, S. 12

[35] Der Einfachheit wegen werden die Klammern oft weggelassen.

Lösung: Kugeln ziehen (OHNE Zurücklegen)

Anzahl der Ziehungen:	2	
Anzahl der Möglichkeiten:	2	
Möglichkeiten:	blau	rot
Anzahl:	4	5
Anzahl gesamt:	9	
Mit Zurücklegen/Wdh.:	nein	



$$P(\text{blau, blau}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

Übung:

Berechnen Sie P(blau, blau) mit Hilfe der hypergeometrischen Verteilung.

Lösung:

Hypergeometrische Verteilung (Urnenmodell)

blaue Kugeln :	b =	4
rote Kugeln :	r =	5
=> Gesamtzahl :	b + r =	9
Auswahl SuS :	k =	2
Treffer (blaue Kugeln) :	t =	2

$$P(\text{ t blaue Kugeln}) = \frac{\binom{b}{t} \cdot \binom{r}{k-t}}{\binom{b+r}{k}} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{6 \cdot 1}{36} \cong 0{,}16666666666667$$

4.3 Summenregel (2. Pfadregel)

Summenregel (2. Pfadregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die für dieses Ereignis günstig sind.[36]

Beispiel: Kugeln ziehen (OHNE Zurücklegen)

Aus einem Gefäß mit 4 blauen und 5 roten Kugeln werden 4 Kugeln OHNE Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 gezogenen Kugeln die gleiche Farbe besitzen?

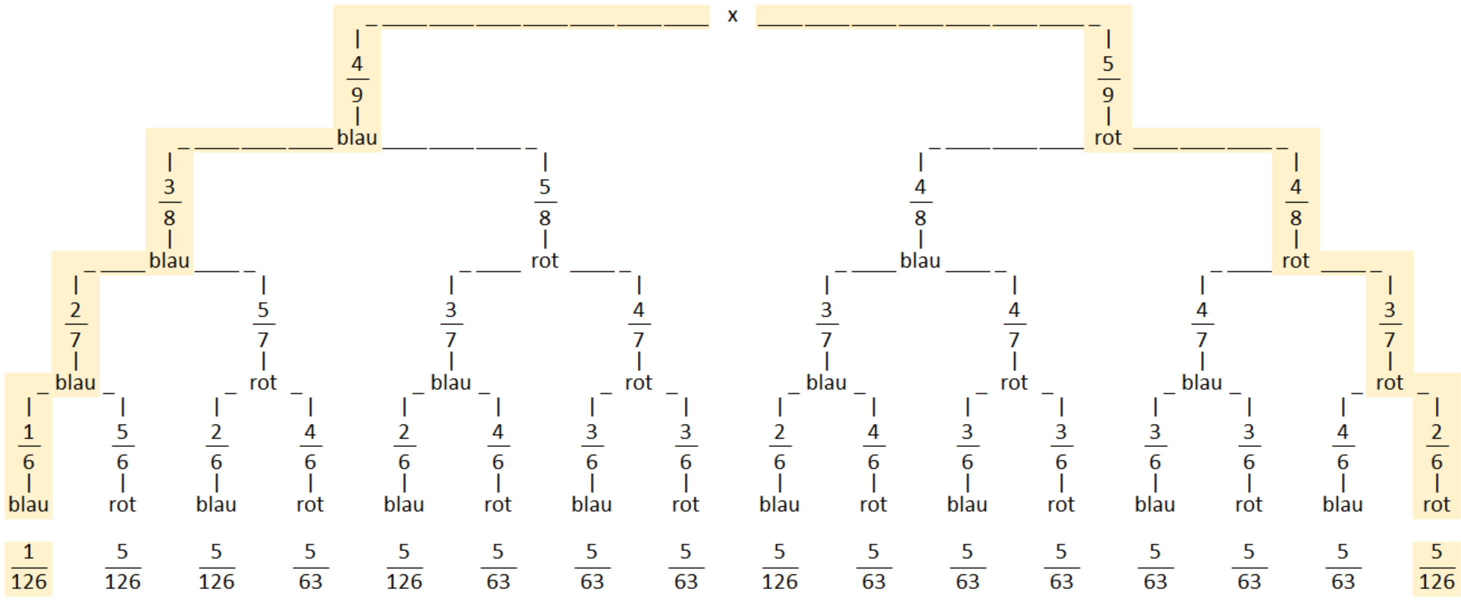
Anzahl der Ziehungen:	4	
Anzahl der Möglichkeiten:	2	
Möglichkeiten:	blau	rot
Anzahl:	4	5
Anzahl gesamt:	9	
Mit Zurücklegen/Wdh.:	nein	

☐ Rechnungen ausblenden

☐ Ergebnisse ausblenden

Ereignis E: Alle ausgewählten Pfade

P(E) = 1/21 ≅ 0,0476



P(blau , blau , blau , blau) = $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}$ ≅ 1/126 ≅ 0,00793651

P(rot , rot , rot , rot) = $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$ ≅ 5/126 ≅ 0,03968254

---

[36] Aus: Warmuth, E.: 8.3. Pfadregeln - Vierfeldertafeln, 2019/2020, S. 13

Übung: Kugeln ziehen (MIT Zurücklegen)

Aus einem Gefäß mit 4 blauen und 2 roten Kugeln werden 4 Kugeln MIT Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass MINDESTENS 3 blaue Kugeln gezogen werden?

Lösung:

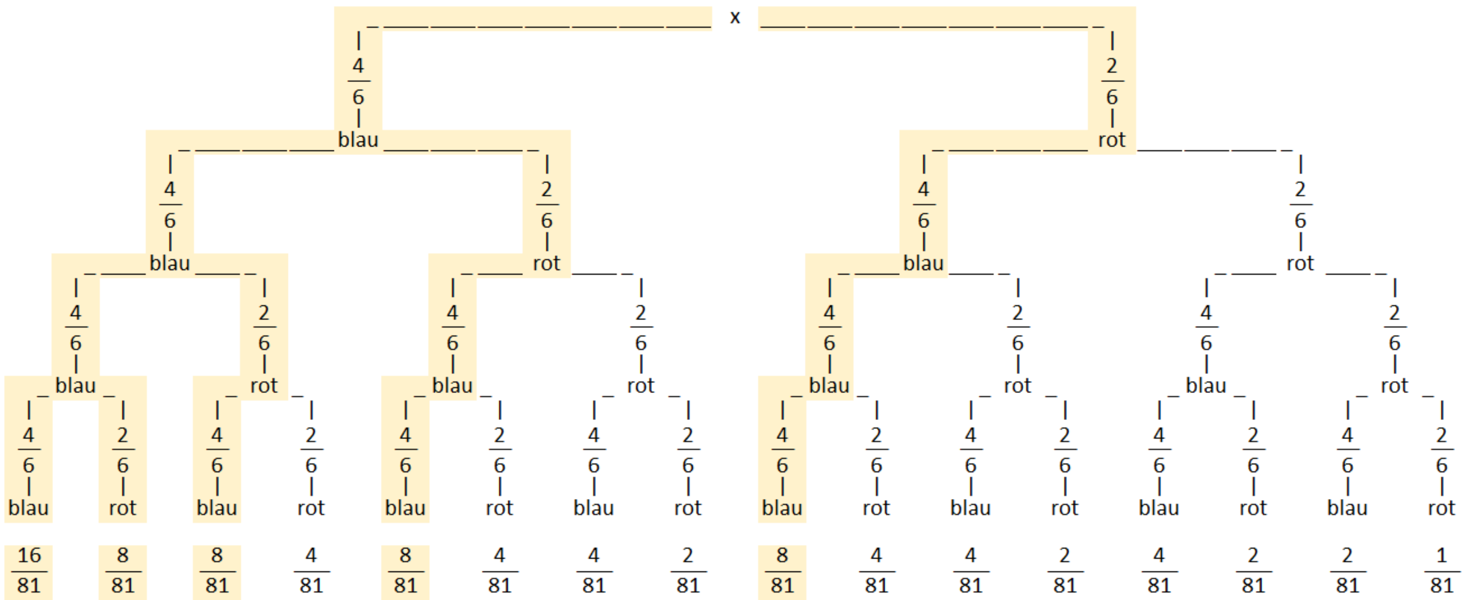
Anzahl der Ziehungen:	4	
Anzahl der Möglichkeiten:	2	
Möglichkeiten:	blau	rot
Anzahl:	4	2
Anzahl gesamt:	6	
Mit Zurücklegen/Wdh.:	ja	

☐ Rechnungen ausblenden

☐ Ergebnisse ausblenden

Ereignis E: Alle ausgewählten Pfade

P(E) = 16/27 ≅ 0,5926



Übung: Kugeln ziehen (MIT Zurücklegen)

Aus einem Gefäß mit 4 blauen und 2 roten Kugeln werden 4 Kugeln MIT Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass HÖCHSTENS 3 blaue Kugeln gezogen werden?

1. Lösungsmöglichkeit (sehr aufwendig):

Alle günstigen Pfade werden berechnet: $P(E) = \frac{8}{81} + \frac{8}{81} + \frac{4}{81} + \frac{8}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81} + \frac{2}{81} + \frac{8}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81} + \frac{2}{81} + \frac{4}{81} + \frac{2}{81} + \frac{2}{81} + \frac{1}{81} = \frac{65}{81}$

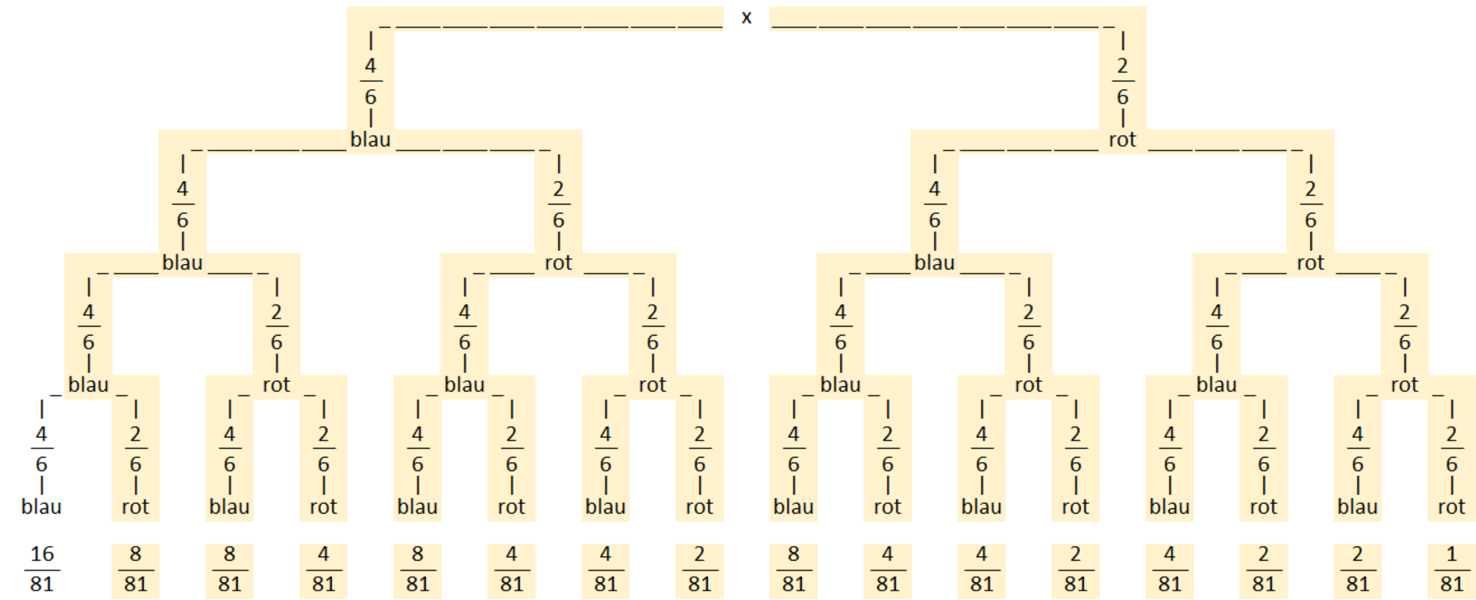
Anzahl der Ziehungen:	4	
Anzahl der Möglichkeiten:	2	
Möglichkeiten:	blau	rot
Anzahl:	4	2
Anzahl gesamt:	6	
Mit Zurücklegen/Wdh.:	ja	

☐ Rechnungen ausblenden

☐ Ergebnisse ausblenden

Ereignis E: Alle ausgewählten Pfade

P(E) = 65/81 ≅ 0,8025



2. Lösungsmöglichkeit (elegant): Berechnung über die Gegenwahrscheinlichkeit: $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$

4.4 Anwendung der hypergeometrischen Verteilung bei Baumdiagrammen *)

Variiert man die Aufgabenstellung auf OHNE Zurücklegen und OHNE Beachtung der Reihenfolge und GENAU eine Anzahl von Kugeln, kann die Wahrscheinlichkeit auch über die hypergeometrische Verteilung berechnet werden.

Übung: Kugeln ziehen (OHNE Zurücklegen, ungeordnet)

Aus einem Gefäß mit 4 blauen und 2 roten Kugeln werden 4 Kugeln OHNE Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass GENAU 3 blaue Kugeln gezogen werden?

Lösung (Baumdiagramm):

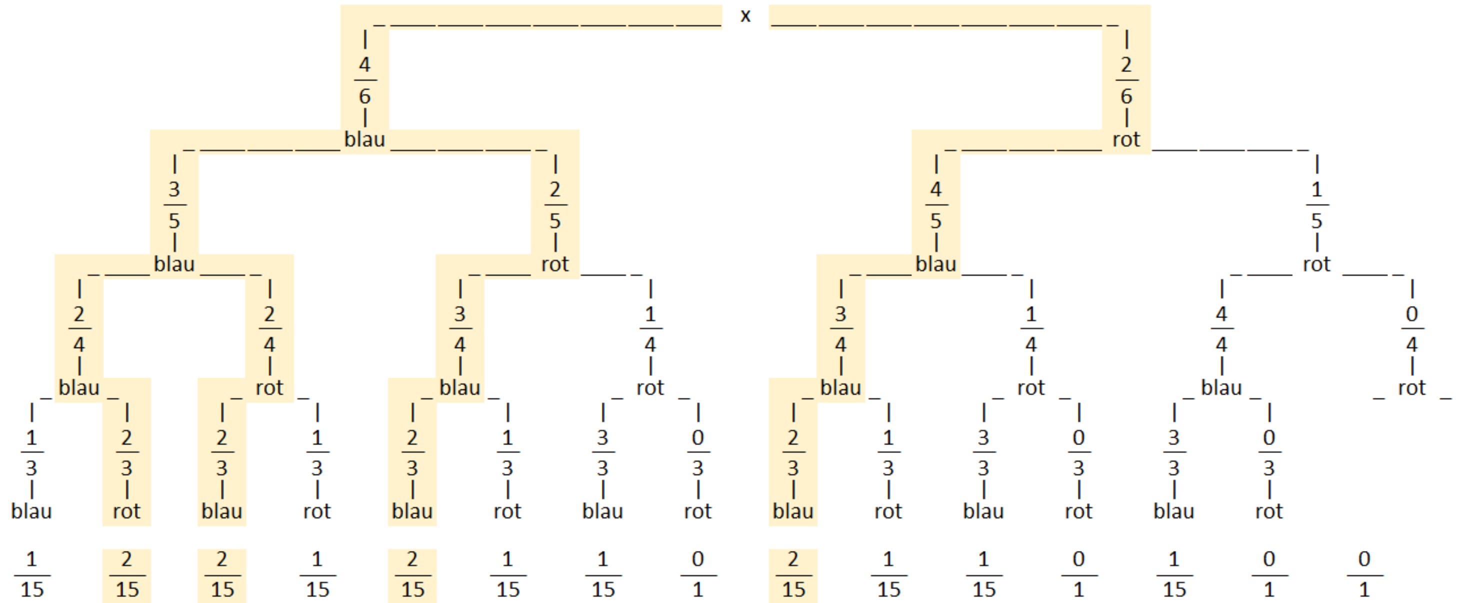
Anzahl der Ziehungen:	4	
Anzahl der Möglichkeiten:	2	
Möglichkeiten:	blau	rot
Anzahl:	4	2
Anzahl gesamt:	6	
Mit Zurücklegen/Wdh.:	nein	

☐ Rechnungen ausblenden

☐ Ergebnisse ausblenden

Ereignis E: Alle ausgewählten Pfade

P(E) = 8/15 ≅ 0,5333



Lösung (hypergeometrische Verteilung):

Hypergeometrische Verteilung (Urnenmodell - ohne Zurücklegen, ungeordnet)

blau Kugeln :	b =	4
rot Kugeln :	s =	2
=> Gesamtzahl :	b + s =	6
gezogene Kugeln :	k =	4
Treffer (blau Kugeln) :	t =	3

$$P(\text{ t blau Kugeln}) = \frac{\binom{b}{t} \cdot \binom{s}{k-t}}{\binom{b+s}{k}} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{6}{4}} = \frac{4 \quad \cdot \quad 2}{15} \cong 0{,}533333333333333$$

4.5 Weitere Übungen

Beachten Sie bitte den Ordner Übungsaufgaben.

4.6 Das Ziegenproblem *)

Aufgabe:

In einer Quizshow befinden sich ein Kandidat und ein Moderator.

Es gibt es drei verschlossene Türen.

Hinter zwei Türen steht jeweils eine Ziege, hinter der dritten Tür steht ein Auto.

Entscheidung 1: Der Kandidat darf eine Tür auswählen, hinter der er das Auto vermutet.

Nun schaut der Moderator hinter die *beiden anderen* Türen und öffnet eine Tür, hinter der eine Ziege steht. Es bleiben also nur noch zwei verschlossene Türen übrig.

Entscheidung 2: Der Kandidat darf sich nun nochmal entscheiden: Entweder er bleibt bei seiner ursprünglichen Wahl oder er wechselt auf die andere Tür.

Frage: Sollte der Kandidat wechseln, nicht wechseln oder ist es egal?

Lösung:

Es empfiehlt sich eine Fallunterscheidung.

1. Fall: Der Kandidat *bleibt* bei seiner Entscheidung. Man betrachte das zugehörige Baumdiagramm:

	x	
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
Entscheidung 1:	Ziege	Auto
	1	1
Entscheidung 2:	Ziege	Auto

P(Ziege, Ziege) = $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

P(Auto, Auto) = $\frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Die Wahrscheinlichkeit, nach der Entscheidung 2 ein Auto zu gewinnen, beträgt demnach $\frac{1}{3}$.

2. Fall: Der Kandidat *wechselt* die Tür. Man betrachte das zugehörige Baumdiagramm:

	x	
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
Entscheidung 1:	Ziege	Auto
	1	1
Entscheidung 2:	Auto	Ziege

P(Ziege, Auto) = $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

P(Auto, Ziege) = $\frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Die Wahrscheinlichkeit, nach der Entscheidung 2 ein Auto zu gewinnen, beträgt demnach $\frac{2}{3}$.

Antwort: Der Kandidat sollte also die Tür wechseln, da sich dadurch die Wahrscheinlichkeit das Auto zu gewinnen von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$ verdoppelt!

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit *), Unabhängigkeit, Vierfeldertafel und Baumdiagramm

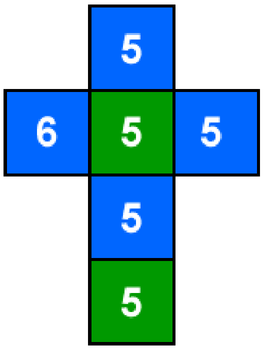
5.1.1 Beispiel zur bedingten Wahrscheinlichkeit (Würfelnetz) *)

Ein Würfel mit dem abgebildeten Netz wurde verdeckt geworfen.

Es gibt folgende Ereignisse:

A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.



Es gilt: $P(A) = \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$

$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$

Wenn man jedoch bereits weiß, dass eine blaue Fläche gewürfelt wurde, beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Fünf $\frac{3}{4}$, weil auf 3 von 4 blauen Feldern eine Fünf ist.

Es handelt sich hierbei um die *bedingte Wahrscheinlichkeit*[37] $P_B(A) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

(gelesen: „P von A unter der Bedingung B“).

Darstellung im Baumdiagramm:

x

$P(B) =$ 0,6667 | $P(\overline{B}) =$ 0,3333

B | $\overline{B}$

$P_B(A) =$ 0,75 | $P_B(\overline{A}) =$ 0,25 | $P_{\overline{B}}(A) =$ 1 | $P_{\overline{B}}(\overline{A}) =$ 0

A | $\overline{A}$ | A | $\overline{A}$

$P(B \cap A) =$ 0,5 | $P(B \cap \overline{A}) =$ 0,1667 | $P(\overline{B} \cap A) =$ 0,3333 | $P(\overline{B} \cap \overline{A}) =$ 0

Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $P_B(A)$ ist im Baumdiagramm also eine Zweigwahrscheinlichkeit.

[37] Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist in diesem Skript als Zusatzstoff gekennzeichnet. Zum besseren Verständnis der stochastischen Unabhängigkeit (siehe S. 112) halte ich sie jedoch für hilfreich.

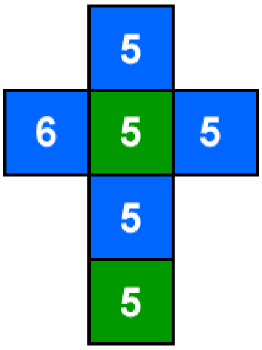
Übung:

Ein Würfel mit dem abgebildeten Netz wurde verdeckt geworfen.

Es gibt folgende Ereignisse:

A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.



Es gilt: $P(A) = \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$

$P(B) = \frac{4}{6} = 0{,}\overline{6}$

Ermitteln Sie $P_A(B)$, erläutern Sie den Unterschied zu $P_B(A)$ und zeichnen Sie ein vollständiges Baumdiagramm mit allen Zweig- und Pfadwahrscheinlichkeiten.

Lösung:

Der Unterschied liegt darin, dass man nun weiß, dass eine Fünf gewürfelt wurde. Somit gibt es nur noch 3 von 5 Feldern, die blau sein können.

x

$P(A) =$ 0,8333 $\quad$ $P(\overline{A}) =$ 0,1667

A $\quad$ $\overline{A}$

$P_A(B) =$ 0,6 $\quad$ $P_A(\overline{B}) =$ 0,4 $\quad$ $P_{\overline{A}}(B) =$ 1 $\quad$ $P_{\overline{A}}(\overline{B}) =$ 0

B $\quad$ $\overline{B}$ $\quad$ B $\quad$ $\overline{B}$

$P(A \cap B) =$ 0,5 $\quad$ $P(A \cap \overline{B}) =$ 0,3333 $\quad$ $P(\overline{A} \cap B) =$ 0,1667 $\quad$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$ 0

5.2 Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit *)

Anhand des obigen Baumdiagramms lässt sich mithilfe der 1. Pfadregel erkennen:

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(A \cap B)$$

Hieraus lässt sich im Falle $P(A) \neq 0$ die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ableiten:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

5.3 Unabhängige Ereignisse *)

Die Ereignisse A und B (mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$) werden als *stochastisch unabhängig*[38] voneinander bezeichnet, wenn gilt:

$$P(B) = P_A(B)$$

Erläuterung der Unabhängigkeit:

Wenn es für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B *keine* Rolle spielt, ob A zuvor eingetreten ist, dann ist $P(B) = P_A(B)$. Die Wahrscheinlichkeit von B wird durch das Eintreten von A also NICHT verändert. A und B sind dann stochastisch UNabhängig voneinander.

Das Gegenteil von der UNabhängigkeit ist die ABhängigkeit:

Wenn es für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B *eine* Rolle spielt, ob A zuvor eingetreten ist, dann ist $P(B) \neq P_A(B)$. Die Wahrscheinlichkeit von B WIRD durch das Eintreten von A also verändert. A und B sind also NICHT stochastisch UNabhängig, sondern stochastisch ABhängig voneinander.

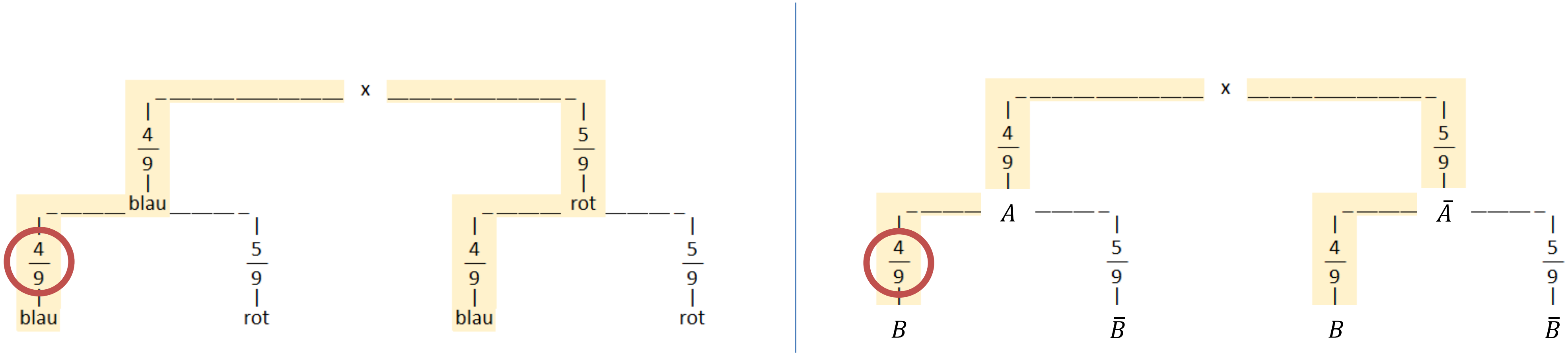
[38] Bei diesem Kriterium der stochastischen Unabhängigkeit wird die bedingte Wahrscheinlichkeit verwendet. Es ist jedoch auch möglich, sie ohne diese zu definieren (siehe S. 116).

5.3.1 Beispiel (Ziehen MIT Zurücklegen)

In einem Gefäß befinden sich 4 blaue und 5 rote Kugeln. Es wird 2-mal eine Kugel gezogen, die gleich nach der Ziehung *wieder zurückgelegt* wird.

A: Bei der *1. Ziehung* wird eine blaue Kugel gezogen.
B: Bei der *2. Ziehung* wird eine blaue Kugel gezogen.

Man berechne $P(B)$ mithilfe eines Baumdiagramms (zwei gleichwertige Darstellungsmöglichkeiten):



Die Pfade, die für B günstig sind, sind *gelb* markiert. Es ergibt sich nach der 1. und 2. Pfadregel:

$$P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81} + \frac{20}{81} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$$

Zudem ist $P_A(B)$ im Baumdiagramm *rot* markiert, sodass erkennbar ist: $P_A(B) = P(B)$

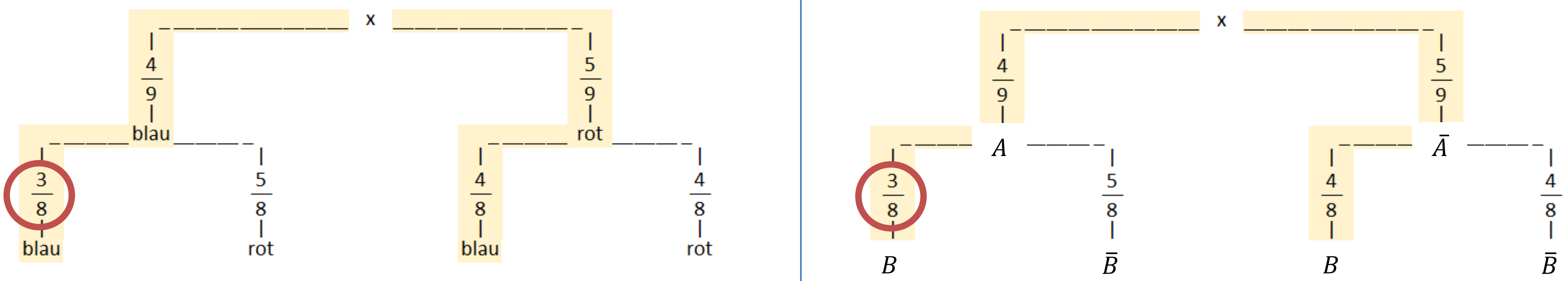
Dadurch, dass die gezogene Kugel nach der 1. Ziehung wieder zurückgelegt wird, spielt es für die 2. Ziehung keine Rolle, wie die 1. Ziehung ausgegangen ist. => A und B sind also stochastisch unabhängig.

5.3.2 Beispiel (Ziehen OHNE Zurücklegen)

In einem Gefäß befinden sich 4 blaue und 5 rote Kugeln. Es wird 2-mal eine Kugel gezogen, die nach der Ziehung NICHT zurückgelegt wird.

A: Bei der *1. Ziehung* wird eine blaue Kugel gezogen.
B: Bei der *2. Ziehung* wird eine blaue Kugel gezogen.

Man berechne $P(B)$ mithilfe eines Baumdiagramms (zwei gleichwertige Darstellungsmöglichkeiten):



Die Pfade, die für B günstig sind, sind *gelb* markiert. Es ergibt sich nach der 1. und 2. Pfadregel:

$$P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{12}{72} + \frac{20}{72} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$

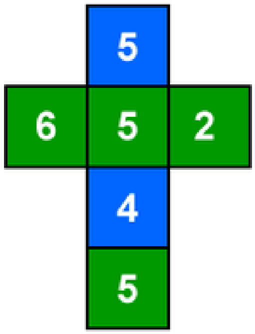
Zudem ist $P_A(B)$ im Baumdiagramm *rot* markiert, sodass erkennbar ist: $P_A(B) \neq P(B)$, weil $\frac{3}{8} \neq \frac{4}{9}$ ist.

Dadurch, dass die gezogene Kugel nach der 1. Ziehung NICHT zurückgelegt wird, verändern sich die Wahrscheinlichkeiten der 2. Ziehung.
=> A und B sind NICHT stochastisch *un*abhängig. Anders formuliert: A und B sind stochastisch *ab*hängig.

(Hinweis: Für B spielt es anscheinend keine Rolle, welches Modell (mit oder ohne Zurücklegen) gewählt wird, da in beiden Fällen $P(B) = \frac{4}{9}$ ist. Dies war jedoch nicht Gegenstand der Betrachtung, sondern es wurde betrachtet, ob es eine Rolle spielt, ob A (1. Ziehung: blaue Kugel) eingetreten ist.)

5.3.3 Übung: Stochastische Unabhängigkeit (Würfelnetz)

Ein Würfel mit dem abgebildeten Netz wurde verdeckt geworfen.



Es gibt folgende Ereignisse:

A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.

Aufgaben:

1. Erstellen Sie ein Baumdiagramm, welches im 1. Schritt mit A bzw. $\bar{A}$ beginnt und im 2. Schritt B bzw. $\bar{B}$ enthält. Tragen Sie alle Zweig- und Pfadwahrscheinlichkeiten ein.
2. Erstellen Sie ein Baumdiagramm, welches im 1. Schritt mit B bzw. $\bar{B}$ beginnt und im 2. Schritt A bzw. $\bar{A}$ enthält. Tragen Sie alle Zweig- und Pfadwahrscheinlichkeiten ein.
3. Überprüfen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

Lösung:

x

$P(A) =$ 0,5 | $P(\bar{A}) =$ 0,5

A: $P_A(B) =$ 0,3333 → B; $P_A(\bar{B}) =$ 0,6667 → $\bar{B}$

$\bar{A}$: $P_{\bar{A}}(B) =$ 0,3333 → B; $P_{\bar{A}}(\bar{B}) =$ 0,6667 → $\bar{B}$

$P(A \cap B) =$ 0,1667 | $P(A \cap \bar{B}) =$ 0,3333 | $P(\bar{A} \cap B) =$ 0,1667 | $P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ 0,3333

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} = P_A(B)$$

x

$P(B) =$ 0,3333 | $P(\bar{B}) =$ 0,6667

B: $P_B(A) =$ 0,5 → A; $P_B(\bar{A}) =$ 0,5 → $\bar{A}$

$\bar{B}$: $P_{\bar{B}}(A) =$ 0,5 → A; $P_{\bar{B}}(\bar{A}) =$ 0,5 → $\bar{A}$

$P(B \cap A) =$ 0,1667 | $P(B \cap \bar{A}) =$ 0,1667 | $P(\bar{B} \cap A) =$ 0,3333 | $P(\bar{B} \cap \bar{A}) =$ 0,3333

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = P_B(A)$$

Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig. (siehe Alternative auf S. 117)

5.4 Alternatives Kriterium bzw. Definition der Unabhängigkeit

Bisher ist für die *stochastische Unabhängigkeit* bekannt (siehe S. 112):

> Die Ereignisse A und B (mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$) werden als *stochastisch unabhängig* voneinander bezeichnet, wenn gilt:
>
> $$P_A(B) = P(B) \qquad \text{(Gleichung 1)}$$

(Mit anderen Worten: Wenn das Ereignis A nicht die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B beeinflusst, sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig.)

Zudem gilt für die *bedingte Wahrscheinlichkeit* (siehe S. 111):

> $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{(Gleichung 2)}$$

Setzt man nun in Gleichung 1 für $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ein (was man aufgrund von Gleichung 2 tun darf), ergibt sich:

> Die Ereignisse A und B (mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$) werden als *stochastisch unabhängig* voneinander bezeichnet, wenn gilt:
>
> $$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

Nach Umformung erhält man:

> Die Ereignisse A und B werden als *stochastisch unabhängig* voneinander bezeichnet, wenn gilt:
>
> $$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Dieses Kriterium kann auch als *Definition* der Unabhängigkeit[39] angesehen werden und ermöglicht eine alternative Vorgehensweise bei der Überprüfung der stochastischen Unabhängigkeit, wie an nachfolgenden Beispielen gezeigt werden soll.

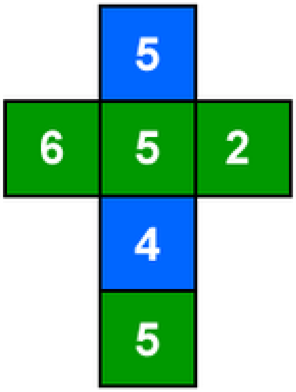
---

[39] Der Vorteil dieser Definition besteht darin, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit nicht bekannt sein muss.

5.4.1 Beispiel: Stochastische Unabhängigkeit (alternatives Kriterium)

In der Übung auf S. 115 würde bereits folgende Aufgabe behandelt:

Ein Würfel mit dem abgebildeten Netz wurde verdeckt geworfen.



Es gibt folgende Ereignisse:

A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.

Mithilfe der Pfadregeln wurde ermittelt:

$P(B) = P_A(B)$ bzw. $P(A) = P_B(A)$

Somit sind A und B stochastisch unabhängig.

Man kann jedoch auch leicht folgende Wahrscheinlichkeiten durch Auszählen der Felder ermitteln:

$P(A) = \frac{3}{6}$ (3 der 6 Felder enthalten eine 5.)

$P(B) = \frac{2}{6}$ (2 der 6 Felder sind blau.)

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ (1 von 6 Feldern ist sowohl blau als auch mit einer 5 belegt.)

Man überprüfe nun, ob gilt:

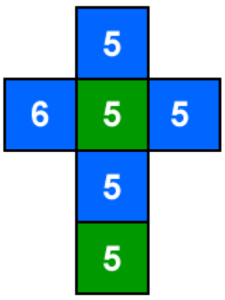
$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Dies trifft zu, da $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Somit sind die Ereignisse A und B auch nach dem alternativen Kriterium stochastisch unabhängig.

Übung:

Ein Würfel mit dem abgebildeten Netz wurde verdeckt geworfen.



Es gibt folgende Ereignisse:

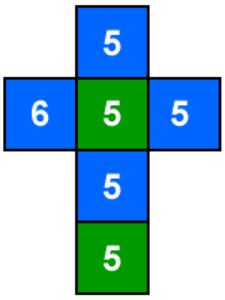
A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.

Überprüfen Sie mit Hilfe des alternativen Kriteriums, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

Lösung:

Man kann folgende Wahrscheinlichkeiten durch Auszählen der Felder ermitteln:



$P(A) = \frac{5}{6}$ (5 der 6 Felder enthalten eine 5.)

$P(B) = \frac{4}{6}$ (4 der 6 Felder sind blau.)

$P(A \cap B) = \frac{3}{6}$ (3 von 6 Feldern sind sowohl blau als auch mit einer 5 belegt.)

Man überprüfe nun, ob gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Dies trifft nicht zu, da gilt: $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{36} \neq \frac{3}{6}$.

Somit sind die Ereignisse A und B auch nach dem alternativen Kriterium nicht stochastisch unabhängig. Sie sind also stochastisch abhängig.

5.5 Vierfeldertafel

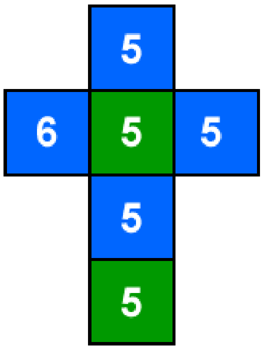
Beispiel:

Ein Würfel mit dem abgebildeten Netz wurde verdeckt geworfen.

Es gibt folgende Ereignisse:

A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.



Es lässt sich eine Vierfeldertafel aufstellen:

	B	$\bar{B}$	
A	$\lvert A \cap B\rvert =$ 3	$\lvert A \cap \bar{B}\rvert =$ 2	$\lvert A\rvert =$ 5
$\bar{A}$	$\lvert \bar{A} \cap B\rvert =$ 1	$\lvert \bar{A} \cap \bar{B}\rvert =$ 0	$\lvert \bar{A}\rvert =$ 1
	$\lvert B\rvert =$ 4	$\lvert \bar{B}\rvert =$ 2	$\text{Summe} =$ 6

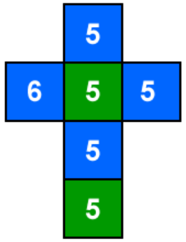
Übung: Ermitteln Sie eine Vierfeldertafel, die die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten bzw. relativen Häufigkeiten enthält.

Lösung:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) =$ 0,5	$P(A\cap \bar{B}) =$ 0,333333	$P(A) =$ 0,83333
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) =$ 0,166667	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ 0	$P(\bar{A}) =$ 0,16667
	$P(B) =$ 0,666667	$P(\bar{B}) =$ 0,333333	$P(\Omega) =$ 1

5.6 Zusammenhang zwischen bedingter Wahrscheinlichkeit *), Unabhängigkeit, Vierfeldertafel u. Baumdiagramm

5.6.1 Beispiel 1a (Vierfeldertafel mit abs. Häufigkeiten / stochastisch ABhängig)



Ereignisse:

A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.

	B	$\overline{B}$	Alle Einträge korrekt!	
A	$\lvert A \cap B \rvert =$ 3	$\lvert A \cap \overline{B} \rvert =$ 2	$\lvert A \rvert =$ 5	ok
$\overline{A}$	$\lvert \overline{A} \cap B \rvert =$ 1	$\lvert \overline{A} \cap \overline{B} \rvert =$ 0	$\lvert \overline{A} \rvert =$ 1	ok
	$\lvert B \rvert =$ 4	$\lvert \overline{B} \rvert =$ 2	Summe = 6	ok
	ok	ok	ok	

Berechnung der Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{\text{Summe}} = \frac{5}{6} = 0{,}833333$$

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$\Rightarrow$ $P(A) \neq P_B(A)$ $\Rightarrow$ A und B sind stochastisch ABhängig.

x

$P(A) \cong$ 0,8333 $\qquad$ $P(\overline{A}) \cong$ 0,1667

A: $P_A(B) \cong$ 0,6 $\qquad$ $P_A(\overline{B}) \cong$ 0,4

$\overline{A}$: $P_{\overline{A}}(B) \cong$ 1 $\qquad$ $P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cong$ 0

B $\qquad$ $\overline{B}$ $\qquad$ B $\qquad$ $\overline{B}$

$P(A \cap B) \cong$ 0,5 $\qquad$ $P(A \cap \overline{B}) \cong$ 0,3333 $\qquad$ $P(\overline{A} \cap B) \cong$ 0,1667 $\qquad$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong$ 0

x

$P(B) \cong$ 0,6667 $\qquad$ $P(\overline{B}) \cong$ 0,3333

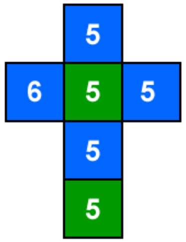
B: $P_B(A) \cong$ 0,75 $\qquad$ $P_B(\overline{A}) \cong$ 0,25

$\overline{B}$: $P_{\overline{B}}(A) \cong$ 1 $\qquad$ $P_{\overline{B}}(\overline{A}) \cong$ 0

A $\qquad$ $\overline{A}$ $\qquad$ A $\qquad$ $\overline{A}$

$P(B \cap A) \cong$ 0,5 $\qquad$ $P(B \cap \overline{A}) \cong$ 0,1667 $\qquad$ $P(\overline{B} \cap A) \cong$ 0,3333 $\qquad$ $P(\overline{B} \cap \overline{A}) \cong$ 0

5.6.2 Beispiel 1b (Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten / stochastisch ABhängig)



Ereignisse:

A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) \cong 0{,}5$	$P(A \cap \overline{B}) \cong 0{,}3333$	$P(A) \cong 0{,}8333$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) \cong 0{,}1667$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong 0$	$P(\overline{A}) \cong 0{,}1667$
	$P(B) \cong 0{,}6667$	$P(\overline{B}) \cong 0{,}3333$	$P(\Omega) = 1$

Berechnung der Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)} \cong \frac{0{,}8333}{1} \cong 0{,}8333$$

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cong \frac{0{,}5}{0{,}6667} \cong 0{,}75$$

$\Rightarrow$ $P(A) \neq P_B(A)$ $\Rightarrow$ A und B sind stochastisch ABhängig.

x

$P(A) \cong 0{,}8333$ $P(\overline{A}) \cong 0{,}1667$

A: $P_A(B) \cong 0{,}6$ $P_A(\overline{B}) \cong 0{,}4$

$\overline{A}$: $P_{\overline{A}}(B) \cong 1$ $P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cong 0$

B $\overline{B}$ B $\overline{B}$

$P(A \cap B) \cong 0{,}5$ $P(A \cap \overline{B}) \cong 0{,}3333$ $P(\overline{A} \cap B) \cong 0{,}1667$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong 0$

x

$P(B) \cong 0{,}6667$ $P(\overline{B}) \cong 0{,}3333$

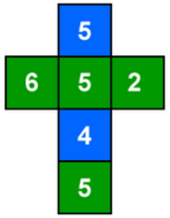
B: $P_B(A) \cong 0{,}75$ $P_B(\overline{A}) \cong 0{,}25$

$\overline{B}$: $P_{\overline{B}}(A) \cong 1$ $P_{\overline{B}}(\overline{A}) \cong 0$

A $\overline{A}$ A $\overline{A}$

$P(B \cap A) \cong 0{,}5$ $P(B \cap \overline{A}) \cong 0{,}1667$ $P(\overline{B} \cap A) \cong 0{,}3333$ $P(\overline{B} \cap \overline{A}) \cong 0$

5.6.3 Beispiel 2a (Vierfeldertafel mit abs. Häufigkeiten / stochastisch UNabhängig)



Ereignisse:

A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.

	B	$\overline{B}$	Alle Einträge korrekt!	
A	$\lvert A\cap B\rvert =$ 1	$\lvert A\cap \overline{B}\rvert =$ 2	$\lvert A\rvert =$ 3	ok
$\overline{A}$	$\lvert \overline{A}\cap B\rvert =$ 1	$\lvert \overline{A}\cap \overline{B}\rvert =$ 2	$\lvert \overline{A}\rvert =$ 3	ok
	$\lvert B\rvert =$ 2	$\lvert \overline{B}\rvert =$ 4	Summe = 6	ok
	ok	ok	ok	

Berechnung der Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{\text{Summe}} \cong \frac{3}{6} \cong 0{,}5$$

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{|A\cap B|}{|B|} \cong \frac{1}{2} \cong 0{,}5$$

$\Rightarrow$ $P(A) = P_B(A)$ $\Rightarrow$ A und B sind stochastisch UNabhängig.

x

$P(A) \cong$ 0,5 — $P(\overline{A}) \cong$ 0,5

A: $P_A(B) \cong$ 0,3333 — $P_A(\overline{B}) \cong$ 0,6667

$\overline{A}$: $P_{\overline{A}}(B) \cong$ 0,3333 — $P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cong$ 0,6667

B — $\overline{B}$ — B — $\overline{B}$

$P(A\cap B) \cong$ 0,1667 — $P(A\cap \overline{B}) \cong$ 0,3333 — $P(\overline{A}\cap B) \cong$ 0,1667 — $P(\overline{A}\cap \overline{B}) \cong$ 0,3333

x

$P(B) \cong$ 0,3333 — $P(\overline{B}) \cong$ 0,6667

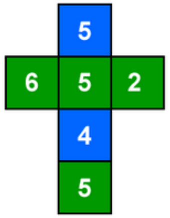
B: $P_B(A) \cong$ 0,5 — $P_B(\overline{A}) \cong$ 0,5

$\overline{B}$: $P_{\overline{B}}(A) \cong$ 0,5 — $P_{\overline{B}}(\overline{A}) \cong$ 0,5

A — $\overline{A}$ — A — $\overline{A}$

$P(B\cap A) \cong$ 0,1667 — $P(B\cap \overline{A}) \cong$ 0,1667 — $P(\overline{B}\cap A) \cong$ 0,3333 — $P(\overline{B}\cap \overline{A}) \cong$ 0,3333

5.6.4 Beispiel 2b (Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten / stochastisch UNabhängig)



Ereignisse:

A: Es fällt eine Fünf.

B: Es fällt eine blaue Fläche.

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) \cong$ 0,1667	$P(A \cap \overline{B}) \cong$ 0,3333	$P(A) \cong$ 0,5
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) \cong$ 0,1667	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong$ 0,3333	$P(\overline{A}) \cong$ 0,5
	$P(B) \cong$ 0,3334	$P(\overline{B}) \cong$ 0,6666	$P(\Omega) =$ 1

Berechnung der Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)} \cong \frac{0{,}5}{1} \cong 0{,}5$$

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cong \frac{0{,}1667}{0{,}3334} \cong 0{,}5$$

$\Rightarrow$ $P(A) = P_B(A)$ $\Rightarrow$ A und B sind stochastisch UNabhängig.

x

$P(A) \cong$ 0,5 | $P(\overline{A}) \cong$ 0,5

A: $P_A(B) \cong$ 0,3334 | $P_A(\overline{B}) \cong$ 0,6666

$\overline{A}$: $P_{\overline{A}}(B) \cong$ 0,3334 | $P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cong$ 0,6666

B | $\overline{B}$ | B | $\overline{B}$

$P(A \cap B) \cong$ 0,1667 | $P(A \cap \overline{B}) \cong$ 0,3333 | $P(\overline{A} \cap B) \cong$ 0,1667 | $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong$ 0,3333

x

$P(B) \cong$ 0,3334 | $P(\overline{B}) \cong$ 0,6666

B: $P_B(A) \cong$ 0,5 | $P_B(\overline{A}) \cong$ 0,5

$\overline{B}$: $P_{\overline{B}}(A) \cong$ 0,5 | $P_{\overline{B}}(\overline{A}) \cong$ 0,5

A | $\overline{A}$ | A | $\overline{A}$

$P(B \cap A) \cong$ 0,1667 | $P(B \cap \overline{A}) \cong$ 0,1667 | $P(\overline{B} \cap A) \cong$ 0,3333 | $P(\overline{B} \cap \overline{A}) \cong$ 0,3333

5.6.5 Übungen

a) Fahrradfahren mit Helm?

Übung: Es wurden 500 Personen befragt, ob sie einen Helm beim Fahrradfahren tragen. Das Ergebnis steht in der Vierfeldertafel.

1. Vervollständigen Sie die leeren Felder.
2. Angenommen, man weiß, dass eine Person männlich ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trägt sie dann einen Helm?
3. Angenommen, man weiß, dass eine Person einen Helm trägt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie dann weiblich?

A: männlich

B: Helm

	B	$\overline{B}$	
A	$\lvert A \cap B \rvert =$ 95	$\lvert A \cap \overline{B} \rvert =$ 125	$\lvert A \rvert =$ 220
$\overline{A}$	$\lvert \overline{A} \cap B \rvert =$ 150	$\lvert \overline{A} \cap \overline{B} \rvert =$ 130	$\lvert \overline{A} \rvert =$ 280
	$\lvert B \rvert =$ 245	$\lvert \overline{B} \rvert =$ 255	Summe = 500

Berechnung der Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{\text{Summe}} \cong$$

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \cong$$

x

$P(A) \cong$ $\qquad$ $P(\overline{A}) \cong$

A $\qquad$ $\overline{A}$

$P_A(B) \cong$ $\qquad$ $P_A(\overline{B}) \cong$ $\qquad$ $P_{\overline{A}}(B) \cong$ $\qquad$ $P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cong$

B $\qquad$ $\overline{B}$ $\qquad$ B $\qquad$ $\overline{B}$

$P(A \cap B) \cong$ $\qquad$ $P(A \cap \overline{B}) \cong$ $\qquad$ $P(\overline{A} \cap B) \cong$ $\qquad$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong$

x

$P(B) \cong$ $\qquad$ $P(\overline{B}) \cong$

B $\qquad$ $\overline{B}$

$P_B(A) \cong$ $\qquad$ $P_B(\overline{A}) \cong$ $\qquad$ $P_{\overline{B}}(A) \cong$ $\qquad$ $P_{\overline{B}}(\overline{A}) \cong$

A $\qquad$ $\overline{A}$ $\qquad$ A $\qquad$ $\overline{A}$

$P(B \cap A) \cong$ $\qquad$ $P(B \cap \overline{A}) \cong$ $\qquad$ $P(\overline{B} \cap A) \cong$ $\qquad$ $P(\overline{B} \cap \overline{A}) \cong$

Lösung (absolute Häufigkeiten): Es wurden 500 Personen befragt, ob sie einen Helm beim Fahrradfahren tragen.

Ereignisse:

A: männlich

B: Helm

	B	$\overline{B}$	
A	$\lvert A \cap B \rvert =$ 95	$\lvert A \cap \overline{B} \rvert =$ 125	$\lvert A \rvert =$ 220
$\overline{A}$	$\lvert \overline{A} \cap B \rvert =$ 150	$\lvert \overline{A} \cap \overline{B} \rvert =$ 130	$\lvert \overline{A} \rvert =$ 280
	$\lvert B \rvert =$ 245	$\lvert \overline{B} \rvert =$ 255	$\text{Summe} =$ 500

x
- $P(A) \cong$ 0,44 — A
  - $P_A(B) \cong$ 0,4318 — B — $P(A \cap B) \cong$ 0,19
  - $P_A(\overline{B}) \cong$ 0,5682 — $\overline{B}$ — $P(A \cap \overline{B}) \cong$ 0,25
- $P(\overline{A}) \cong$ 0,56 — $\overline{A}$
  - $P_{\overline{A}}(B) \cong$ 0,5357 — B — $P(\overline{A} \cap B) \cong$ 0,3
  - $P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cong$ 0,4643 — $\overline{B}$ — $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong$ 0,26

Berechnung der Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{\text{Summe}} \cong \frac{220}{500} \cong 0{,}44$$

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \cong \frac{95}{245} \cong 0{,}387755$$

$\Rightarrow$ $P(A) \neq P_B(A)$ $\Rightarrow$ A und B sind stochastisch ABhängig.

x
- $P(B) \cong$ 0,49 — B
  - $P_B(A) \cong$ 0,3878 — A — $P(B \cap A) \cong$ 0,19
  - $P_B(\overline{A}) \cong$ 0,6122 — $\overline{A}$ — $P(B \cap \overline{A}) \cong$ 0,3
- $P(\overline{B}) \cong$ 0,51 — $\overline{B}$
  - $P_{\overline{B}}(A) \cong$ 0,4902 — A — $P(\overline{B} \cap A) \cong$ 0,25
  - $P_{\overline{B}}(\overline{A}) \cong$ 0,5098 — $\overline{A}$ — $P(\overline{B} \cap \overline{A}) \cong$ 0,26

Wenn man weiß, dass eine Person männlich ist, trägt sie mit der Wahrscheinlichkeit $P_A(B) \cong 0{,}4318$ einen Helm.

Wenn man weiß, dass eine Person einen Helm trägt, ist sie mit der Wahrscheinlichkeit $P_B(\bar{A}) \cong 0{,}6122$ weiblich.

Übung: Stellen Sie eine Vierfeldertafel mit den Wahrscheinlichkeiten bzw. relativen Häufigkeiten auf und ermitteln Sie die Baumdiagramme.

Lösung (Wahrscheinlichkeiten bzw. relative Häufigkeiten): Es wurden 500 Personen befragt, ob sie einen Helm beim Fahrradfahren tragen.

Ereignisse:

A: männlich

B: Helm

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) \cong$ 0,19	$P(A \cap \overline{B}) \cong$ 0,25	$P(A) \cong$ 0,44
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) \cong$ 0,3	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong$ 0,26	$P(\overline{A}) \cong$ 0,56
	$P(B) \cong$ 0,49	$P(\overline{B}) \cong$ 0,51	$P(\Omega) =$ 1

x

- $P(A) \cong$ 0,44 — A
  - $P_A(B) \cong$ 0,4318 — B: $P(A \cap B) \cong$ 0,19
  - $P_A(\overline{B}) \cong$ 0,5682 — $\overline{B}$: $P(A \cap \overline{B}) \cong$ 0,25
- $P(\overline{A}) \cong$ 0,56 — $\overline{A}$
  - $P_{\overline{A}}(B) \cong$ 0,5357 — B: $P(\overline{A} \cap B) \cong$ 0,3
  - $P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cong$ 0,4643 — $\overline{B}$: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong$ 0,26

Berechnung der Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)} \cong \frac{0{,}44}{1} \cong 0{,}44$$

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cong \frac{0{,}19}{0{,}49} \cong 0{,}3878$$

$\Rightarrow$ $P(A) \neq P_B(A)$ $\Rightarrow$ A und B sind stochastisch ABhängig.

x

- $P(B) \cong$ 0,49 — B
  - $P_B(A) \cong$ 0,3878 — A: $P(B \cap A) \cong$ 0,19
  - $P_B(\overline{A}) \cong$ 0,6122 — $\overline{A}$: $P(B \cap \overline{A}) \cong$ 0,3
- $P(\overline{B}) \cong$ 0,51 — $\overline{B}$
  - $P_{\overline{B}}(A) \cong$ 0,4902 — A: $P(\overline{B} \cap A) \cong$ 0,25
  - $P_{\overline{B}}(\overline{A}) \cong$ 0,5098 — $\overline{A}$: $P(\overline{B} \cap \overline{A}) \cong$ 0,26

b) Oktoberfest[40]

Übung:

Im Festzelt feiern 140 Touristen, die eine Lederhose tragen, sowie 60 Touristen in normaler Kleidung. Hinzu kommen 10 Münchner mit Lederhose und 40 Münchner in Alltagskleidung.

A: Person ist ein Tourist

B: Person trägt eine Lederhose

Aufgaben:

1. Stellen Sie eine Vierfeldertafel auf.
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das man auf einen Touristen trifft?
3. Durch die Hitze wird eine Person ohnmächtig. Sie trägt eine Lederhose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Tourist?
4. Man trifft einen Münchner. Wie wahrscheinlich ist es, dass er keine Lederhose trägt?

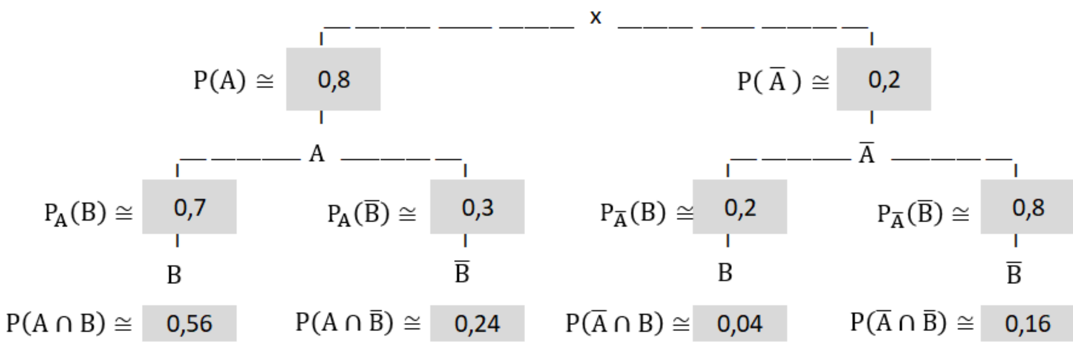
[40] Siehe auch: Bigalke/Köhler: MA-2

Lösung:

A: Person ist Tourist.

B: Person trägt eine Lederhose.

	B	$\bar{B}$	
A	$\|A \cap B\| =$ 140	$\|A \cap \bar{B}\| =$ 60	$\|A\| =$ 200
$\bar{A}$	$\|\bar{A} \cap B\| =$ 10	$\|\bar{A} \cap \bar{B}\| =$ 40	$\|\bar{A}\| =$ 50
	$\|B\| =$ 150	$\|\bar{B}\| =$ 100	Summe $=$ 250



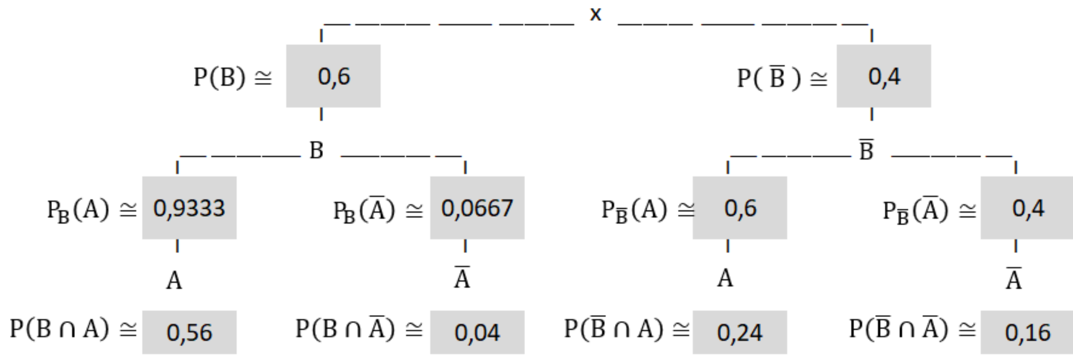
Berechnung der Randwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{\text{Summe}} \cong \frac{200}{250} \cong 0{,}8$$

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \cong \frac{140}{150} \cong 0{,}933333$$

$\Rightarrow$ $P(A) \neq P_B(A)$ $\Rightarrow$ A und B sind stochastisch ABhängig.



Die Wahrscheinlichkeit, dass man auf einen Touristen trifft, beträgt $P(A) = 0{,}8$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mit der Lederhose ein Tourist ist, beträgt $P_B(A) = 0{,}9\bar{3}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Münchener keine Lederhose trägt, beträgt $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0{,}8$.

5.6.6 Weitere Übungen

Beachten Sie bitte den Ordner Übungsaufgaben.

6 Zufallsgrößen und ihr Erwartungswert

6.1 Definition Zufallsgröße

Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlicheitsraum. Dann heißt jede Funktion

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ bzw. } \omega \mapsto X(\omega)$$

eine Zufallsgröße (Zufallsvariable).

Der Zufall steckt im ω. Steht das Ergebnis ω des Zufallsexperiments fest, dann steht auch der Wert $X(\omega)$ fest.

[41]

(Siehe: Beispiel, S. 130)

6.2 Verteilung und Erwartungswert E(X) einer Zufallsgröße

Es sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilung

Werte von X	x_1	x_2	$\dots$	x_r
$P(X = x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_r

Die Zahl

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_r \cdot p_r$$

heißt Erwartungswert von X.

[42]

Man betrachte den Zusammenhang zum arithmetischen Mittel (siehe S. 19), wenn zur Berechnung die relative Häufigkeit benutzt wird.

(Siehe: Beispiel, S. 131)

6.3 Beispiele und Übungen

[41] Aus: Warmuth, E.: 8.4. Zufallsgrößen – faire Spiele, 2019/2020, S. 4
[42] Aus: Warmuth, E.: 8.4. Zufallsgrößen – faire Spiele, 2019/2020, S. 6

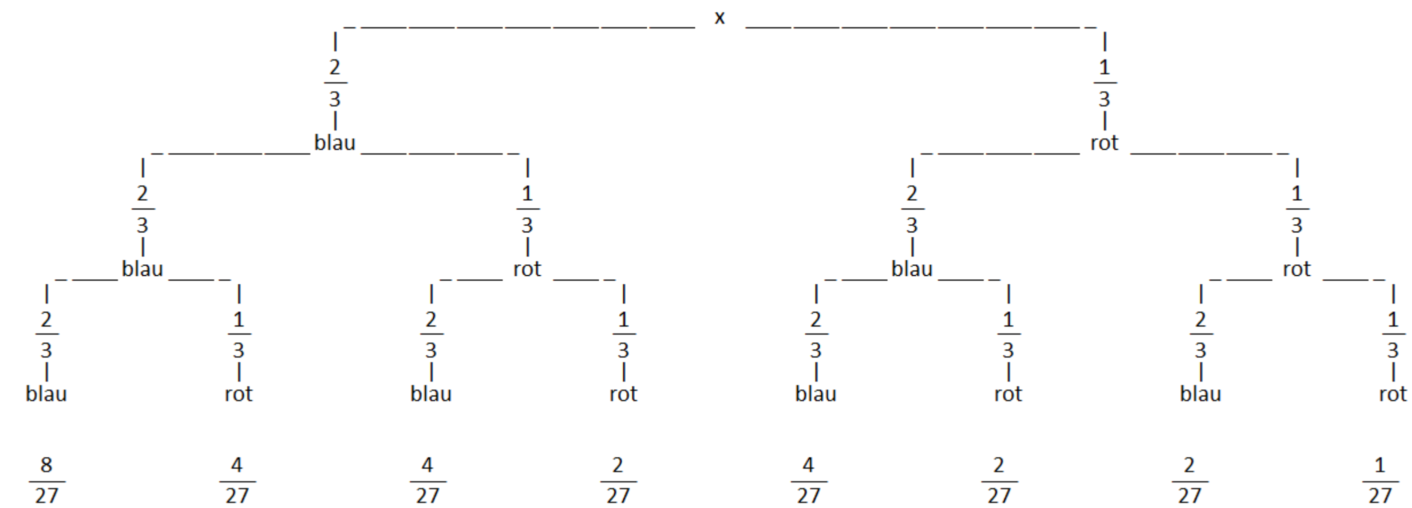
6.3.1 Beispiel (Zufallsgröße)

In einem Gefäß befinden sich 2 blaue und 1 rote Kugeln. Es werden 3 Kugeln MIT Zurücklegen gezogen.

Anzahl der Ziehungen:	3	
Anzahl der Möglichkeiten:	2	
Möglichkeiten:	blau	rot
Anzahl:	2	1
Anzahl gesamt:	3	
Mit Zurücklegen/Wdh.:	ja	

☐ Rechnungen ausblenden

☐ Ergebnisse ausblenden



Man bilde die Ergebnismenge:

Ω = {(blau, blau, blau), (blau, blau, rot), (blau, rot, blau), (blau, rot, rot), (rot, blau, blau), (rot, blau, rot), (rot, rot, blau), (rot, rot, rot))

Man definiere die Zufallsgröße X so, dass sie die Anzahl der blauen Kugeln angibt.

Hierdurch werden Ergebnisse zu Ereignissen „$X = x_i$“ zusammengefasst:

$X = 0$: {(rot, rot, rot)}

$X = 1$: {(blau, rot, rot), (rot, blau, rot), (rot, rot, blau)}

$X = 2$: {(blau, blau, rot), (blau, rot, blau), (rot, blau, blau)}

$X = 3$: {(blau, blau, blau)}

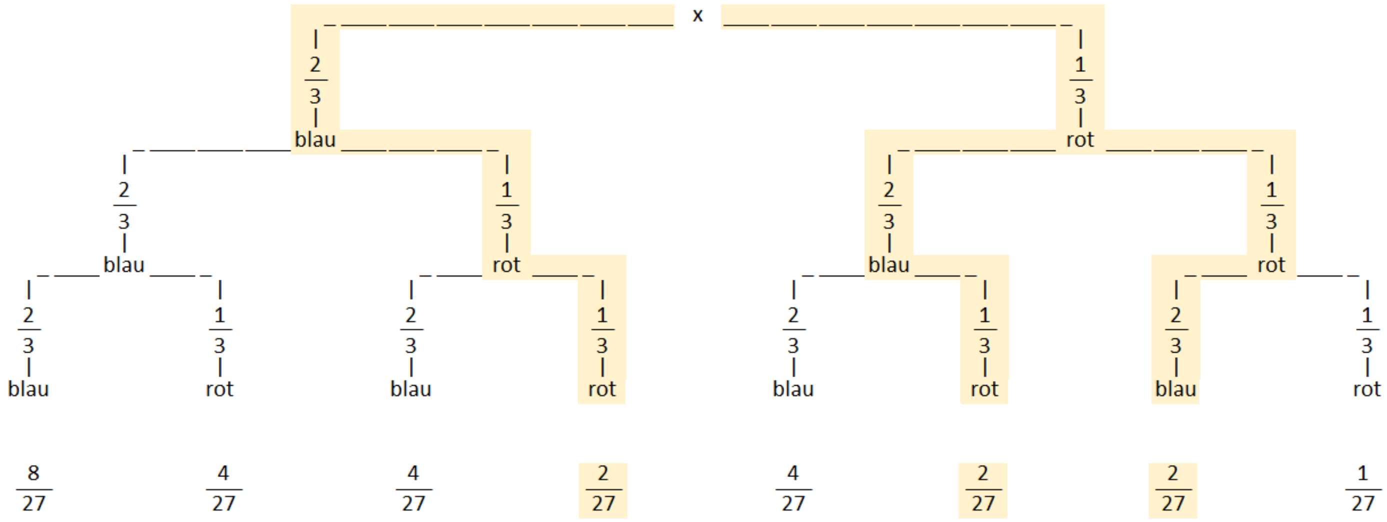
Mittels einer Zufallsgröße wird eine bestimmte Eigenschaft eines *Ergebnisses* erkannt. Alle *Ergebnisse* mit dieser Eigenschaft werden zu einem *Ereignis* zusammengefasst, welches man mit „$X = x_i$“ bezeichnet. Die Zufallsgröße dient dazu, leicht Ereignisse bilden zu können.

6.3.2 Beispiel 1 (Verteilung einer Zufallsgröße und ihr Erwartungswert E(X))

(Siehe: Definition, S. 129)

In einem Gefäß befinden sich 2 blaue Kugeln und 1 rote Kugel. Es werden 3 Kugeln MIT Zurücklegen gezogen.

Anzahl der Ziehungen:	3	
Anzahl der Möglichkeiten:	2	
Möglichkeiten:	blau	rot
Anzahl:	2	1
Anzahl gesamt:	3	
Mit Zurücklegen/Wdh.:	ja	



Ereignis E: Alle ausgewählten Pfade

P(E) = 2/9 ≅ 0,2222

Man definiere die Zufallsgröße X so, dass sie die Anzahl der blauen Kugeln angibt. Es gilt:

$$P(E) = P(X=1) = \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

Man ermittle weitere Ereigniswahrscheinlichkeiten:

$$P(X=0) = \frac{1}{27}$$
$$P(X=2) = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$
$$P(X=3) = \frac{8}{27}$$

Es ergibt sich die Verteilung der Zufallsgröße:

$\boldsymbol{x_i}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

Berechnung des Erwartungswertes:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{8}{27} = 2$$

6.3.3 Beispiel 2 *) (Verteilung einer Zufallsgröße und ihr Erwartungswert E(X))

In einem Gefäß befinden sich 7 rote Kugeln und 10 schwarze Kugeln. Es wird 7-mal OHNE Zurücklegen gezogen.

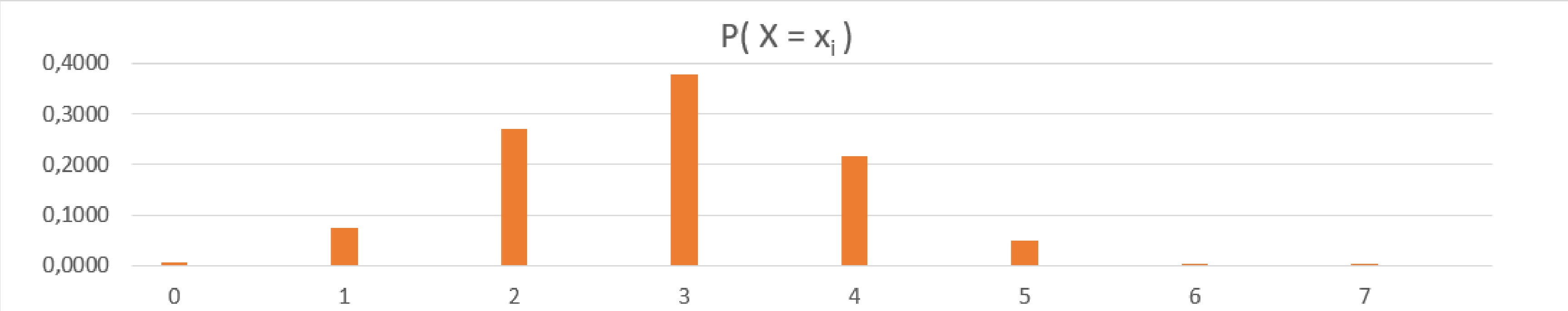
Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeiten mit der Formel der hypergeometrischen Verteilung:

rote Kugeln :	r	=	7
schwarze Kugeln :	s	=	10
=> Gesamtzahl :	r + s	=	17
gezogene Kugeln :	k	=	7
Treffer (rote Kugeln) :	t	=	3

$$P(\text{ t rote Kugeln}) = \frac{\binom{r}{t} \cdot \binom{s}{k-t}}{\binom{r+s}{k}} = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{10}{4}}{\binom{17}{7}} = \frac{35 \quad \cdot \quad 210}{19.448} \cong 0{,}3779$$

Sei X die Anzahl der Treffer (rote Kugeln). Dann ergibt sich folgende Verteilung:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7				Summe
$P(X = x_i)$	0,0062	0,0756	0,2721	0,3779	0,2160	0,0486	0,0036	0,0001				1,0000



Berechnung des Erwartungswertes:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}0062 + 1 \cdot 0{,}0756 + 2 \cdot 0{,}2721 + 3 \cdot 0{,}3779 + 4 \cdot 0{,}216 + 5 \cdot 0{,}0486 + 6 \cdot 0{,}0036 + 7 \cdot 0{,}0001$$

$$= 2{,}8824$$

Übung:

Beispiel: Verteilung einer Zufallsgröße und ihr Erwartungswert E(X)

In einem Gefäß befinden sich 3 rote Kugeln und 2 schwarze Kugeln. Es wird 2-mal OHNE Zurücklegen gezogen.

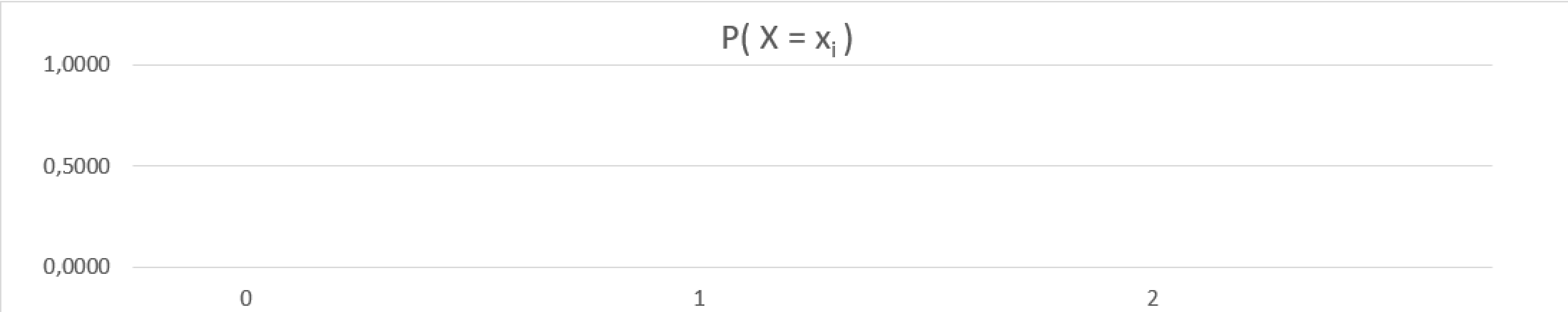
Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeiten mit der Formel der hypergeometrischen Verteilung:

rote Kugeln :	r	=	3
schwarze Kugeln :	s	=	2
=> Gesamtzahl :	r + s	=	5
gezogene Kugeln :	k	=	2
Treffer (rote Kugeln) :	t	=	0

$$P(\text{ t rote Kugeln}) = \frac{\binom{r}{t} \cdot \binom{s}{k-t}}{\binom{r+s}{k}} = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{10} \cong 0{,}1000$$

Sei X die Anzahl der Treffer (rote Kugeln). Dann ergibt sich folgende Verteilung:

x_i												
$P(X = x_i)$												



Berechnung des Erwartungswertes:

E(X) =

=

Lösung:

Beispiel: Verteilung einer Zufallsgröße und ihr Erwartungswert E(X)

In einem Gefäß befinden sich 3 rote Kugeln und 2 schwarze Kugeln. Es wird 2-mal OHNE Zurücklegen gezogen.

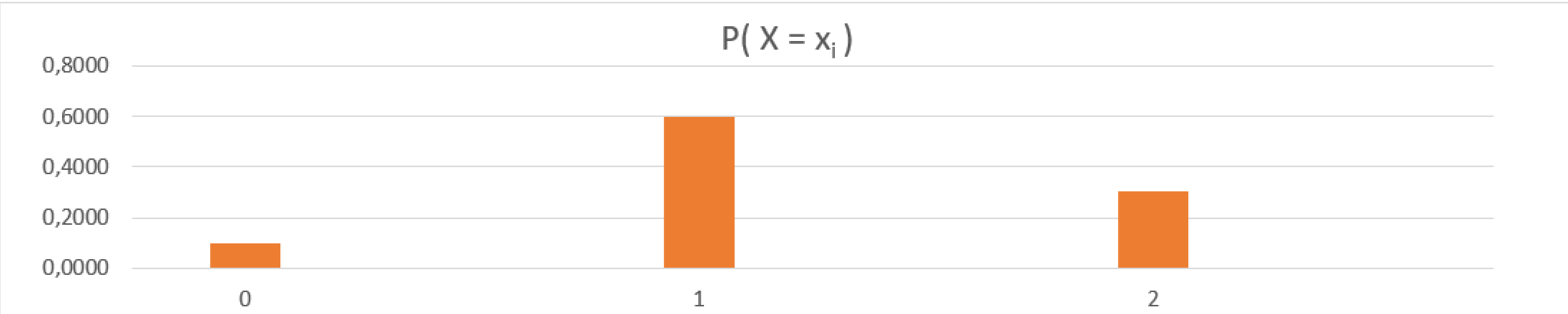
Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeiten mit der Formel der hypergeometrischen Verteilung:

rote Kugeln :	r	=	3
schwarze Kugeln :	s	=	2
=> Gesamtzahl :	r + s	=	5
gezogene Kugeln :	k	=	2
Treffer (rote Kugeln) :	t	=	0

$$P(\text{ t rote Kugeln}) = \frac{\binom{r}{t} \cdot \binom{s}{k-t}}{\binom{r+s}{k}} = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{10} \cong 0{,}1000$$

Sei X die Anzahl der Treffer (rote Kugeln). Dann ergibt sich folgende Verteilung:

x_i	0	1	2									Summe
$P(X = x_i)$	0,1000	0,6000	0,3000									1,0000



Berechnung des Erwartungswertes:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3$$
$$= 1{,}2000$$

7 Faire Spiele

7.1 Faire Spiele ohne Einsatz

Definition
Ein Spiel ohne Einsatz heißt fair, wenn alle Spieler dieselbe Gewinnchance haben.

Bemerkung
Im Fall gleichwahrscheinlicher Ergebnisse ist ein Spiel fair, wenn für jeden Spieler dieselbe Anzahl von Ergebnissen zum Gewinn führt. [43]

(Siehe: Beispiele, S. 136)

7.2 Faire Spiele mit Einsatz

Definition
Ein Zweipersonenspiel heißt fair, wenn der Erwartungswert des Nettogewinns N eines Spielers Null ist.

- In einem fairen Zweipersonenspiel ist der Erwartungswert des Nettogewinns beider Spieler gleich Null.
- Die Bedingung $E(N) = 0$ wird benutzt, um den **fairen Einsatz** für ein Spiel zu berechnen.
- Es gilt Nettogewinn N = Auszahlung A - Einsatz e.
  Die Bedingung $E(N) = 0$ ist äquivalent zur Bedingung $E(A) = e$. [44]

(Siehe: Beispiele, S. 140)

[43] Aus: Warmuth, E.: 8.4. Zufallsgrößen – faire Spiele, 2019/2020, S. 11
[44] Aus: Warmuth, E.: 8.4. Zufallsgrößen – faire Spiele, 2019/2020, S. 15

7.3 Beispiele und Übungen

7.3.1 Faires Spiel (ohne Einsatz)

Beispiel: Gerade und ungerade Augensumme beim 2-maligen Würfeln.

Es wird 2-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable X ermittelt die Augensumme der beiden Würfel.

Wurf 1	Wurf 2	x_i
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	5
5	1	6
6	1	7
1	2	3
2	2	4
3	2	5
4	2	6
5	2	7
6	2	8
1	3	4
2	3	5
3	3	6
4	3	7
5	3	8
6	3	9

Wurf 1	Wurf 2	x_i
1	4	5
2	4	6
3	4	7
4	4	8
5	4	9
6	4	10
1	5	6
2	5	7
3	5	8
4	5	9
5	5	10
6	5	11
1	6	7
2	6	8
3	6	9
4	6	10
5	6	11
6	6	12

Spieler 1 tippt auf:		Spieler 2 tippt auf:	
☑	X = 2	☐	X = 2
☐	X = 3	☑	X = 3
☑	X = 4	☐	X = 4
☐	X = 5	☑	X = 5
☑	X = 6	☐	X = 6
☐	X = 7	☑	X = 7
☑	X = 8	☐	X = 8
☐	X = 9	☑	X = 9
☑	X = 10	☐	X = 10
☐	X = 11	☑	X = 11
☑	X = 12	☐	X = 12

Spieler 1 – Günstige Ergebnisse: 18 ☑ anzeigen

$$P(\text{Gewinn}) = \frac{18}{36} \cong 0{,}5$$

Spieler 2 – Günstige Ergebnisse: 18 ☑ anzeigen

$$P(\text{Gewinn}) = \frac{18}{36} \cong 0{,}5$$

⇒ Das Spiel IST fair.

Anmerkung:

Obwohl 6 gerade Augensummen (nämlich: 2, 4, 6, 8, 10, 12)

und nur 5 ungerade Augensummen (nämlich: 3, 5, 7, 9, 11)

möglich sind, ist das Spiel fair.

Die Wahrscheinlichkeit einer geraden Augensumme ist nämlich gleich der Wahrscheinlichkeit einer ungeraden Augensumme.

7.3.2 Unfaires Spiel (ohne Einsatz)

Beispiel: Jeder Spieler tippt auf 2 mögliche Augensummen beim 2-maligen Würfeln.

Es wird 2-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable X ermittelt die Augensumme der beiden Würfel.

Wurf 1	Wurf 2	x_i
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	5
5	1	6
6	1	7
1	2	3
2	2	4
3	2	5
4	2	6
5	2	7
6	2	8
1	3	4
2	3	5
3	3	6
4	3	7
5	3	8
6	3	9

Wurf 1	Wurf 2	x_i
1	4	5
2	4	6
3	4	7
4	4	8
5	4	9
6	4	10
1	5	6
2	5	7
3	5	8
4	5	9
5	5	10
6	5	11
1	6	7
2	6	8
3	6	9
4	6	10
5	6	11
6	6	12

Spieler 1 tippt auf:		Spieler 2 tippt auf:	
☑	X = 2	☐	X = 2
☐	X = 3	☐	X = 3
☐	X = 4	☐	X = 4
☐	X = 5	☐	X = 5
☑	X = 6	☐	X = 6
☐	X = 7	☑	X = 7
☐	X = 8	☐	X = 8
☐	X = 9	☐	X = 9
☐	X = 10	☐	X = 10
☐	X = 11	☑	X = 11
☐	X = 12	☐	X = 12

Günstige Ergebnisse: 6 ☑ anzeigen

Günstige Ergebnisse: 8 ☑ anzeigen

$$P(\text{Gewinn}) = \frac{6}{36} \cong 0{,}17 \qquad P(\text{Gewinn}) = \frac{8}{36} \cong 0{,}22$$

⇒ Das Spiel ist NICHT fair.

Anmerkung:

Obwohl die Spieler auf gleichviele mögliche Augensummen setzen, ist das Spiel nicht fair.

Die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 2 oder 6 ist nämlich kleiner als die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 7 oder 11.

7.3.3 Übung (ohne Einsatz)

Übung: Spieler 1 tippt auf eine Primzahl als Augensumme, Spieler 2 tippt auf 6, 7 oder 8 als Augensumme.

Es wird 2-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable X ermittelt die Augensumme der beiden Würfel.

Wurf 1	Wurf 2	x_i
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	5
5	1	6
6	1	7
1	2	3
2	2	4
3	2	5
4	2	6
5	2	7
6	2	8
1	3	4
2	3	5
3	3	6
4	3	7
5	3	8
6	3	9

Wurf 1	Wurf 2	x_i
1	4	5
2	4	6
3	4	7
4	4	8
5	4	9
6	4	10
1	5	6
2	5	7
3	5	8
4	5	9
5	5	10
6	5	11
1	6	7
2	6	8
3	6	9
4	6	10
5	6	11
6	6	12

Spieler 1 tippt auf:

- ☑ X = 2
- ☑ X = 3
- ☐ X = 4
- ☑ X = 5
- ☐ X = 6
- ☑ X = 7
- ☐ X = 8
- ☐ X = 9
- ☐ X = 10
- ☑ X = 11
- ☐ X = 12

☐ anzeigen

Spieler 2 tippt auf:

- ☐ X = 2
- ☐ X = 3
- ☐ X = 4
- ☐ X = 5
- ☑ X = 6
- ☑ X = 7
- ☑ X = 8
- ☐ X = 9
- ☐ X = 10
- ☐ X = 11
- ☐ X = 12

☐ anzeigen

Lösung: Spieler 1 tippt auf eine Primzahl als Augensumme, Spieler 2 tippt auf 6, 7 oder 8 als Augensumme.

Es wird 2-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable X ermittelt die Augensumme der beiden Würfel.

Wurf 1	Wurf 2	x_i
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	5
5	1	6
6	1	7
1	2	3
2	2	4
3	2	5
4	2	6
5	2	7
6	2	8
1	3	4
2	3	5
3	3	6
4	3	7
5	3	8
6	3	9

Wurf 1	Wurf 2	x_i
1	4	5
2	4	6
3	4	7
4	4	8
5	4	9
6	4	10
1	5	6
2	5	7
3	5	8
4	5	9
5	5	10
6	5	11
1	6	7
2	6	8
3	6	9
4	6	10
5	6	11
6	6	12

Spieler 1 tippt auf:

- ☑ X = 2
- ☑ X = 3
- ☐ X = 4
- ☑ X = 5
- ☐ X = 6
- ☑ X = 7
- ☐ X = 8
- ☐ X = 9
- ☐ X = 10
- ☑ X = 11
- ☐ X = 12

Günstige Ergebnisse:

15 ☑ anzeigen

$$P(\text{Gewinn}) = \frac{15}{36} \cong 0{,}42$$

Spieler 2 tippt auf:

- ☐ X = 2
- ☐ X = 3
- ☐ X = 4
- ☐ X = 5
- ☑ X = 6
- ☑ X = 7
- ☑ X = 8
- ☐ X = 9
- ☐ X = 10
- ☐ X = 11
- ☐ X = 12

Günstige Ergebnisse:

16 ☑ anzeigen

$$P(\text{Gewinn}) = \frac{16}{36} \cong 0{,}44$$

⇒ Das Spiel ist NICHT fair.

7.3.4 Faires Spiel (mit Einsatz)

(Siehe Definition, S. 135)

Beispiel (faires Spiel):

Es wird 2-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable A ermittelt den Auszahlungsbetrag nach folgenden Regeln:

Wurf 1	Wurf 2	a_i
1	1	52
2	1	2
3	1	2
4	1	2
5	1	2
6	1	2
1	2	2
2	2	0
3	2	0
4	2	0
5	2	0
6	2	0
1	3	2
2	3	0
3	3	0
4	3	0
5	3	0
6	3	0

Wurf 1	Wurf 2	a_i
1	4	2
2	4	0
3	4	0
4	4	0
5	4	0
6	4	0
1	5	2
2	5	0
3	5	0
4	5	0
5	5	0
6	5	0
1	6	2
2	6	0
3	6	0
4	6	0
5	6	0
6	6	0

Anzahl Einsen	Auszahlung (in €)
0	0
1	2
2	52

Spieleinsatz e (in €)
2

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
☑ A = 0	$P(A = 0) = \frac{25}{36} = 0{,}6944$
☑ A = 2	$P(A = 2) = \frac{10}{36} = 0{,}2778$
☑ A = 52	$P(A = 52) = \frac{1}{36} = 0{,}0278$

$E(A) \cong 0 \cdot 0{,}6944 + 2 \cdot 0{,}2778 + 52 \cdot 0{,}0278 \cong 2$

Erwartbare Auszahlung - Spieleinsatz = Erwartbarer Gewinn

2 - 2 = 0,0000 ⇒ Es IST ein faires Spiel!

7.3.5 Unfaires Spiel (mit Einsatz)

Beispiel (unfaires Spiel):

Es wird 2-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable A ermittelt den Auszahlungsbetrag nach folgenden Regeln:

Wurf 1	Wurf 2	a_i
1	1	10
2	1	3
3	1	3
4	1	3
5	1	3
6	1	3
1	2	3
2	2	0
3	2	0
4	2	0
5	2	0
6	2	0
1	3	3
2	3	0
3	3	0
4	3	0
5	3	0
6	3	0

Wurf 1	Wurf 2	a_i
1	4	3
2	4	0
3	4	0
4	4	0
5	4	0
6	4	0
1	5	3
2	5	0
3	5	0
4	5	0
5	5	0
6	5	0
1	6	3
2	6	0
3	6	0
4	6	0
5	6	0
6	6	0

Anzahl Einsen	Auszahlung (in €)
0	0
1	3
2	10

Spieleinsatz e (in €)
1

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
☑ A = 0	$P(A = 0) = \frac{25}{36} = 0{,}6944$
☑ A = 3	$P(A = 3) = \frac{10}{36} = 0{,}2778$
☑ A = 10	$P(A = 10) = \frac{1}{36} = 0{,}0278$

$E(A) \cong 0 \cdot 0{,}6944 + 3 \cdot 0{,}2778 + 10 \cdot 0{,}0278 \cong 1{,}1111$

Erwartbare Auszahlung - Spieleinsatz = Erwartbarer Gewinn

$1{,}1111 - 1 = 0{,}1111$ $\Rightarrow$ Es ein UNfaires Spiel, DA es sich für den Spieler lohnt!

7.3.6 Übung (mit Einsatz)

Übung (faires Spiel?):

Es wird 2-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable A ermittelt den Auszahlungsbetrag nach folgenden Regeln:

Wurf 1	Wurf 2	a_i
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	2	
6	2	
1	3	
2	3	
3	3	
4	3	
5	3	
6	3	

Wurf 1	Wurf 2	a_i
1	4	
2	4	
3	4	
4	4	
5	4	
6	4	
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	

Anzahl Einsen	Auszahlung (in €)
0	10
1	30
2	-500

Spieleinsatz e (in €)
1,2

☐	____
☐	____
☐	____

Lösung:

Es wird 2-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable A ermittelt den Auszahlungsbetrag nach folgenden Regeln:

Wurf 1	Wurf 2	a_i
1	1	-500
2	1	30
3	1	30
4	1	30
5	1	30
6	1	30
1	2	30
2	2	10
3	2	10
4	2	10
5	2	10
6	2	10
1	3	30
2	3	10
3	3	10
4	3	10
5	3	10
6	3	10

Wurf 1	Wurf 2	a_i
1	4	30
2	4	10
3	4	10
4	4	10
5	4	10
6	4	10
1	5	30
2	5	10
3	5	10
4	5	10
5	5	10
6	5	10
1	6	30
2	6	10
3	6	10
4	6	10
5	6	10
6	6	10

Anzahl Einsen	Auszahlung (in €)
0	10
1	30
2	-500

Spieleinsatz e (in €)
1,2

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
☑ A = 10	$P(A = 10) = \frac{25}{36} = 0{,}6944$
☑ A = 30	$P(A = 30) = \frac{10}{36} = 0{,}2778$
☑ A = -500	$P(A = -500) = \frac{1}{36} = 0{,}0278$

$$E(A) \cong 10 \cdot 0{,}6944 + 30 \cdot 0{,}2778 + (-500) \cdot 0{,}0278 \cong 1{,}3889$$

Erwartbare Auszahlung - Spieleinsatz = Erwartbarer Gewinn

1,3889 - 1,2 = 0,1889 ⇒ Es ein UNfaires Spiel, DA es sich für den Spieler lohnt!

7.3.7 Einsatz für faires Spiel berechnen

Beispiel:

Einsatz für ein faires Spiel berechnen

Die Zufallsgröße A gibt die Auszahlung an.

a_i	-1	0	4	14
$P(A = a_i)$	0,1	0,3	0,2	0,4

Berechnung der erwarteten Auszahlung E(A):

$$E(A) \cong -1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 14 \cdot 0{,}4$$

$$\cong 6{,}3$$

Für ein faires Spiel muss gelten: Erwartbare Auszahlung - Spieleinsatz = 0

$$E(A) - e = 0$$

Der Einsatz e muss also der erwarteten Auszahlung E(A) entsprechen.

$$\Rightarrow \; e = 6{,}3$$

Übung:

1. Ergänzen Sie den fehlenden Wert in der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße A.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert E(A).
3. Wie hoch muss der Einsatz für ein faires Spiel sein?

Einsatz für ein faires Spiel berechnen

Die Zufallsgröße A gibt die Auszahlung an.

a_i	-1	0	1	2	3	4
$P(A = a_i)$	0,5	0,05	0,1	0,2		0,05

Wert fehlt!

Lösung:

Einsatz für ein faires Spiel berechnen

Die Zufallsgröße A gibt die Auszahlung an.

a_i	-1	0	1	2	3	4
$P(A = a_i)$	0,5	0,05	0,1	0,2	0,1	0,05

Berechnung der erwarteten Auszahlung E(A):

$$E(A) \cong -1 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}05$$

$$\cong 0{,}5$$

Für ein faires Spiel muss gelten: Erwartbare Auszahlung - Spieleinsatz = 0

$$E(A) - e = 0$$

Der Einsatz e muss also der erwarteten Auszahlung E(A) entsprechen.

$$\Rightarrow \; e = 0{,}5$$

Übung:

1. Ergänzen Sie den fehlenden Wert in der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße A.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert E(A).
3. Wie hoch muss der Einsatz für ein faires Spiel sein?

Einsatz für ein faires Spiel berechnen

Die Zufallsgröße A gibt die Auszahlung an.

a_i	-3	-1	0	1	2
$P(A = a_i)$	1/4	1/12		1/6	1/3

Wert fehlt!

Lösung:

Einsatz für ein faires Spiel berechnen

Die Zufallsgröße A gibt die Auszahlung an.

a_i	-3	-1	0	1	2
$P(A = a_i)$	1/4	1/12	1/6	1/6	1/3

Berechnung der erwarteten Auszahlung E(A):

$$E(A) \cong -3 \cdot 0{,}25 + (-1) \cdot 0{,}0833 + 0 \cdot 0{,}1667 + 1 \cdot 0{,}1667 + 2 \cdot 0{,}3333$$

$$\cong 0$$

Für ein faires Spiel muss gelten: Erwartbare Auszahlung - Spieleinsatz = 0

$$E(A) - e = 0$$

Der Einsatz e muss also der erwarteten Auszahlung E(A) entsprechen.

$$\Rightarrow \quad e = 0$$

8 Bernoulli-Ketten und Binomialverteilungen

8.1 Bernoulli-Experiment

BERNOULLI-Experiment

Vorgänge mit zufälligem Ergebnis, bei denen nur zwischen Erfolg (1) und Misserfolg (0) unterschieden wird, heißen BERNOULLI-Experimente oder BERNOULLI-Versuche.[45]

Viele Experimente besitzen mehr als zwei mögliche Ergebnisse (siehe z.B. S. 55 oder S. 56). Man kann diese jedoch leicht in ein Bernoulli-Experiment überführen, indem man die Ergebnismenge anders definiert: Ein Ergebnis wird als Erfolg (oder Treffer) angesehen und der Rest als Misserfolg (oder Niete).

Beispiel 1:

In einem Gefäß befinden sich rote, grüne, blaue, gelbe und graue Kugeln. Man könnte die Ergebnismenge so definieren:

Ω = {rot, grün, blau, gelb, grau}

Um jedoch ein Bernoulli-Experiment betrachten zu können, wählt man die Ergebnismenge so:

Ω = {rot, nicht-rot}

Sind in dem Gefäß z.B. 3 rote und 7 nicht-rote Kugeln enthalten, würde man folgende Wahrscheinlichkeiten erhalten:

P(rot) = $\frac{3}{10}$

P(nicht-rot) = $\frac{7}{10}$

Wählt man die rote Kugel in diesem Fall als Erfolg (oder Treffer), bezeichnet man die Erfolgs- oder Trefferwahrscheinlichkeit mit

$p = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Für die Misserfolgs- oder Nicht-Trefferwahrscheinlichkeit (also der Gegenwahrscheinlichkeit) ergibt sich:

$1 - p = \frac{7}{10} = 0{,}7$.

---

[45] Aus: Warmuth, E.: 8.6. Binomialverteilung, 2019/2020, S. 3

8.2 Bernoulli-Kette

BERNOULLI-Kette
Wird ein BERNOULLI-Experiment mit derselben Erfolgswahrscheinlichkeit n mal **unabhängig** voneinander ausgeführt, so entsteht eine **Bernoulli-Kette** der **Länge** n mit der **Erfolgswahrscheinlichkeit** p.

Eine Bernoulli-Kette ist also nichts anderes als die mehrfache Hintereinanderausführung des gleichen Bernoulli-Experiments. Wichtig hierbei ist, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit p gleich bleibt.

Beispiel für eine Bernoulli-Kette: Eine Kugel wird aus einem Gefäß gezogen, auf die Farbe rot überprüft und danach ZURÜCKGELEGT. Dies wird n-mal wiederholt. Die einzelnen Experimente sind *stochastisch unabhängig* voneinander, weil sie keinen Einfluss auf einander besitzen.

Gegenbeispiel: Eine Kugel wird aus einem Gefäß gezogen, auf die Farbe rot überprüft und danach NICHT zurückgelegt. Dies wird n-mal wiederholt. Hierbei ändert sich die Erfolgswahrscheinlichkeit, weil beim nachfolgenden Experiment eine Kugel weniger vorhanden ist und es eine Rolle spielt, ob zuvor rot gezogen wurde oder nicht. Die Experimente sind NICHT *stochastisch unabhängig* voneinander.

8.3 Die Formel von Bernoulli / Binomialverteilung

Es sei X die Anzahl der Erfolge in einer BERNOULLI-Kette der Länge n mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die Verteilung von X ist gegeben durch

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n$$

Diese Verteilung heißt Binomialverteilung mit den Parametern n und p, abgekürzt $X \sim B(n; p)$. [46]

[46] Aus: Warmuth, E.: 8.6. Binomialverteilung, 2019/2020, S. 9

8.4 Beispiel: Veranschaulichung der Bernoulli-Formel am Baumdiagramm

In einem Gefäß befinden sich 2 Treffer-Kugeln und 1 Niete-Kugel: Es wird n=4 mal eine Kugel gezogen, die gleich wieder zurück gelegt wird.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 4 gezogenen Kugeln genau k=1 Treffer-Kugel ist?

Bernoulli-Experiment

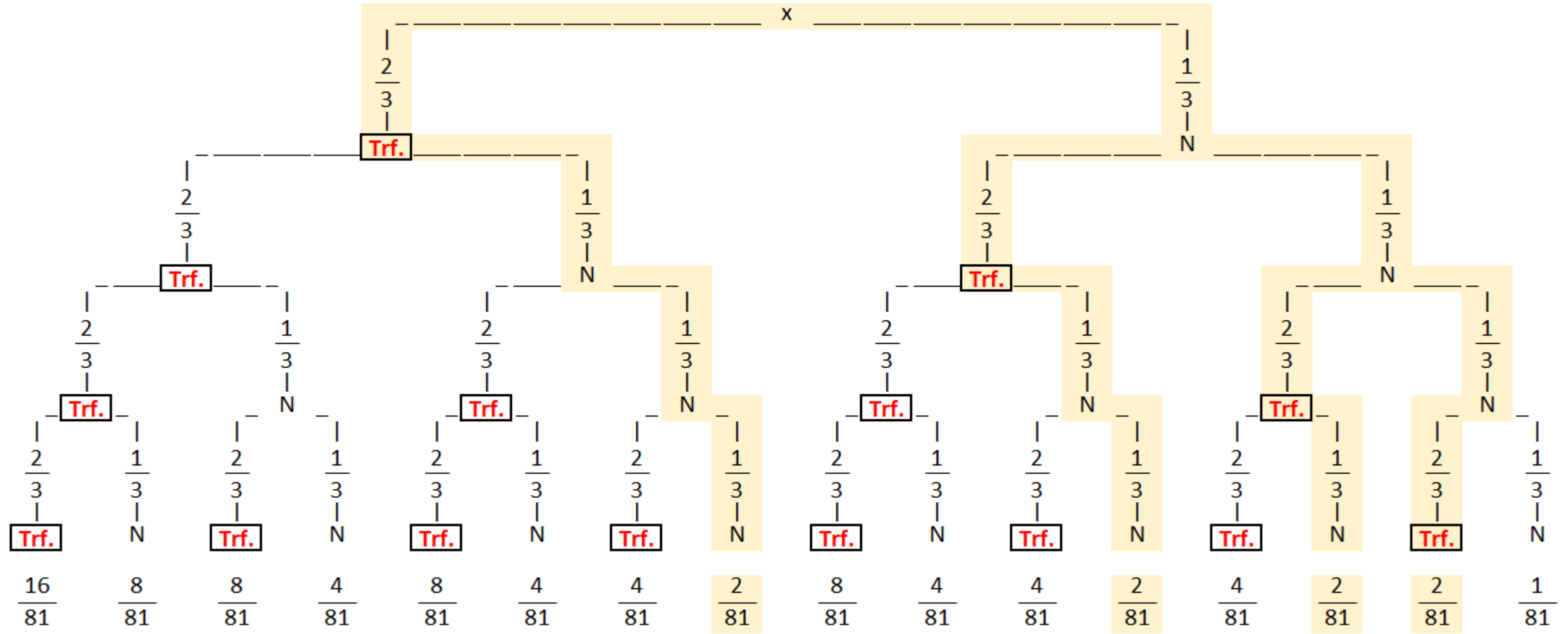
Möglichkeiten:	Trf.	N
Anzahl:	2	1

Bernoulli-Kette

Ziehungen: $n = 4$

Trefferwahrsch.: $p = \frac{2}{3}$

Anzahl Treffer (Trf.): $k = 1$



Ereignis E: Alle ausgewählten Pfade

P(E) = 8/81 ≅ 0,0988

Berechnung über Bernoulli-Formel

$$P(E) = B(n\,;p\,;k) = P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{4!}{1!\cdot(4-1)!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \cong \underbrace{4}_{\text{Anzahl der Pfade}} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3}}_{\text{Wahrscheinlichkeit für 1 Pfad}} \cong 0{,}0988$$

Übung:

In einem Gefäß befinden sich 2 Treffer-Kugeln und 1 Niete-Kugel: Es wird n=4 mal eine Kugel gezogen, die gleich wieder zurück gelegt wird.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 4 gezogenen Kugeln genau k=3 Treffer-Kugel sind?

Bernoulli-Experiment

Möglichkeiten: Trf. N

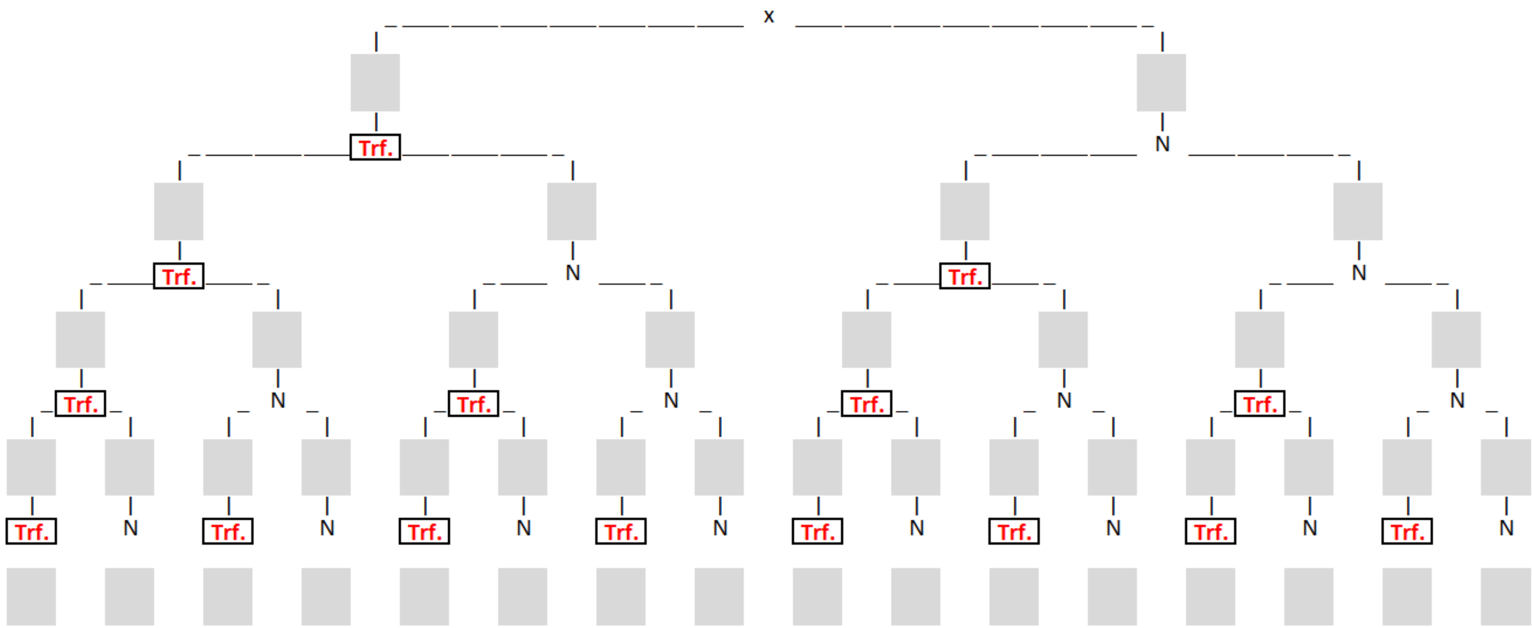
Anzahl: 2 1

Bernoulli-Kette

Ziehungen: n = 4

Trefferwahrsch.: $p = \frac{2}{3}$

Anzahl Treffer (Trf.): k = 3



Ereignis E: Alle ausgewählten Pfade

P(E) = ≅

Berechnung über Bernoulli-Formel

P(E) = B (n ; p ; k) = P(X = k)

Anzahl der Pfade

Wahrscheinlichkeit für 1 Pfad

Lösung:

Bernoulli-Experiment

Möglichkeiten: Trf. N

Anzahl: 2 1

Bernoulli-Kette

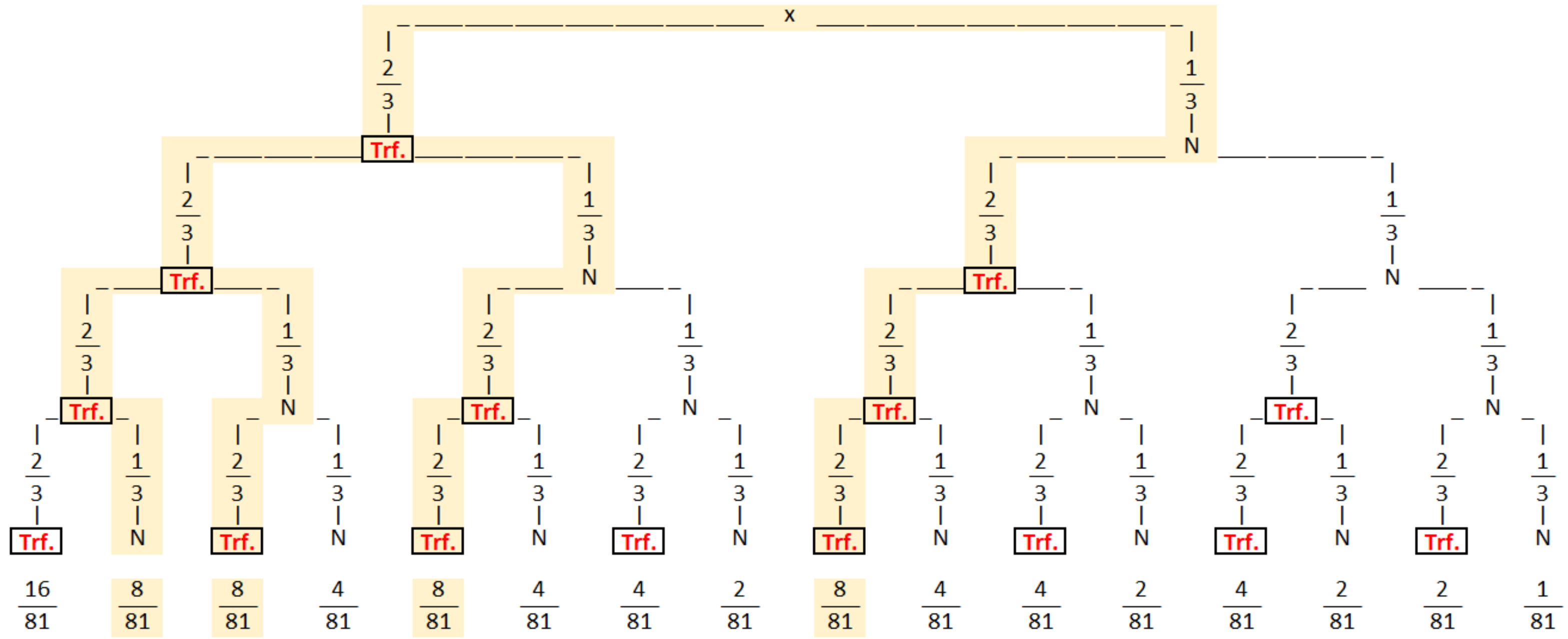
Ziehungen: $n = 4$

Trefferwahrsch.: $p = \frac{2}{3}$

Anzahl Treffer (Trf.): $k = 3$

Ereignis E: Alle ausgewählten Pfade

P(E) = 32/81 ≅ 0,3951



Berechnung über Bernoulli-Formel

$$P(E) = B(n\,;\,p\,;\,k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cong \underbrace{4}_{\text{Anzahl der Pfade}} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1}_{\text{Wahrscheinlichkeit für 1 Pfad}} \cong 0{,}3951$$

8.4.1 Bestimmung einer Punktwahrscheinlichkeit P(X=r)

Hinweis: Oft wird für „P(X=r)“ auch „P(X=k)“ geschrieben. Da in den nachfolgenden Beispielen das k in der Exceldatei variabel bleiben sollte, um sich unterschiedliche Werte mithilfe der Formel anzeigen lassen zu können, wurde ein zweiter Buchstabe, nämlich „r“, eingeführt.

Beispiel:

Bernoulli-Formel

Ziehungen:	n =	15
Trefferwahrscheinlichkeit.:	p =	1/4
Anzahl Treffer:	k =	5

☑ als Bruch eingeben

$$P(E) = B(n; p; k) = P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k} \cong \binom{15}{5} \cdot (0{,}25)^{5} \cdot (0{,}75)^{10} \cong 3003 \cdot (0{,}25)^{5} \cdot (0{,}75)^{10} \cong 0{,}1651$$

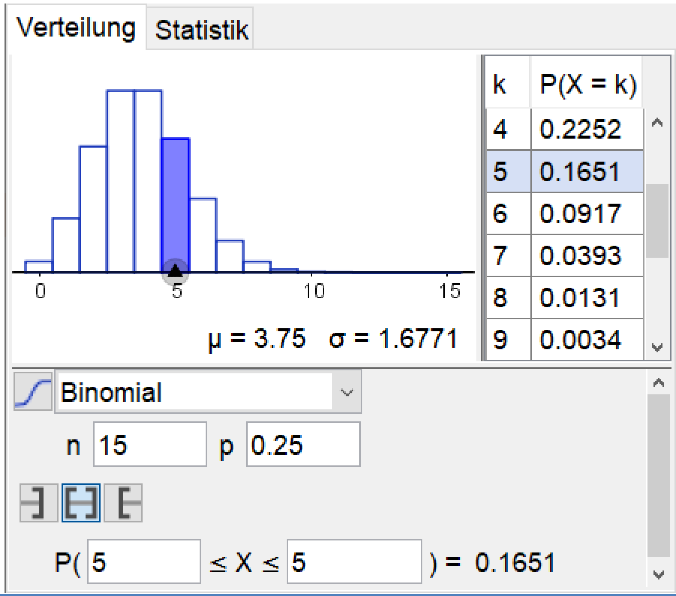
Bestimmung einer Punktwahrscheinlichkeit P(X = r)

r = 5

$P(X=5) \cong \quad + P(X=5)$

$\cong \quad + 0{,}1651$

$\cong \quad 0{,}1651$



Übung:

Bernoulli-Formel

Ziehungen:	n =	15	
Trefferwahrscheinlichkeit.:	p =	1/4	☑ als Bruch eingeben
Anzahl Treffer:	k =	6	

P(E) = B (n; p; k) = P(X=k) = $\left(\ \right) \left(\ \right) \left(\quad\right) \left(\ \right) \left(\quad\right) \left(\quad\right) \left(\quad\right) \left(\quad\right)$

Bestimmung einer Punktwahrscheinlichkeit P(X = r)

r = 6

P(X=6) ≅

≅

≅

Lösung:

Bernoulli-Formel

Ziehungen: $n = 15$

Trefferwahrscheinlichkeit.: $p = 1/4$ ☑ als Bruch eingeben

Anzahl Treffer: $k = 6$

$$P(E) = B\,(n;\,p;\,k) = P(\,X{=}k\,) = \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k} \cong \binom{15}{6} \cdot (0{,}25)^{6} \cdot (0{,}75)^{9} \cong 5005 \cdot (0{,}25)^{6} \cdot (0{,}75)^{9} \cong 0{,}0917$$

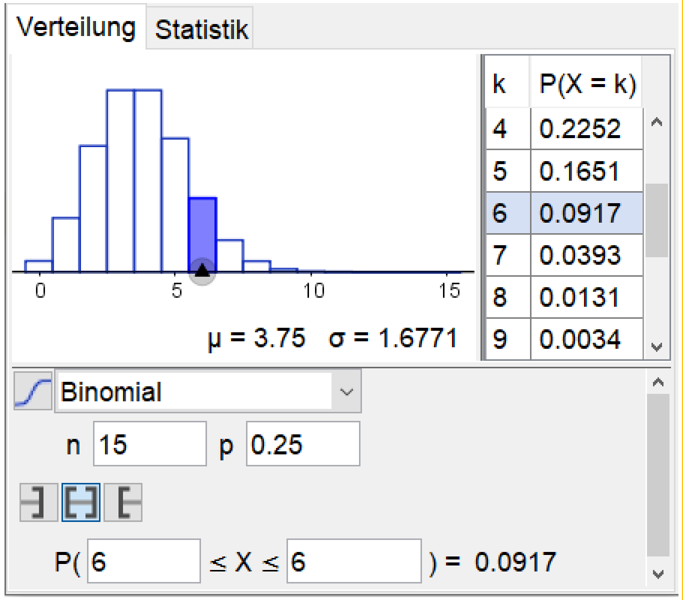
Bestimmung einer Punktwahrscheinlichkeit P(X = r)

$r = 6$

$P(X{=}6) \cong \qquad + P(X{=}6)$

$\cong \qquad + 0{,}0917$

$\cong \quad 0{,}0917$



8.4.2 Bestimmung einer linksseitigen Intervallwahrscheinlichkeit P(X ≤ r)

Beispiel:

Bernoulli-Formel

Ziehungen:	$n = 15$
Trefferwahrscheinlichkeit.:	$p = 1/4$ ☑ als Bruch eingeben
Anzahl Treffer:	$k = 4$

$$P(E) = B\,(n;\,p;\,k) = P(\,X{=}k\,) = \binom{n}{k} \cdot (p)^{k} \cdot (1 - p)^{n-k} \cong \binom{15}{4} \cdot (0{,}25)^{4} \cdot (0{,}75)^{11} \cong 1365 \cdot (0{,}25)^{4} \cdot (0{,}75)^{11} \cong 0{,}2252$$

Berechnung von kumulierten Wahrscheinlichkeiten

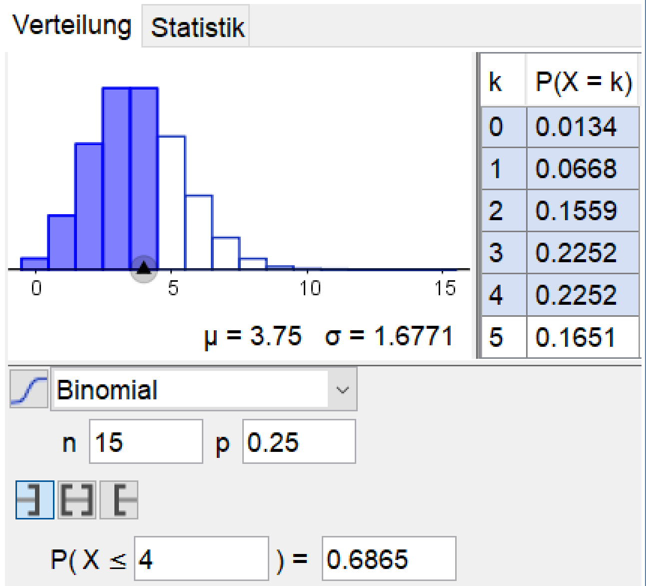
Bestimmung einer linksseitigen Intervallwahrscheinlichkeit P(X ≤ r)

$r = 4$

$$P(X{\le}4) \cong P(X{=}0) + P(X{=}1) + P(X{=}2) + P(X{=}3) + P(X{=}4)$$

$$\cong 0{,}0134 + 0{,}0668 + 0{,}1559 + 0{,}2252 + 0{,}2252$$

$$\cong 0{,}6865$$



Übung:

Bernoulli-Formel

Ziehungen: $n =$ 15

Trefferwahrscheinlichkeit.: $p =$ 1/4 ☑ als Bruch eingeben

Anzahl Treffer: $k =$ 2

P(E) = B (n; p; k) = P(X=k) = $\left[\quad\right] \left[\quad\right] \left(\quad\right) \left[\quad\right] \left(\quad\right) \left(\quad\right) \qquad \left(\quad\right) \left(\quad\right)$

Berechnung von kumulierten Wahrscheinlichkeiten

Bestimmung einer linksseitigen Intervallwahrscheinlichkeit P(X ≤ r)

$r =$ 2

$P(X \leq 2) \cong$

$\cong$

$\cong$

Lösung:

Bernoulli-Formel

Ziehungen: $n = 15$

Trefferwahrscheinlichkeit.: $p = 1/4$ ☑ als Bruch eingeben

Anzahl Treffer: $k = 2$

$$P(E) = B\,(n;\,p;\,k) = P(\,X{=}k\,) = \binom{n}{k} \cdot (p)^{k} \cdot (1-p)^{n-k} \cong \binom{15}{2} \cdot (0{,}25)^{2} \cdot (0{,}75)^{13} \cong 105 \cdot (0{,}25)^{2} \cdot (0{,}75)^{13} \cong 0{,}1559$$

Berechnung von kumulierten Wahrscheinlichkeiten

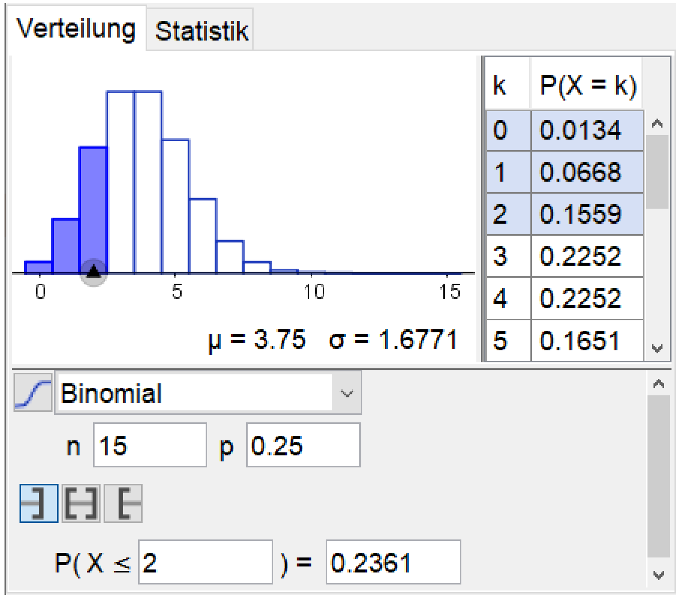
Bestimmung einer linksseitigen Intervallwahrscheinlichkeit $P(\,X \le r\,)$

$r = 2$

$$P(X{\le}2) \cong P(X{=}0) + P(X{=}1) + P(X{=}2)$$

$$\cong 0{,}0134 + 0{,}0668 + 0{,}1559$$

$$\cong 0{,}2361$$



8.4.3 Bestimmung einer rechtsseitigen Intervallwahrscheinlichkeit P(X ≥ r)

Beispiel:

Bernoulli-Formel

Ziehungen: $n = 15$

Trefferwahrscheinlichkeit.: $p = 1/4$ ☑ als Bruch eingeben

Anzahl Treffer: $k = 9$

$$P(E) = B(n; p; k) = P(X{=}k) = \binom{n}{k} \cdot (p)^{k} \cdot (1-p)^{n-k} \cong \binom{15}{9} \cdot (0{,}25)^{9} \cdot (0{,}75)^{6} \cong 5005 \cdot (0{,}25)^{9} \cdot (0{,}75)^{6} \cong 0{,}0034$$

Berechnung von kumulierten Wahrscheinlichkeiten

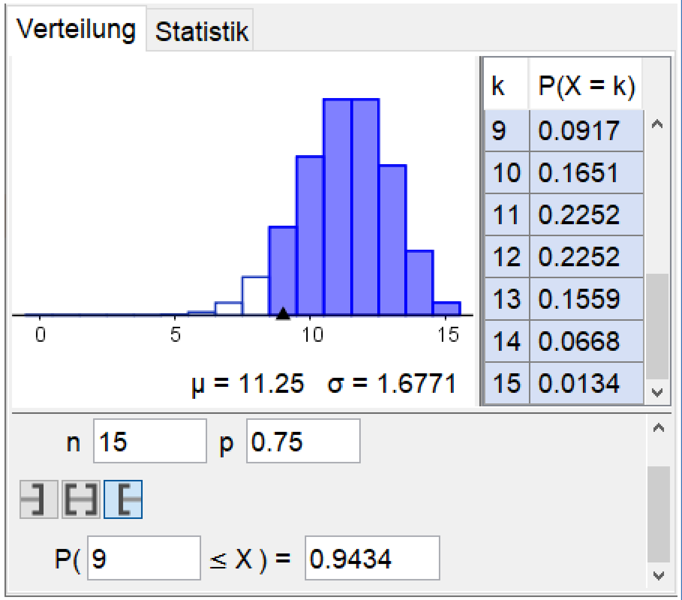
Bestimmung einer rechtsseitigen Intervallwahrscheinlichkeit P(X ≥ r)

$r = 9$

$P(X\geq 9) \cong P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) + P(X=13) + P(X=14) + P(X=15)$

$\cong 0{,}0917 + 0{,}1651 + 0{,}2252 + 0{,}2252 + 0{,}1559 + 0{,}0668 + 0{,}0134$

$\cong 0{,}9434$



Übung:

Bernoulli-Formel

Ziehungen:	n = 15	
Trefferwahrscheinlichkeit.:	p = 3/4	☑ als Bruch eingeben
Anzahl Treffer:	k = 12	

$P(E) = B\,(n;\,p;\,k) = P(\,X{=}k\,) = \left(\quad\right)\ \left(\quad\right)\ \left(\qquad\right)\ \left(\quad\right)\left(\qquad\right)\left(\qquad\right)\ \left(\qquad\right)\left(\qquad\right)$

Berechnung von kumulierten Wahrscheinlichkeiten

Bestimmung einer rechtsseitigen Intervallwahrscheinlichkeit P(X ≥ r)

r = 12

$P(X{\geq}12) \cong$

$\cong$

$\cong$

Lösung:

Bernoulli-Formel

Ziehungen: $n = 15$

Trefferwahrscheinlichkeit.: $p = 3/4$ ☑ als Bruch eingeben

Anzahl Treffer: $k = 12$

$$P(E) = B\,(n;\,p;\,k) = P(\,X{=}k\,) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot \left(p\right)^{k} \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} \cong \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \left(0{,}75\right)^{12} \cdot \left(0{,}25\right)^{3} \cong 455 \cdot \left(0{,}75\right)^{12} \cdot \left(0{,}25\right)^{3} \cong 0{,}2252$$

Berechnung von kumulierten Wahrscheinlichkeiten

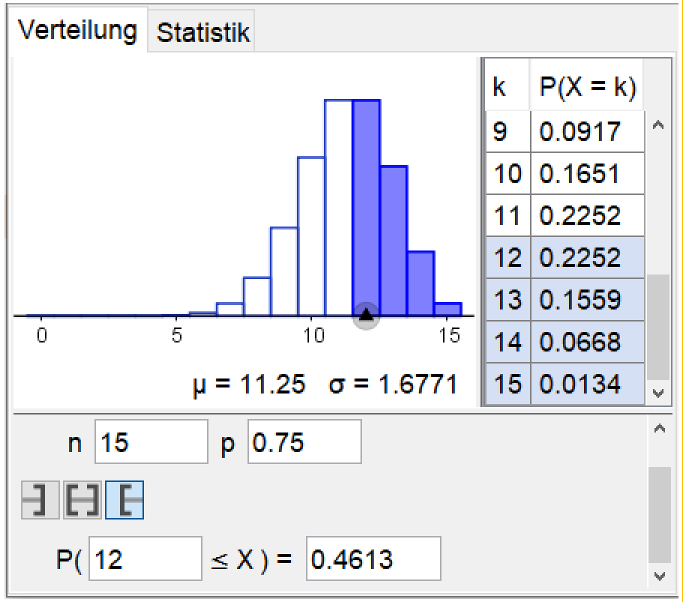
Bestimmung einer rechtsseitigen Intervallwahrscheinlichkeit $P(\,X \geq r\,)$

$r = 12$

$$P(X{\geq}12) \cong P(X{=}12) + P(X{=}13) + P(X{=}14) + P(X{=}15)$$

$$\cong 0{,}2252 + 0{,}1559 + 0{,}0668 + 0{,}0134$$

$$\cong 0{,}4613$$



8.4.4 Bestimmung einer Intervallwahrscheinlichkeit P(r ≤ X ≤ s)

Beispiel:

Bernoulli-Formel

Ziehungen:	n =	15
Trefferwahrscheinlichkeit.:	p =	3/4
Anzahl Treffer:	k =	12

☑ als Bruch eingeben

$$P(E) = B\,(n;\,p;\,k) = P(\,X{=}k\,) = \binom{n}{k} \cdot \left(p\right)^{k} \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} \cong \binom{15}{12} \cdot \left(0{,}75\right)^{12} \cdot \left(0{,}25\right)^{3} \cong 455 \cdot \left(0{,}75\right)^{12} \cdot \left(0{,}25\right)^{3} \cong 0{,}2252$$

Berechnung von kumulierten Wahrscheinlichkeiten

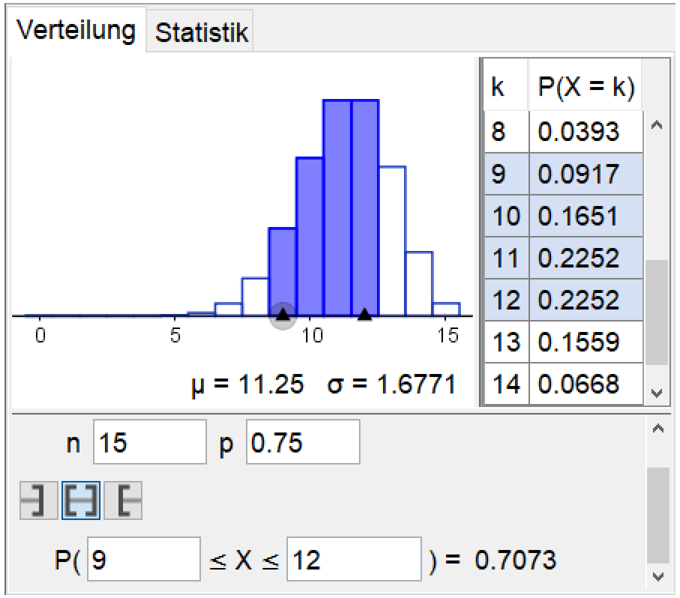
Bestimmung einer Intervallwahrscheinlichkeit P(r ≤ X ≤ s)

r = 9 s = 12

$$P(9 \le X \le 12) \cong P(X{=}9) + P(X{=}10) + P(X{=}11) + P(X{=}12)$$

$$\cong 0{,}0917 + 0{,}1651 + 0{,}2252 + 0{,}2252$$

$$\cong 0{,}7073$$



Übung:

Bernoulli-Formel

Ziehungen: $n =$ 15

Trefferwahrscheinlichkeit.: $p =$ 3/4 ☑ als Bruch eingeben

Anzahl Treffer: $k =$ 10

$P(E) = B\ (n;\ p;\ k) = P(\ X{=}k\ ) =$

Berechnung von kumulierten Wahrscheinlichkeiten

Bestimmung einer Intervallwahrscheinlichkeit $P(\ r \leq X \leq s\ )$

$r =$ 8 $s =$ 10

$P(8{\leq}X{\leq}10) \cong$

$\cong$

$\cong$

Lösung:

Bernoulli-Formel

Ziehungen: $n = 15$

Trefferwahrscheinlichkeit.: $p = 3/4$ ☑ als Bruch eingeben

Anzahl Treffer: $k = 10$

$$P(E) = B\,(n;\,p;\,k) = P(\,X{=}k\,) = \binom{n}{k} \cdot (p)^{k} \cdot (1-p)^{n-k} \cong \binom{15}{10} \cdot (0{,}75)^{10} \cdot (0{,}25)^{5} \cong 3003 \cdot (0{,}75)^{10} \cdot (0{,}25)^{5} \cong 0{,}1651$$

Berechnung von kumulierten Wahrscheinlichkeiten

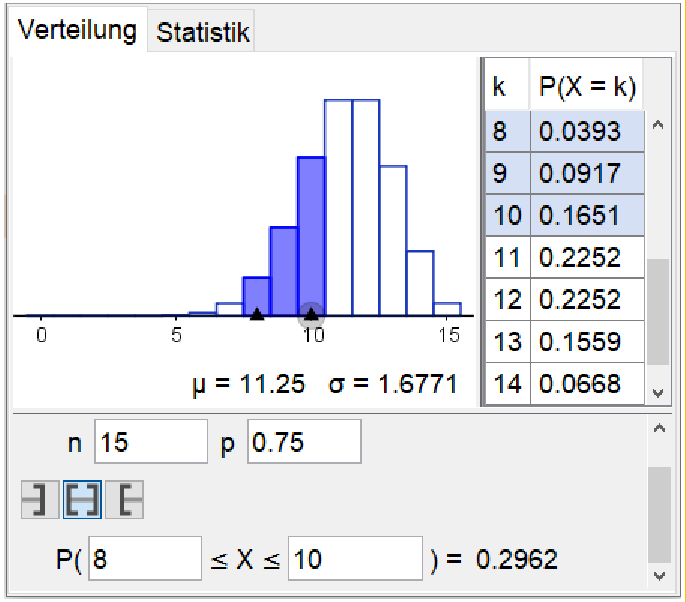
Bestimmung einer Intervallwahrscheinlichkeit $P(\,r \le X \le s\,)$

$r = 8$ $s = 10$

$$P(8 \le X \le 10) \cong P(X{=}8) + P(X{=}9) + P(X{=}10)$$

$$\cong 0{,}0393 + 0{,}0917 + 0{,}1651$$

$$\cong 0{,}2962$$



8.4.5 Bestimmung einer Mindestzahl n von Versuchen

Beispiel: **Bestimmung der Länge einer Bernoulli-Kette (mindestens-mindestens-mindestens-Aufgabe)**

Frage: Wie oft muss ein Bernoulli-Versuch (mit einer Trefferwahrscheinlichkeit p = 1/4)

☑ als Bruch

mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von

mindestens 90,00% *mindestens* ein Treffer erzielt wird.

Ansatz:

$P(X\geq 1) \geq 0{,}9$	$\mid$ P(X≥1) wird mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit dargestellt.
$1 - P(X=0) \geq 0{,}9$	$\mid -1$
$-P(X=0) \geq -0{,}1$	$\mid \cdot(-1)$; Relationszeichen dreht sich um.
$P(X=0) \leq 0{,}1$	$\mid$ P(X=0) wird durch B(n; p; k) ersetzt.
$B(n; 0{,}25; 0) \leq 0{,}1$	
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}2500^0 \cdot 0{,}7500^n \leq 0{,}1$	
$0{,}7500^n \leq 0{,}1$	$\mid \ln()$
$\ln(0{,}7500^n) \leq \ln(0{,}1)$	$\mid$ Anwendung eines Logarithmus-Gesetzes
$n \cdot \ln(0{,}7500) \leq \ln(0{,}1)$	$\mid : \ln(0{,}7500)$; Relationszeichen dreht sich um, da durch negative Zahl dividiert wird.
$n \geq 8{,}003923$	

Übung:

Bestimmung der Länge einer Bernoulli-Kette (mindestens-mindestens-mindestens-Aufgabe)

Frage: Wie oft muss ein Bernoulli-Versuch (mit einer Trefferwahrscheinlichkeit p = 1/2)

☑ als Bruch

mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von

mindestens 99,00% *mindestens* ein Treffer erzielt wird.

Lösung:

Bestimmung der Länge einer Bernoulli-Kette (mindestens-mindestens-mindestens-Aufgabe)

Frage: Wie oft muss ein Bernoulli-Versuch (mit einer Trefferwahrscheinlichkeit p = 1/2)

☑ als Bruch

mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von

mindestens 99,00% *mindestens* ein Treffer erzielt wird.

Ansatz:

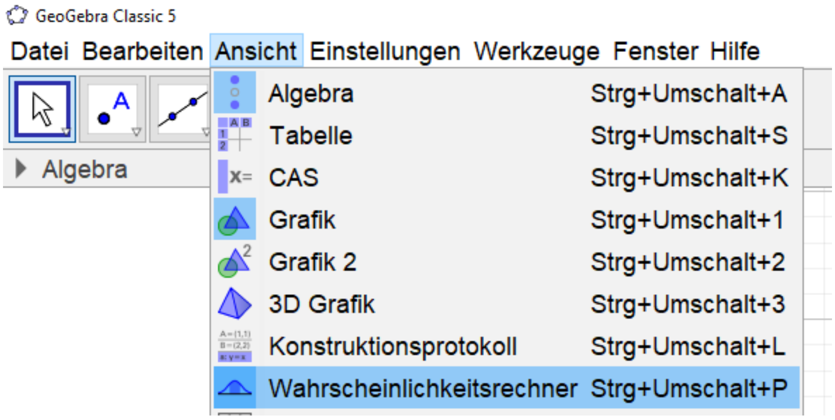
$P(X \geq 1) \geq 0{,}99$	| $P(X \geq 1)$ wird mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit dargestellt.
$1 - P(X=0) \geq 0{,}99$	| - 1
$-P(X=0) \geq -0{,}01$	| · (-1) ; Relationszeichen dreht sich um.
$P(X=0) \leq 0{,}01$	| $P(X=0)$ wird durch B(n; p; k) ersetzt.
$B(n; 0{,}5; 0) \leq 0{,}01$	
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}5000^0 \cdot 0{,}5000^n \leq 0{,}01$	
$0{,}5000^n \leq 0{,}01$	| ln()
$\ln(0{,}5000^n) \leq \ln(0{,}01)$	| Anwendung eines Logarithmus-Gesetzes
$n \cdot \ln(0{,}5000) \leq \ln(0{,}01)$	| : ln(0,5000) ; Relationszeichen dreht sich um, da durch negative Zahl dividiert wird.
$n \geq 6{,}643856$	

8.5 Eigenschaften der Binomialverteilung

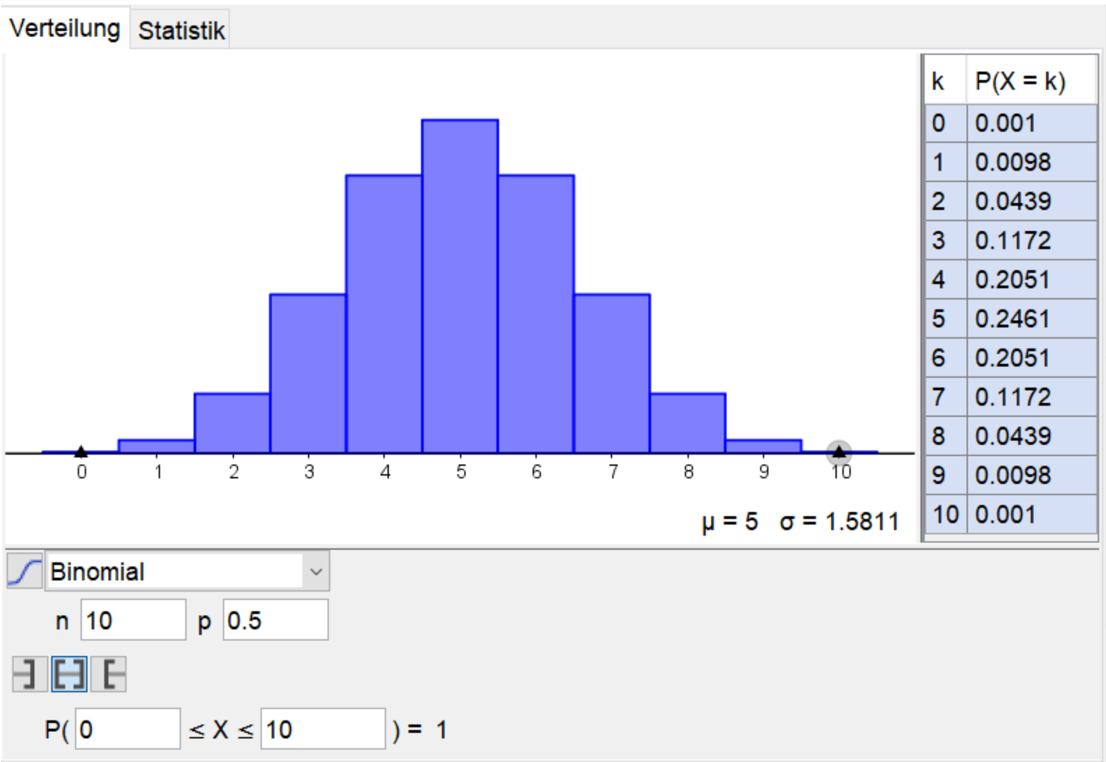
8.5.1 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung (siehe S. 150) ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (siehe S. 64), deren Wahrscheinlichkeiten mit der Bernoulli-Formel (siehe unten) errechnet werden.

Mithilfe des Wahrscheinlichkeitsrechners von GeoGebra Classic (Download hier)



kann die Binomialverteilung (z.B. für n = 10 und p = 0,5) graphisch dargestellt werden:

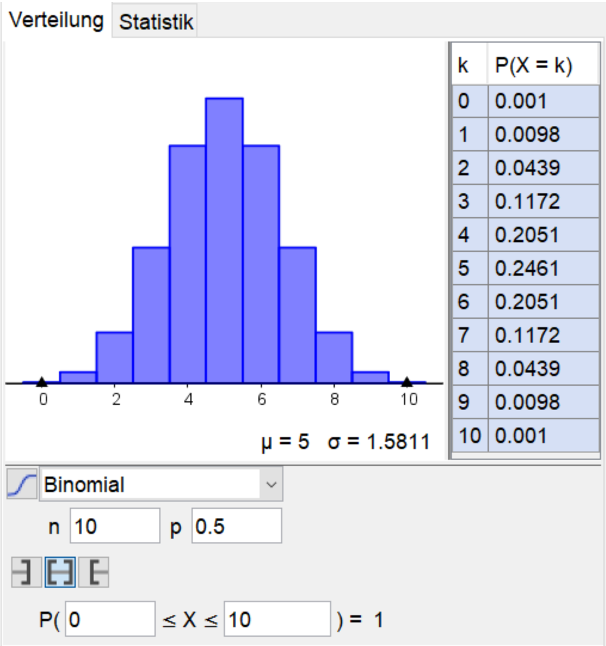


Bernoulli-Formel: $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot (p)^{k} \cdot (1-p)^{n-k}$

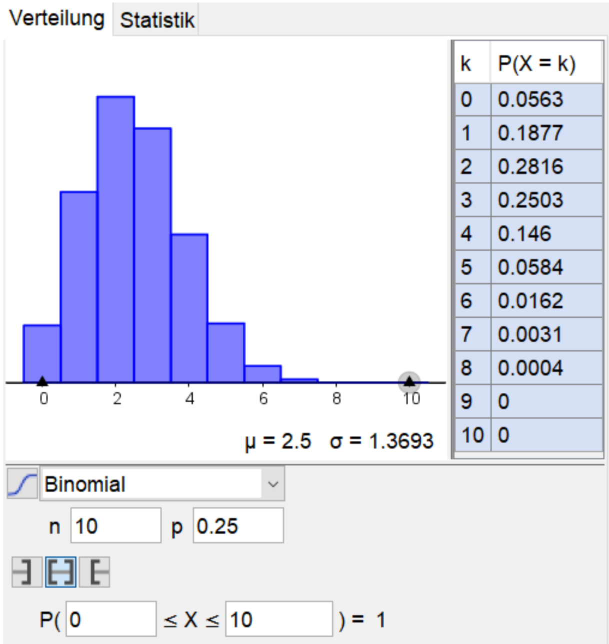
8.5.2 Einfluss der Trefferwahrscheinlichkeit p auf die Binomialverteilung

Beispiele: Die Kettenlänge n = 10 wird nicht verändert. Für die Trefferwahrscheinlichkeit p werden drei unterschiedliche Werte angenommen.

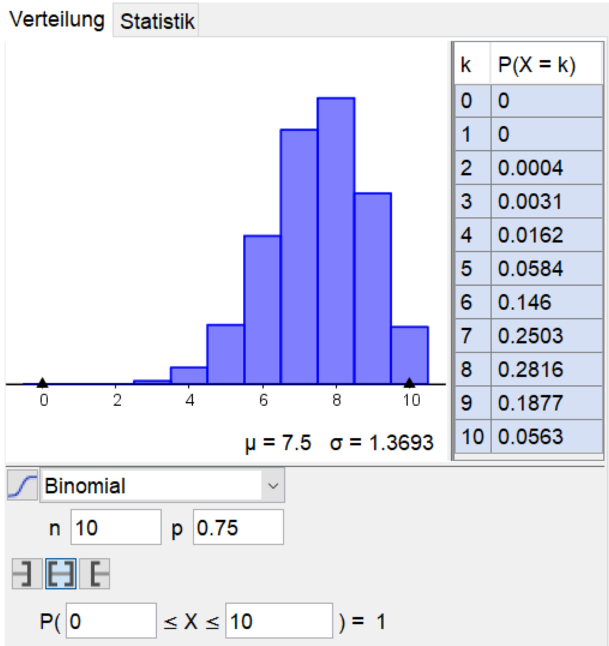
Beispiel 1: p = 0,5



Beispiel 2: p = 0,25



Beispiel 3: p = 0,75



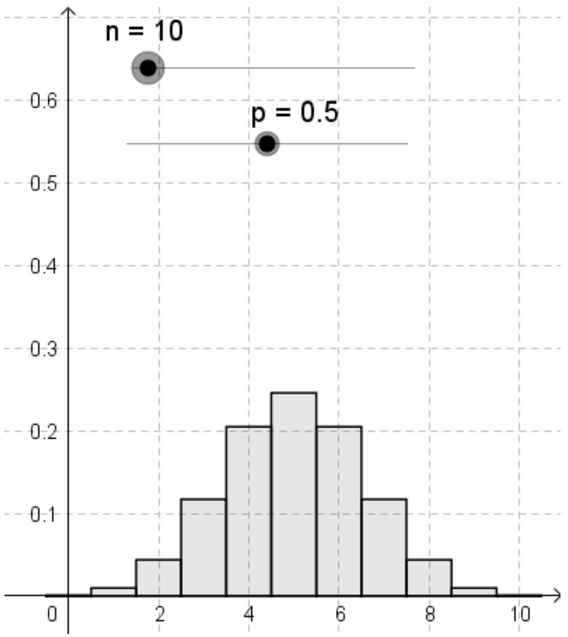
Beobachtungen:

- Je größer die Trefferwahrscheinlichkeit p ist, desto weiter rechts liegt das Maximum der Verteilung.
- Für p=0,5 ist die Verteilung symmetrisch.
- B(n; p) und B(n; 1-p) sind spiegelsymmetrisch zueinander.

8.5.3 Einfluss der Kettenlänge n auf die Binomialverteilung

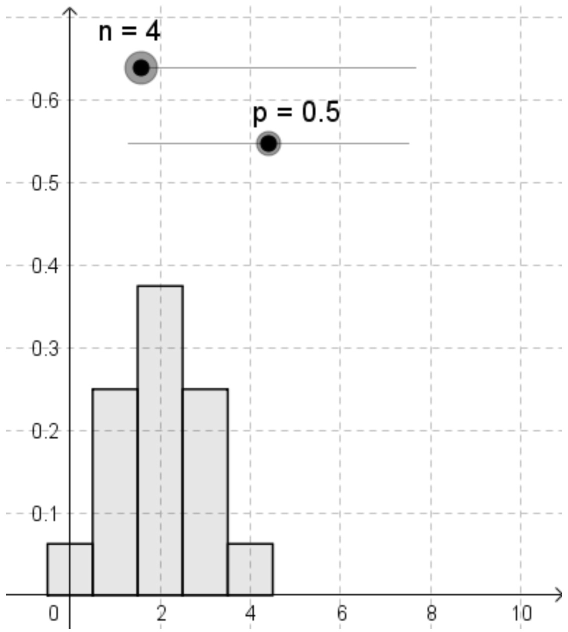
Beispiele: Die Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,5 wird nicht verändert. Für die Kettenlänge n werden vier unterschiedliche Werte angenommen.

Beispiel 1: $n = 10$



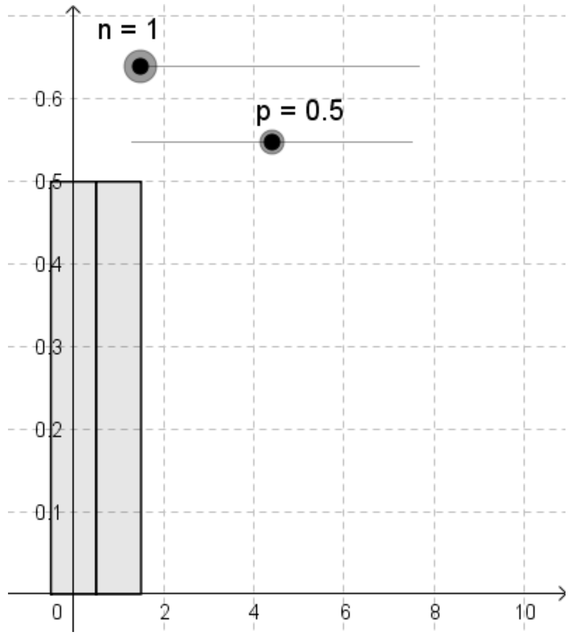
größte Wahrscheinlichkeit:
$B(10; 0{,}5; 5) \cong 0{,}2461$

Beispiel 2: $n = 4$



größte Wahrscheinlichkeit:
$B(4; 0{,}5; 2) \cong 0{,}375$

Beispiel 3: $n = 1$

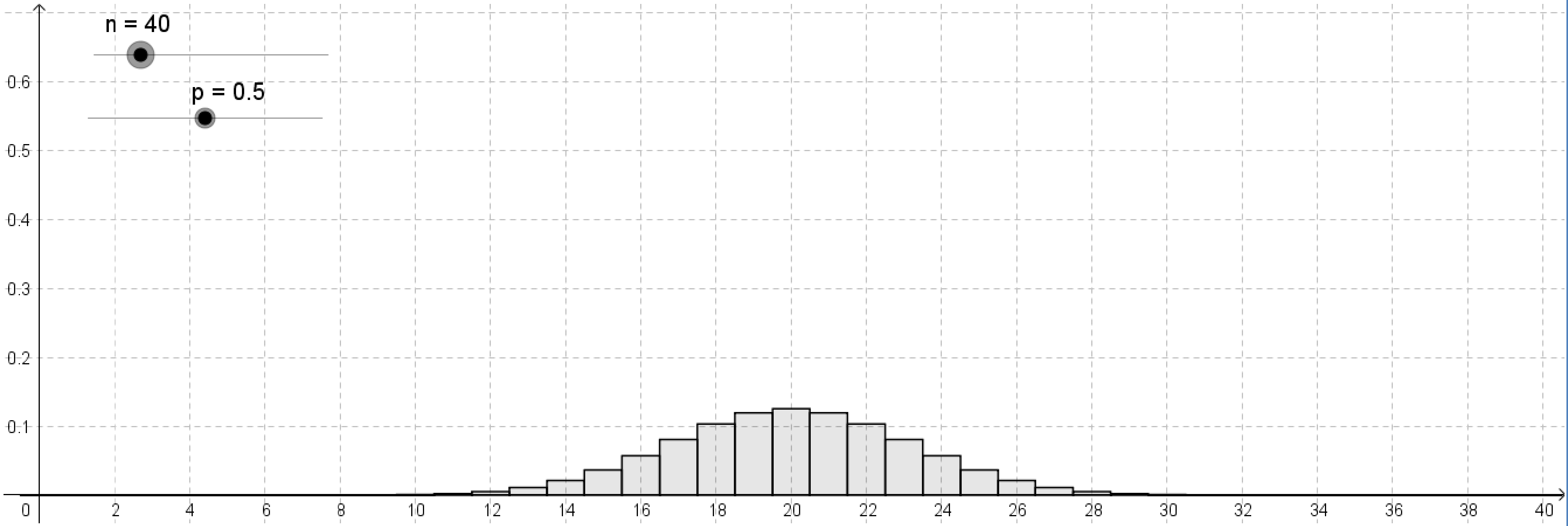


größte Wahrscheinlichkeiten:
$B(1; 0{,}5; 0) \cong 0{,}5$
$B(1; 0{,}5; 1) \cong 0{,}5$

Beobachtung:

Je kleiner die Kettenlänge n ist, desto höher werden die Säulen der Verteilung. Grund: Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten einer Verteilung ist gleich 1. Bei geringerer Kettenlänge n gibt es weniger Möglichkeiten, auf die sich die Wahrscheinlichkeiten verteilen können. (siehe auch Beispiel 4: n = 40)

Beispiel 4: n = 40



größte Wahrscheinlichkeit:
B(40; 0,5; 20) ≅ 0,1254

8.5.4 Erwartungswert einer *binomialverteilten* Zufallsgröße

Bisher bekannt (siehe S. 129) über eine Zufallsgröße und Ihren Erwartungswert war:

Es sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilung

Werte von X	x_1	x_2	$\dots$	x_r
$P(X = x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_r

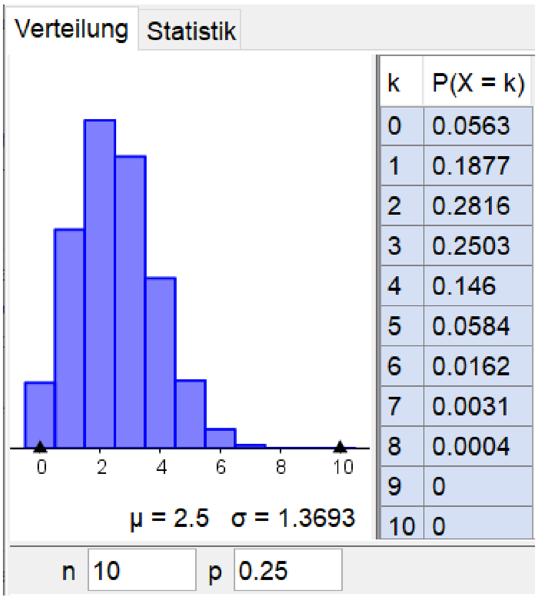
Die Zahl

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_r \cdot p_r$$

heißt Erwartungswert von X.

Betrachtet man die Binomialverteilung X ~ B(10; 0,25), so kann man den Erwartungswert so berechnen:

$$E(X) \cong 0 \cdot 0{,}0563 + 1 \cdot 0{,}1877 + 2 \cdot 0{,}2816 + 3 \cdot 0{,}2503$$
$$+ 4 \cdot 0{,}146 + 5 \cdot 0{,}0584 + 6 \cdot 0{,}0162$$
$$+ 7 \cdot 0{,}0031 + 8 \cdot 0{,}0004 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot 0$$
$$\cong 2{,}5$$



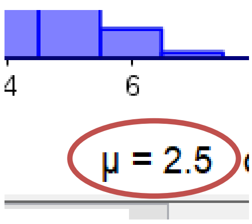
k	P(X = k)
0	0.0563
1	0.1877
2	0.2816
3	0.2503
4	0.146
5	0.0584
6	0.0162
7	0.0031
8	0.0004
9	0
10	0

Diese Vorgehensweise ist recht aufwendig. Bei einer *binomialverteilten* Zufallsgröße X lässt sich der Erwartungswert jedoch auch sehr leicht über folgende Formel berechnen:

$$E(X) = n \cdot p$$

Im obigen Falle ergibt sich also $E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$.

Oft wird für $E(X)$ auch der griechische Buchstabe μ (My) verwendet:



8.5.5 Standardabweichung einer *binomialverteilten* Zufallsgröße *)

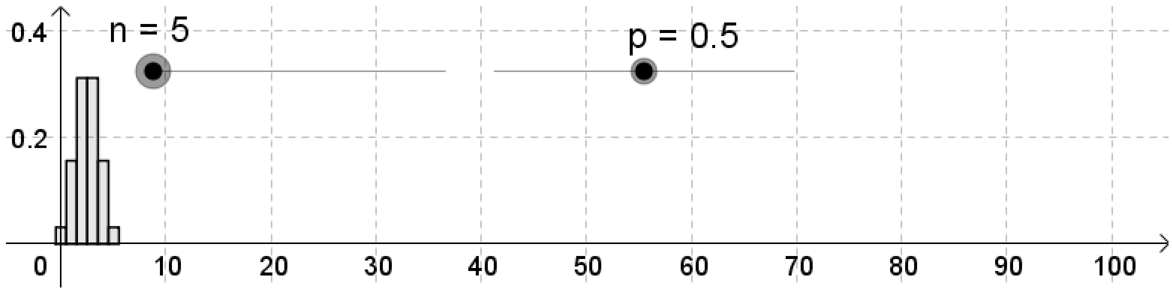
Die Standardabweichung σ (kleines Sigma) einer *binomialverteilten* Zufallsgröße X lässt sich berechnen durch:

$$\sigma = \sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

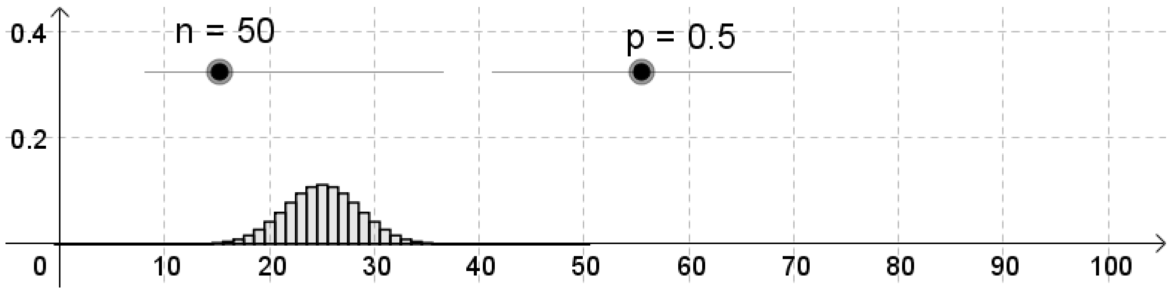
Man beachte, dass $n \cdot p$ der Erwartungswert E(X) = µ ist.

Die Standardabweichung sagt etwas über die *Breite* der Verteilung aus:

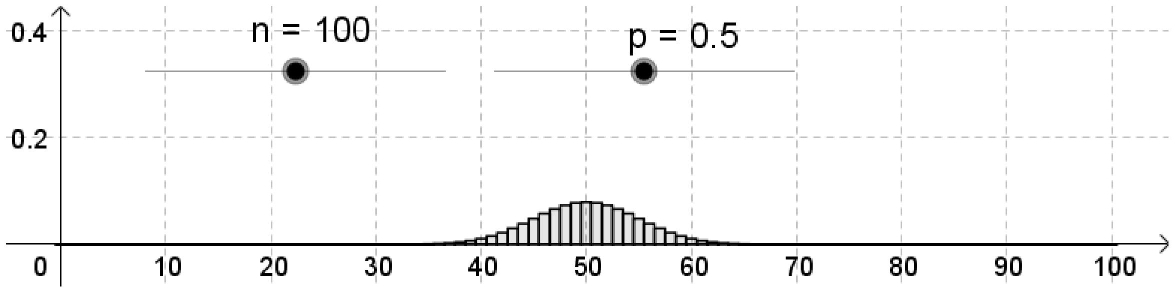
Beispiel 1: $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$ $\quad \sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{2{,}5 \cdot (1-0{,}5)} \cong 1{,}118$



Beispiel 2: $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}5 = 25$ $\quad \sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{25 \cdot (1-0{,}5)} \cong 3{,}5355$



Beispiel 3: $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}5 = 50$ $\quad \sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{50 \cdot (1-0{,}5)} = 5$



8.5.6 σ-Regeln *)

Die Berechnung von Intervallwahrscheinlichkeiten wurde bereits behandelt (siehe S. 163). Für große n und breite Intervalle wird dies jedoch sehr aufwändig.

Für bestimmte Fragestellungen gibt es ein wesentlich einfacheres Verfahren.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert $E(X) = \mu$ und der Standardabweichung σ gilt für hinreichend große n, sofern $\sigma > 3$ ist:

1σ-Regel: $P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0{,}680$

2σ-Regel: $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$

3σ-Regel: $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$

Mithilfe der Standardabweichung σ lässt sich demnach die Wahrscheinlichkeit abschätzen, mit welcher die Trefferzahl einer Bernoulli-Kette innerhalb eines eines Intervalls liegt, welches ein Vielfaches von σ links vom Erwartungswert μ beginnt und ein Vielfaches von σ rechts vom Erwartungswert μ endet.

Beispiel: Eine Münze (p = 0,5) wird n = 100 mal geworfen. Sei X die Anzahl der Wappen-Würfe.

Berechnung von Erwartungswert und Standardabweichung:

$E(X) = \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}5 = 50$

$\sigma(X) = \sqrt{50 \cdot (1 - 0{,}5)} = 5 > 3$

Probe mit GeoGebra-Rechner:

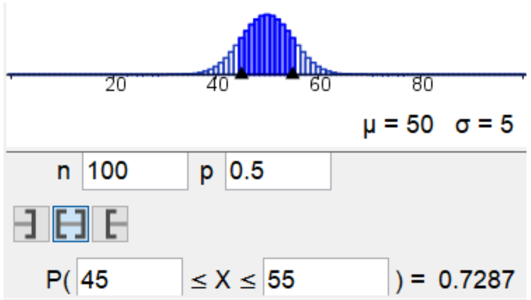
<u>Anwendung der 1σ-Regel:</u>

Linke Intervallgrenze: $\mu - 1\sigma = 50 - 5 = 45$

Rechte Intervallgrenze: $\mu + 1\sigma = 50 + 5 = 55$

$\Rightarrow P(45 \leq X \leq 55) \approx 68\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% wird bei 100 Münzwürfen 45 bis 55mal Wappen geworfen.



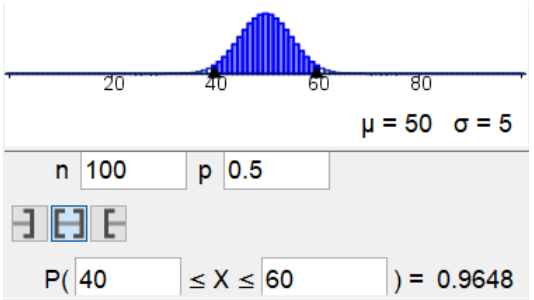
<u>Anwendung der 2σ-Regel:</u>

Linke Intervallgrenze: $\mu - 2\sigma = 50 - 10 = 40$

Rechte Intervallgrenze: $\mu + 2\sigma = 50 + 10 = 60$

$\Rightarrow P(40 \leq X \leq 60) \approx 95{,}5\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5% wird bei 100 Münzwürfen 40 bis 60mal Wappen geworfen.



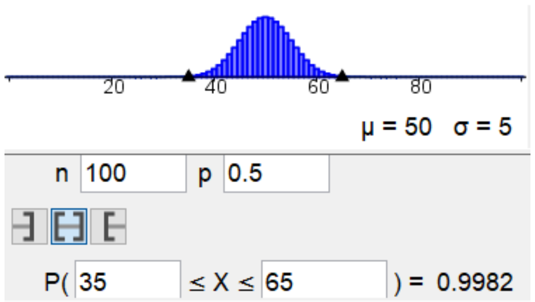
<u>Anwendung der 3σ-Regel:</u>

Linke Intervallgrenze: $\mu - 3\sigma = 50 - 15 = 35$

Rechte Intervallgrenze: $\mu + 3\sigma = 50 + 15 = 65$

$\Rightarrow P(35 \leq X \leq 65) \approx 99{,}7\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7% wird bei 100 Münzwürfen 35 bis 65mal Wappen geworfen.



Übung: Beispiel: Eine Münze ($p = 0,5$) wird $n = 1000$ mal geworfen. Sei X die Anzahl der Wappen-Würfe.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ.
2. Wenden Sie die σ-Regeln an.
3. Überprüfen Sie die Werte mit dem GeoGebra-Wahrscheinlichkeitsrechner.

Lösung:

Beispiel: Eine Münze (p = 0,5) wird n = 100 mal geworfen. Sei X die Anzahl der Wappen-Würfe.

Berechnung von Erwartungswert und Standardabweichung:

$E(X) = \mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}5 = 500$

$\sigma(X) = \sqrt{500 \cdot (1 - 0{,}5)} \approx 15{,}811 \approx 16 > 3$

Probe mit GeoGebra-Rechner:

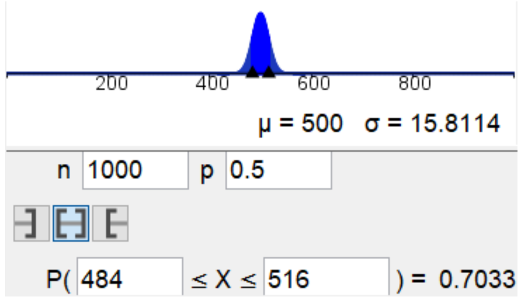
<u>Anwendung der 1σ-Regel:</u>

Linke Intervallgrenze: $\mu - 1\sigma \approx 500 - 16 = 484$

Rechte Intervallgrenze: $\mu + 1\sigma \approx 500 + 16 = 516$

$\Rightarrow P(484 \leq X \leq 516) \approx 68\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% wird bei 1000 Münzwürfen 484 bis 516mal Wappen geworfen.



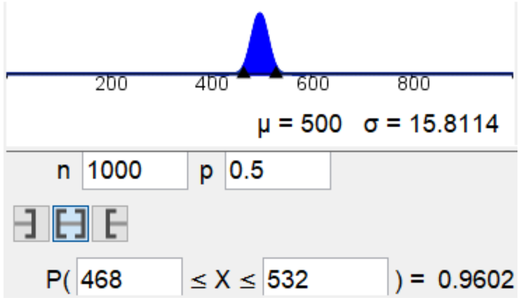
<u>Anwendung der 2σ-Regel:</u>

Linke Intervallgrenze: $\mu - 2\sigma \approx 500 - 32 = 468$

Rechte Intervallgrenze: $\mu + 2\sigma \approx 500 + 32 = 532$

$\Rightarrow P(468 \leq X \leq 532) \approx 95{,}5\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5% wird bei 1000 Münzwürfen 468 bis 532mal Wappen geworfen.



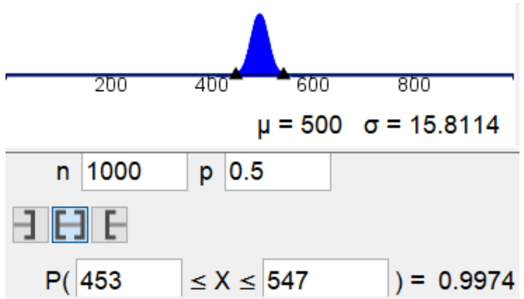
<u>Anwendung der 3σ-Regel:</u>

Linke Intervallgrenze: $\mu - 3\sigma \approx 500 - 47 = 453$

Rechte Intervallgrenze: $\mu + 3\sigma \approx 500 + 47 = 547$

$\Rightarrow P(453 \leq X \leq 547) \approx 99{,}7\%$

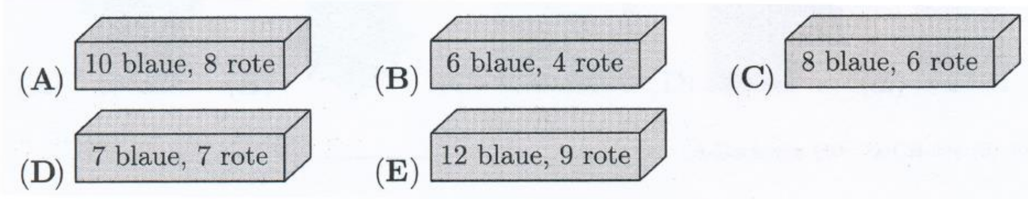
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7% wird bei 1000 Münzwürfen 453 bis 547mal Wappen geworfen.



9 Komplexe Übungen

9.1 Übung 1 (blaue Kugeln in Kisten)

♣ 3. Clementine möchte – ohne reinzuschauen – einen Ball aus einer der folgenden fünf Kisten nehmen. Auf jeder Kiste steht, wie viele rote und blaue Bälle darin enthalten sind. Bei welcher Kiste ist die Wahrscheinlichkeit am größten, dass Clementine einen blauen Ball herausnimmt?



Quelle: Känguruwettbewerb 2017, 11/13, Aufgabe 8,

https://www.mathe-kaenguru.de/chronik/aufgaben/

[47]

---

[47] Aus: Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 4

Lösung 1:

Nach der Laplace-Formel (siehe S. 54) ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

Kiste A: $P(blau) = \frac{10}{18} \cong 0{,}55$

Kiste B: $P(blau) = \frac{6}{10} \cong 0{,}6$

Kiste C: $P(blau) = \frac{8}{14} \cong 0{,}57$

Kiste D: $P(blau) = \frac{7}{14} \cong 0{,}5$

Kiste e: $P(blau) = \frac{12}{21} \cong 0{,}57$

Bei Kiste B ist die Wahrscheinlichkeit am größten.

9.2 Übung 2 (Verteilung von Einsätzen für ein faires Spiel)

♣ 4. Jemand wettet, dass bei einem 20fachen Wurf einer Laplace-Münze 10mal Zahl erscheint. Wie müssen die Einsätze verteilt sein, damit die Wette fair ist?

[48]

[48] Aus: Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 5

Lösung 2:

Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette (siehe S. 150).

n = 20 (Länge der Bernoulli-Kette)
p = 0,5 (Trefferwahrscheinlichkeit)
k = 10 (Anzahl der Treffer)

Dann gilt nach der Bernoulli-Formel (siehe S. 150):

$$B(n; p; k) = \binom{20}{10} \cdot 0{,}5^{10} \cdot (1 - 0{,}5)^{20-10} = 184756 \cdot 0{,}5^{20} \approx 0{,}18$$

Wie ist die Formulierung „Wie müssen die Einsätze verteilt sein, damit das Spiel fair ist?“ zu verstehen?

1. Variante (siehe auch S. 144):

Man geht von einem Spieler und einem Spielbudenbetreiber aus.

- Der Einsatz vom Spieler wird mit e bezeichnet, welchen er nicht zurück erhält.
- Der Einsatz vom Spielbudenbetreiber ist der Auszahlungsbetrag a im Gewinnfall.

Es stellt sich die Frage, wie hoch der Einsatz e sein muss und wie hoch die Auszahlung a im Gewinnfall sein muss, damit das Spiel fair ist.

Die Zufallsgröße A gibt die Auszahlung an.

a_i	a	0
$P(A = a_i)$	0,1800	0,8200

Berechnung der erwarteten Auszahlung E(A):

$E(A) \cong a \cdot 0{,}18 + 0 \cdot 0{,}82$

Für ein faires Spiel muss gelten: Erwartbare Auszahlung - Spieleinsatz = 0

$$E(A) - e = 0$$

Der Einsatz e muss also der erwarteten Auszahlung E(A) entsprechen.

Demnach gilt: $a \cdot 0{,}18 = e \quad \Leftrightarrow \quad e / a = 0{,}18 / 1 = 18 / 100$

2. Variante:

Man geht von einem Spieler 1 und einem Spieler 2 aus.

- Der Einsatz vom Spieler 1 wird mit e bezeichnet, welchen er im Gewinnfall zusammen mit dem Einsatz von Spieler 2 zurück erhält.
- Der Einsatz vom Spieler 2 wird mit a bezeichnet, welchen er im Gewinnfall zusammen mit dem Einsatz von Spieler 1 zurück erhält.

Es stellt sich die Frage, wie hoch die Einsätze e und a sein müssen, damit das Spiel fair ist.

Bei dieser Interpretation der Einsätze gilt für den Nettogewinn X von Spieler 1:

$E(X) = a \cdot 0{,}18 - e \cdot 0{,}82$

Bei einer fairen Wette muss gelten: $E(X) = 0$

Demnach gilt: $a \cdot 0{,}18 - e \cdot 0{,}82 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 0{,}18 = e \cdot 0{,}82 \quad \Leftrightarrow \quad e / a = 0{,}18 / 0{,}82 = 18 / 82$

Durch die unterschiedliche Interpretation der Einsätze (bzw. Festlegung der Spielregeln) gelangt man zu unterschiedlichen Ergebnissen. Der Sachverhalt an sich hat sich dadurch aber nicht geändert: In beiden Fällen hat man ein faires Spiel konstruiert.

9.3 Übung 3 (Würfeln mit einem normalen und einem Spezialwürfel)

♣ 5. Diego hat einen Spielwürfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Philipps „Spezialwürfel" trägt die Augenzahlen 2, 2, 2, 5, 5, 5. Jeder der beiden würfelt mit seinem Würfel. Wer die höhere Augenzahl würfelt, gewinnt, und bei gleicher Augenzahl gewinnt keiner von beiden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Philipp gewinnt?

Quelle: Känguruwettbewerb 2015, 11/13, Aufgabe 21, https://www.mathe-kaenguru.de/chronik/aufgaben/

[49]

[49] Aus: Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 6

Lösung 3:
Man kann den Vorgang als mehrstufiges Zufallsexperiment ansehen: Zuerst würfelt Diego und danach Phillip.

Für die Ergebnismenge ergibt sich:

Ω = {(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)}

Hierbei sei die 1. Komponente des geordneten Paars das Ergebnis, welches Diego gewürfelt hat. Die 2. Komponente ist das Ergebnis, welches Phillip mit seinem Spezialwürfel gewürfelt hat.

Es ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

$P((1,2)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ (da die Wahrscheinlichkeit einer Eins bei Diego $\frac{1}{6}$ beträgt und die einer Zwei bei Phillip $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, siehe auch 1. Pfadregel (S. 100))

$P((2,2)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

…

$P((6,5)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Alle Ergebnisse sind somit gleichwahrscheinlich.

Dass Phillip gewinnt, kann durch das Ereignis A beschrieben werden:

A = {(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)}

Nach der Laplace-Formel ergibt sich:

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{12}$

9.4 Übung 4 (Bundesliga-Spieltag)

♣ 6. An einem Spieltag in der 1. Bundesliga fielen folgende Anzahlen von Toren:

2	1	3	0	2	0	4	2	1
1	1	2	3	1	2	0	2	2

a) Berechnen Sie die relative Häufigkeit des Ereignisses A: Es fielen mindestens 2 Tore.
b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median der Anzahl der Tore.
c) Wie würde sich das arithmetische Mittel ändern, wenn die eine Mannschaft 8 statt 4 Tore geschossen hätte? Wie würde sich in diesem Fall der Median ändern?

[50]

Hinweis:
Es sind die Tore *pro Mannschaft* (und nicht die Tore pro Spiel) zu betrachten.

[50] [50] Aus: Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 7

Lösung:

zu a) 10 von 18 Mannschaften schossen mindestens 2 Tore: $h_{18}(A) = \frac{10}{18}$

zu b) Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

$$\bar{x} = \frac{+1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{18} \cong 1{,}611$$

Median (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert): $\tilde{x} = 2$

	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4
Median (Lage):																		
Untermedian (Lage):									x									
Obermedian (Lage):										x								

zu c) Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (Durchschnitt) - Berechnung über *absolute* Häufigkeit:

$$\bar{x} = \frac{+1 \cdot 8 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{18} \cong 1{,}833$$

Median (Wert, der die der Größe nach geordnete Reihe der Daten halbiert): $\tilde{x} = 2$

	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	8
Median (Lage):																		
Untermedian (Lage):									x									
Obermedian (Lage):										x								

9.5 Übung 5 (Augenfarbe von Vater und Sohn)

♣ 11. Von Francis Galton (1822–1911) stammt eine Untersuchung der Augenfarbe von 1000 Vätern und je einem ihrer Söhne. Mit V: „Vater helläugig“ und S: „Sohn helläugig“ fand er folgende Anzahlen:

	S	$\bar{S}$
V	471	151
$\bar{V}$	148	

a) Ergänzen Sie die Tabelle, erstellen Sie ein vollständige Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten (Schätzwerte aus den Beobachtungsdaten).
b) Berechnen Sie $P(V)$ und $P(\bar{S})$.
c) Wie groß ist der Anteil der helläugigen Söhne unter den helläugigen Vätern?
d) Beurteilen Sie die Unabhängigkeit von V und S.

[51]

[51] Aus: Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 10

Lösung 5:

a) Absolute Häufigkeiten (siehe auch S. 120):

	S	$\bar{S}$	Summe
V	471	151	622
$\bar{V}$	148	230	378
Summe	619	381	1000

Wahrscheinlichkeiten (siehe auch S. 121):

	S	$\bar{S}$	Summe
V	0,471	0,151	0,622
$\bar{V}$	0,148	0,230	0,378
Summe	0,619	0,381	1

b) $P(V) = 0{,}471 + 0{,}151 = 0{,}622$
$P(\bar{S}) = 0{,}151 + 0{,}230 = 0{,}381$

c) Gesucht ist der Anteil der Vater-Sohn-Paare, bei denen der Sohn helläugig ist, an den Vater-Sohn-Paaren, bei denen der Vater helläugig ist: $\frac{471}{622} \approx 0{,}7562 \approx 75{,}62\%$

d) V und S sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn gilt: P(V) · P(S) = P(V∩S). (siehe auch S. 116)

Prüfe: P(V) · P(S) = 0,622 · 0,619 = 0,385 ≠ P(V∩S) = 0,471

⇒ Es liegt *keine* stochastische Unabhängigkeit vor, d.h. eine etwaige Helläugigkeit des Vaters hat einen Einfluss auf eine etwaige Helläugigkeit des Sohnes.

9.6 Übung 6 (Umwandlung einer Vierfeldertafel in ein Baumdiagramm)

Übersetzen Sie die Vierfeldertafel in ein Baumdiagramm:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) \cong$ 0,471	$P(A \cap \bar{B}) \cong$ 0,151	$P(A) \cong$ 0,622
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) \cong$ 0,148	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \cong$ 0,23	$P(\bar{A}) \cong$ 0,378
	$P(B) \cong$ 0,619	$P(\bar{B}) \cong$ 0,381	$P(\Omega) =$ 1

Lösung 6:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) \cong 0{,}471$	$P(A \cap \overline{B}) \cong 0{,}151$	$P(A) \cong 0{,}622$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) \cong 0{,}148$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong 0{,}23$	$P(\overline{A}) \cong 0{,}378$
	$P(B) \cong 0{,}619$	$P(\overline{B}) \cong 0{,}381$	$P(\Omega) = 1$

Möglichkeit 1:

x

$P(A) \cong 0{,}622$ — $P(\overline{A}) \cong 0{,}378$

A: $P_A(B) \cong 0{,}7572$ — $P_A(\overline{B}) \cong 0{,}2428$

$\overline{A}$: $P_{\overline{A}}(B) \cong 0{,}3915$ — $P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cong 0{,}6085$

B — $\overline{B}$ — B — $\overline{B}$

$P(A \cap B) \cong 0{,}471$ — $P(A \cap \overline{B}) \cong 0{,}151$ — $P(\overline{A} \cap B) \cong 0{,}148$ — $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong 0{,}23$

Möglichkeit 2 (inverses Baumdiagramm):

x

$P(B) \cong 0{,}619$ — $P(\overline{B}) \cong 0{,}381$

B: $P_B(A) \cong 0{,}7609$ — $P_B(\overline{A}) \cong 0{,}2391$

$\overline{B}$: $P_{\overline{B}}(A) \cong 0{,}3963$ — $P_{\overline{B}}(\overline{A}) \cong 0{,}6037$

A — $\overline{A}$ — A — $\overline{A}$

$P(B \cap A) \cong 0{,}471$ — $P(B \cap \overline{A}) \cong 0{,}148$ — $P(\overline{B} \cap A) \cong 0{,}151$ — $P(\overline{B} \cap \overline{A}) \cong 0{,}23$

9.7 Übung 7 (Verteilung einer Zufallsgröße, Einsatz für faires Spiel)

♣ 17. In einer Urne liegen vier Kugeln. Sie tragen die Zahlen 1, 2, 3 bzw. 4. Es dürfen zwei Kugeln ohne Zurücklegen herausgenommen werden. Die Summe der auf den Kugeln stehenden Zahlen wird als Gewinn in € ausgezahlt.

a) Geben Sie die Verteilung der Zufallsgröße X – Gewinn an.

b) Bestimmen Sie fairen Einsatz für einen Griff in die Urne.

[52]

[52] Aus: Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 16

Lösung 7:

Es gibt folgende Möglichkeiten der Ziehung (bei der die Reihenfolge keine Rolle spielt):

1 und 2	→	3 € Auszahlung	2 und 3	→	5 € Auszahlung
1 und 3	→	4 € Auszahlung	2 und 4	→	6 € Auszahlung
1 und 4	→	5 € Auszahlung	3 und 4	→	7 € Auszahlung

Alle Möglichkeiten sind gleichwahrscheinlich.

Die Zufallsgröße X wird aus ‚excel-technischen' Gründen in A umbenannt. Es ergibt sich folgende Verteilung:

a_i	3	4	5	6	7
$P(A = a_i)$	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

Berechnung der erwarteten Auszahlung E(A):

$$E(A) \cong 3 \cdot 0{,}1667 + 4 \cdot 0{,}1667 + 5 \cdot 0{,}3333 + 6 \cdot 0{,}1667 + 7 \cdot 0{,}1667$$

$$\cong 5$$

Für ein faires Spiel muss gelten: Erwartbare Auszahlung - Spieleinsatz = 0

$$E(A) - e = 0$$

Der Einsatz e muss also der erwarteten Auszahlung E(A) entsprechen.

$$\Rightarrow \; e = 5$$

9.8 Übung 8 (Vierfeldertafel mit unabhängigen Ereignissen)

♣ 26. Von der 4-Felder-Tafel mit unabhängigen Ereignissen A und B sind die zwei Zahlen wie in der Abbildung vorgegeben. Berechnen Sie $P(A)$ und $P(B)$ und vervollständigen Sie die Tafel.

	B	$\bar{B}$
A	0,4	0,1
$\bar{A}$		

[53]

[53] Aus: Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 24

Lösung 8:

Da A und B stochastisch unabhängig sind, gilt: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

$P(A) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$

$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (durch Umstellung obiger Gleichung)

$P(B) = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8$

Es ergibt sich folgende Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) \cong$ 0,4	$P(A \cap \overline{B}) \cong$ 0,1	$P(A) \cong$ 0,5
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) \cong$ 0,4	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) \cong$ 0,1	$P(\overline{A}) \cong$ 0,5
	$P(B) \cong$ 0,8	$P(\overline{B}) \cong$ 0,2	$P(\Omega) =$ 1

9.9 Übung 9 (mindestens eine rote Kugel ziehen)

In einem Gefäß befinden sich 10 blaue und 5 rote Kugeln. Es 4mal gezogen, ohne dass die Kugel zurückgelegt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine rote Kugel gezogen wird?

Tipp: Zeichnen Sie zur Veranschaulich ein unvollständiges Baumdiagramm.

Lösung 9:

Anzahl der Ziehungen: 4

Anzahl der Möglichkeiten: 2

Möglichkeiten:	blau	rot
Anzahl:	10	5

Anzahl gesamt: 15

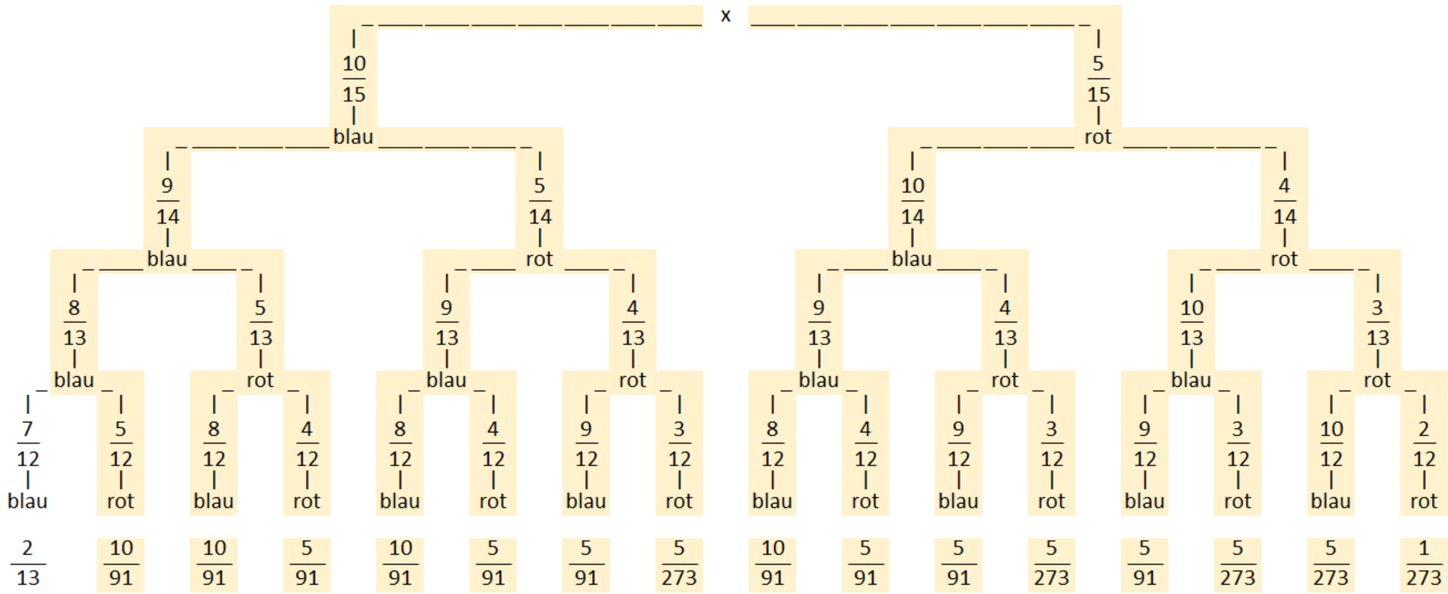
Mit Zurücklegen/Wdh.: nein

☐ Rechnungen ausblenden

☐ Ergebnisse ausblenden

Ereignis E: Alle ausgewählten Pfade

P(E) = 11/13 ≅ 0,8462



Es gibt zwei Lösungsmöglichkeiten:

Möglichkeit 1: Man berechnet alle Wahrscheinlichkeiten für die günstigen Pfade und addiert sie (sehr aufwändig!).

Möglichkeit 2: Man berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis:

$$P(\text{keine rote Kugel}) = \frac{2}{13}$$

$$P(\text{mindestes eine rote Kugel}) = 1 - \frac{2}{13} = \frac{11}{13}$$

9.10 Übung 10 (Lügendetektor)

800 Personen werden einem Lügendetektor-Test unterzogen. Der Lügendetektor erkennt mit einer Wahrscheinlich von 80%, wenn eine Person lügt. Wenn sie nicht lügt, erkennt er dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%. Von den 800 Personen lügen 200.

a) Stellen Sie die Situation mit einem Baumdiagramm dar.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Lügendetektor bei einer zufällig ausgewählten Person anzeigt, dass sie nicht lügt? (Es geht nur um die Anzeige des Detektors.)

c) Beurteilen Sie die Brauchbarkeit des Lügendetektors.

Hinweis: Wählen Sie folgende Bezeichnungen für die Ereignisse:

A: Die Person lügt.
B: Der Lügendetektor zeigt eine Lüge an.

Lösung 10:

zu a)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person lügt, liegt bei $P(A) = \frac{200}{800} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Wenn eine Person lügt, erkennt der Detektor dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $80\% = 0{,}8$.

Wenn eine Person nicht lügt, zeigt der Lügendetektor mit einer Wahrscheinlichkeit von $60\% = 0{,}6$ an, dass sie nicht lügt.

Hieraus ergibt sich folgendes Baumdiagramm:

x

$P(A) \cong$ 0,25 $\qquad$ $P(\bar{A}) \cong$ 0,75

A $\qquad$ $\bar{A}$

$P_A(B) \cong$ 0,8 $\qquad$ $P_A(\bar{B}) \cong$ 0,2 $\qquad$ $P_{\bar{A}}(B) \cong$ 0,4 $\qquad$ $P_{\bar{A}}(\bar{B}) \cong$ 0,6

B $\qquad$ $\bar{B}$ $\qquad$ B $\qquad$ $\bar{B}$

$P(A \cap B) \cong$ 0,2 $\qquad$ $P(A \cap \bar{B}) \cong$ 0,05 $\qquad$ $P(\bar{A} \cap B) \cong$ 0,3 $\qquad$ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \cong$ 0,45

zu b)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Lügendetektor bei einer zufällig ausgewählten Person anzeigt, dass sie nicht lügt ist

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}05 + 0{,}45 = 0{,}5 .$$

Der Lügendetektor zeigt also in 50% aller Fälle keine Lüge an. In diesen angezeigten Fällen sind sowohl die Fälle enthalten, in denen tatsächlich nicht gelogen wurde, als auch die Fälle, in denen gelogen wurde, der Detektor es aber nicht erkannt hat.

zu c)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Lügendetektor das Richtige anzeigt, also bei einer Lüge tatsächlich eine Lüge und bei keiner Lüge keine Lüge, liegt bei 0,2 + 0,45 = 0,65. Die Sicherheit für ein richtiges Ergebnis liegt also bei 65%.