Skript zur Fachvorlesung

Geometrie

(19/20 bbSt / GS Ma D4-D6)

Stand: 04.06.2020

Ralf Kühnke

Zur Orientierung

Liebe Teilnehmerin, lieber Teilnehmer,

gerne möchte ich Ihnen vorab ein paar Hinweise geben:

Dieses Skript wird parallel zur Vorlesung weiterentwickelt werden. Bitte beachten Sie jeweils die aktuelle Version, welche ggf. ab 20 Uhr des Vorlesungsvorabends bei Moodle zum Download zur Verfügung stehen wird.

Einen herzlichen Dank möchte ich Frau Dr. Warmuth aussprechen, die mir gestattet, Inhalte aus ihrem Skript, welches ich *sehr empfehlen* möchte, auch in meinem zu verwenden.

Alle von mir zu diesem Skript angefertigten GeoGebra-Dateien finden Sie hier. Bitte beachten Sie, dass Sie sich mit GeoGebra über die Ansicht „Konstruktionsprotokoll“ die Konstruktion schrittweise anzeigen lassen können.

Viele Teile dieses Skripts sind von mir verfilmt worden. Die einzelnen Videos können Sie unter

www.youtube.mathe.xyz

finden.

Für Rückmeldungen und ggf. Fehler-Hinweise an skript@mathe.xyz wäre ich sehr dankbar.

Ich wünsche Ihnen eine interessante Lektüre!

Mit herzlichen Grüßen
Ralf Kühnke

Inhalt

1 Geometrische Grundbegriffe

1.1 Punkte und Geraden

„Ein Punkt ist ein grundlegendes Element der Geometrie. Anschaulich stellt man sich darunter ein Objekt ohne jede Ausdehnung vor.“[1]

„Eine gerade Linie oder kurz Gerade ist ein Element der Geometrie. Sie ist eine gerade, unendlich lange, unendlich dünne und in beide Richtungen unbegrenzte Linie. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte wird hingegen als Strecke bezeichnet.“[2]

Eigenschaften von Geraden

1. Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte.
2. Durch jeden Punkt gehen unendlich viele Geraden.
3. Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
4. Zwei verschiedene Geraden haben entweder keinen oder genau einen Punkt gemeinsam.

[3]

1.2 Parallele Geraden

Zwei Geraden g und h in der Ebene heißen parallel, in Zeichen $g||h$, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben oder identisch sind:

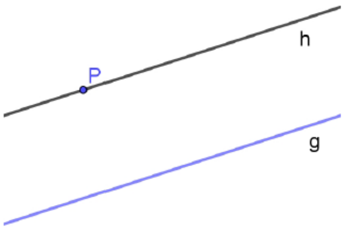
$$g||h \quad \Leftrightarrow \quad g = h \quad \text{oder} \quad g \cap h = \emptyset.$$

---

[1] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Punkt_%28Geometrie%29
[2] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Gerade
[3] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 3

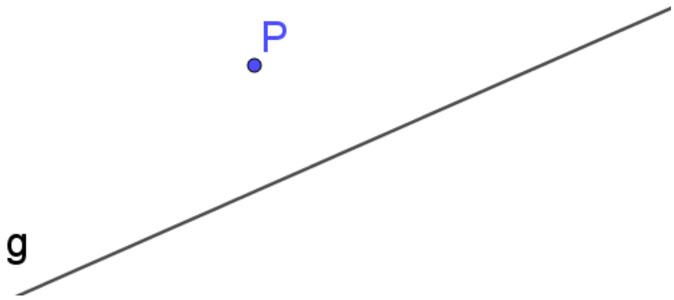
1.3 Parallelenaxiom

5. Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P existiert genau eine Gerade h, die durch P geht und parallel zu g ist.

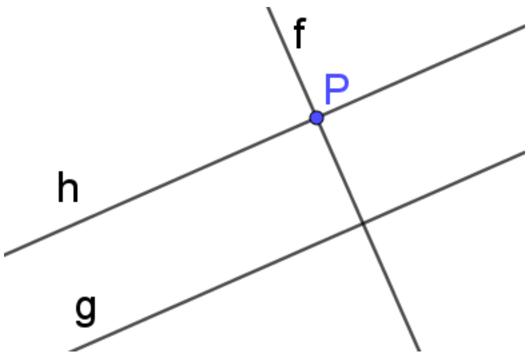


Übung:

Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt P. Konstruieren Sie die Gerade h, die parallel zu g ist und durch P geht.



Lösung:



Gerade f	Gerade durch P senkrecht zu g
Gerade h	Gerade durch P senkrecht zu f

Siehe auch:

- Orthogonale Geraden, Rechter Winkel (siehe S. 12)
- Lotfußpunkt (siehe S. 12)
- Parallelität und Orthogonalität (siehe S. 16)

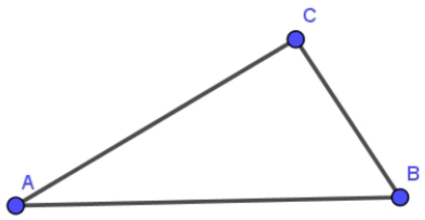
1.4 Strecken und Längen

Strecke AB: durch zwei Punkte A und B begrenztes Geradenstück, Menge aller Punkte der Geraden g_{AB}, die *zwischen* A und B liegen. (Wir benutzen *zwischen* intuitiv.) [4]

1.5 Dreiecksungleichung

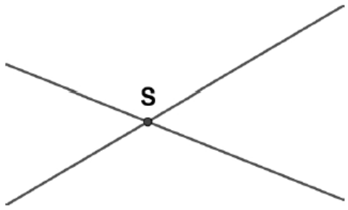
Die Strecke AB ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B.

$$|AB| \leq |AC| + |BC|$$



1.6 Halbgeraden (Strahlen)

Wenn zwei Geraden sich in einem Punkt schneiden, entstehen vier Halbgeraden, auch Strahlen genannt, und vier Winkel.

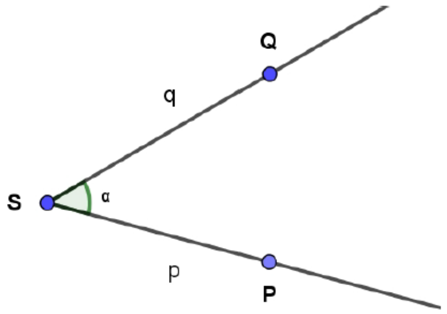


[5]

[4] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 6
[5] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 7

1.7 Winkel

Ein Winkel ist ein Teil der Ebene, der von zwei Strahlen (den Schenkeln p, q oder SP^+, SQ^+) mit gemeinsamem Anfangspunkt S begrenzt wird (auch Winkelfeld genannt):

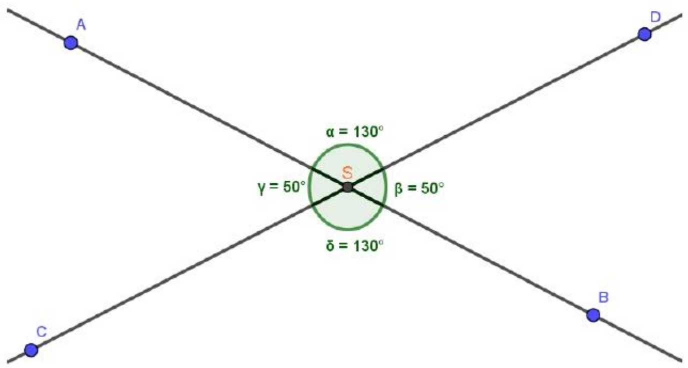


in Zeichen: α oder $\measuredangle(p, q)$ oder $\measuredangle PSQ$

[6]

1.8 Scheitelwinkel und Nebenwinkel

Scheitelwinkel (α und δ, β und γ) sind gleich groß, Nebenwinkel (α und β, γ und δ) ergänzen sich zu $180°$.



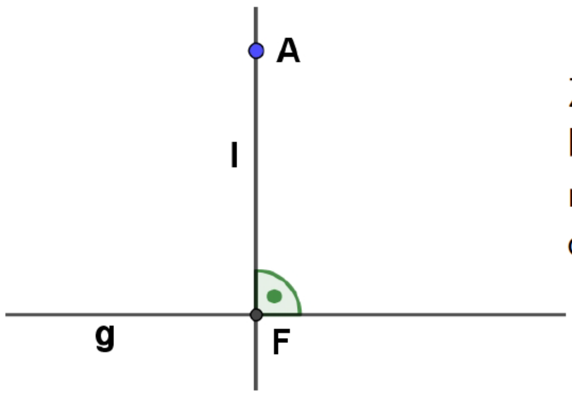
[7]

[6] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 7
[7] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 9

1.9 Orthogonale Geraden, Rechter Winkel

Zwei Geraden heißen orthogonal, wenn sie sich unter vier gleich großen Winkeln schneiden. Man sagt auch, sie stehen senkrecht aufeinander. Die Winkel heißen dann rechte Winkel. Ihr Winkelmaß beträgt $90°$. [8]

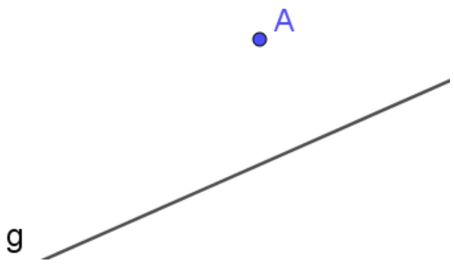
1.10 Lot(-gerade), Lotfußpunkt



Zu einer Geraden g und einem beliebigen Punkt A existiert genau eine Senkrechte l zu g, die durch A geht.

Die Senkrechte l nennt man auch Lot (-gerade) von A auf g.
Den Schnittpunkt F der Senkrechten l mit g nennt man den Lotfußpunkt.
Der Abstand von A zu g ist die Länge $|AF|$. [9]

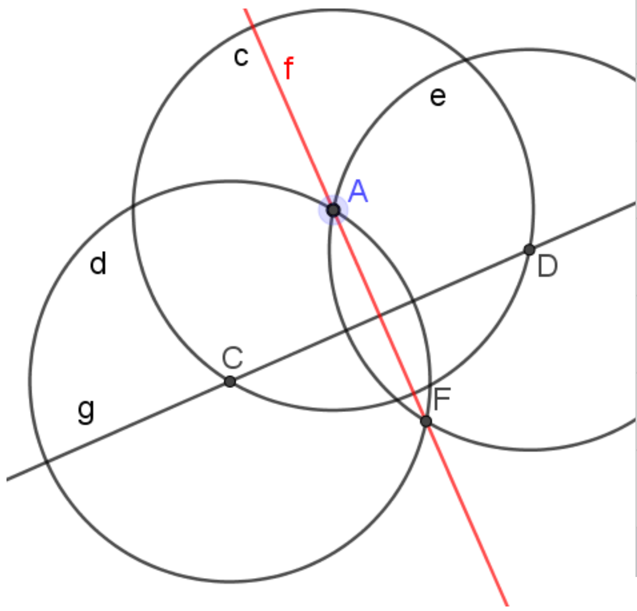
Übung: Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Lotgerade f von A auf g.



---

[8] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 10
[9] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 11

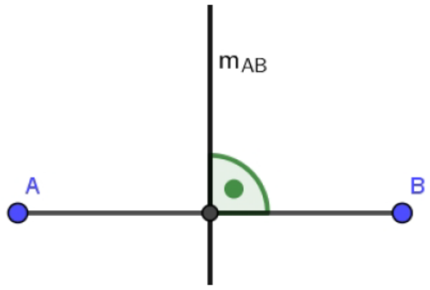
Lösung:



Kreis c	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 3
Punkt C	Schnittpunkt von c, g
Punkt D	Schnittpunkt von c, g
Kreis d	Kreis mit Mittelpunkt C und Radius 3
Kreis e	Kreis mit Mittelpunkt D und Radius 3
Punkt E	Schnittpunkt von d, e
Punkt F	Schnittpunkt von d, e
Gerade f	Linie A, F

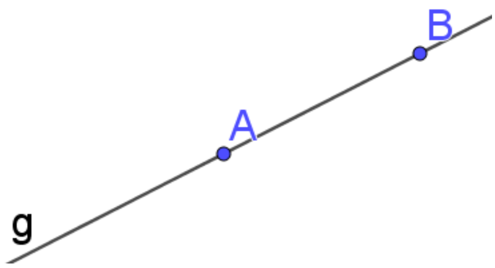
1.11 Mittelsenkrechte

Liegt statt einer Geraden eine Strecke AB vor und geht das Lot durch deren Mittelpunkt, dann nennt man dieses Lot Mittelsenkrechte m_{AB} von AB.



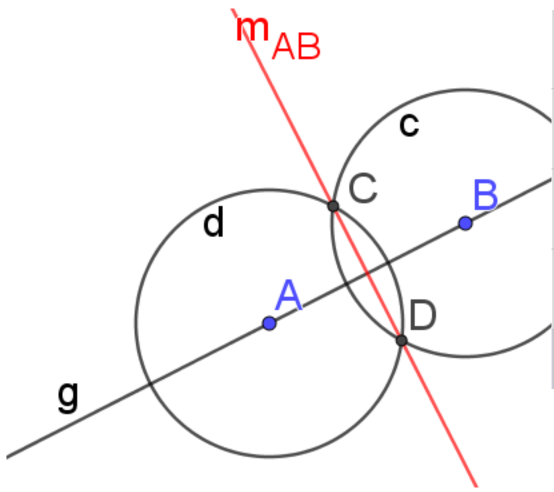
[10]

Übung: Gegeben sind die Punkte A und B, die auf der Geraden g liegen. Konstruieren Sie die Mittelsenkrechte von AB.



[10] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 12

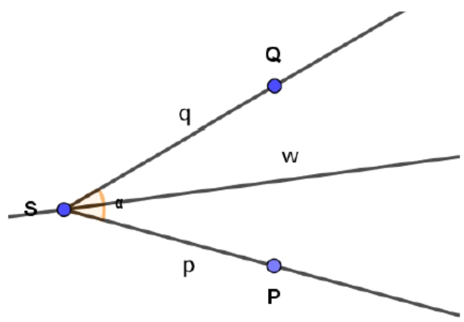
Lösung:



Kreis c	Kreis mit Mittelpunkt B und Radius 2
Kreis d	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 2
Punkt C	Schnittpunkt von d, c
Punkt D	Schnittpunkt von d, c
Gerade m_{AB}	Linie C, D

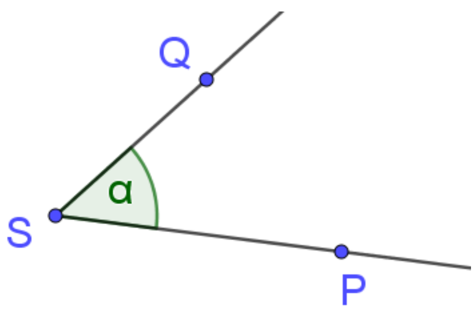
1.12 Winkelhalbierende

Diejenige Gerade w durch den Scheitel S eines Winkels $\measuredangle(p, q)$, die das zugehörige Winkelfeld halbiert, heißt die Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle(p, q)$.



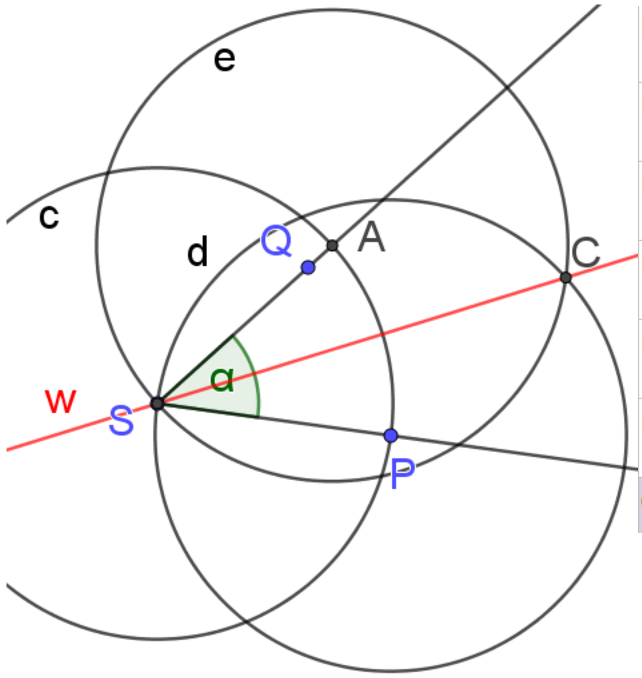
[11]

Übung: Gegeben ist der Winkel α = ∡PSQ. Konstruieren Sie die Winkelhalbierende w.



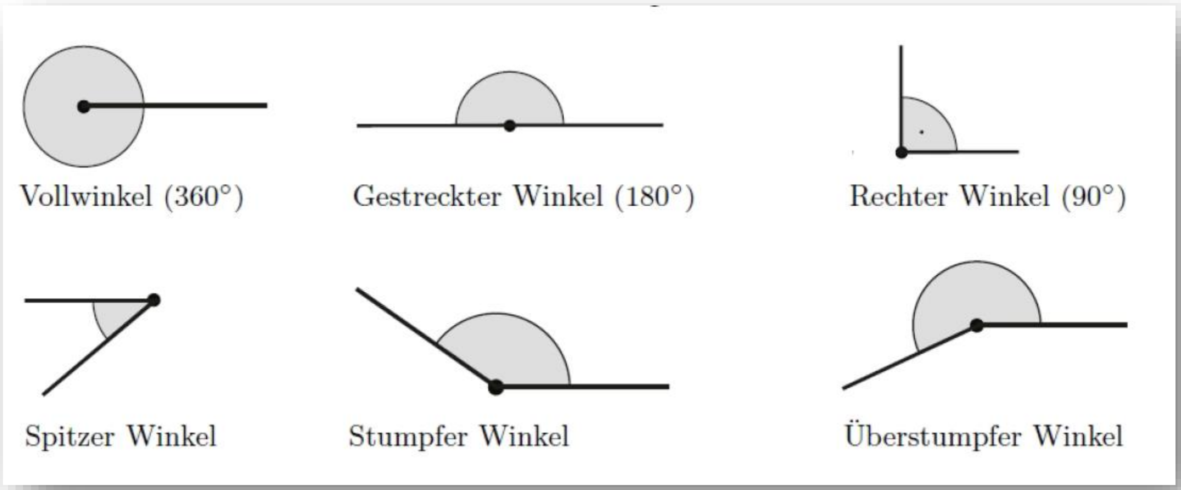
[11] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 12

Lösung:



Kreis c	Kreis durch P mit Mittelpunkt S
Punkt A	Schnittpunkt von c, g
Kreis d	Kreis durch S mit Mittelpunkt P
Kreis e	Kreis durch S mit Mittelpunkt A
Punkt B	Schnittpunkt von e, d
Punkt C	Schnittpunkt von e, d
Gerade w	Linie S, C

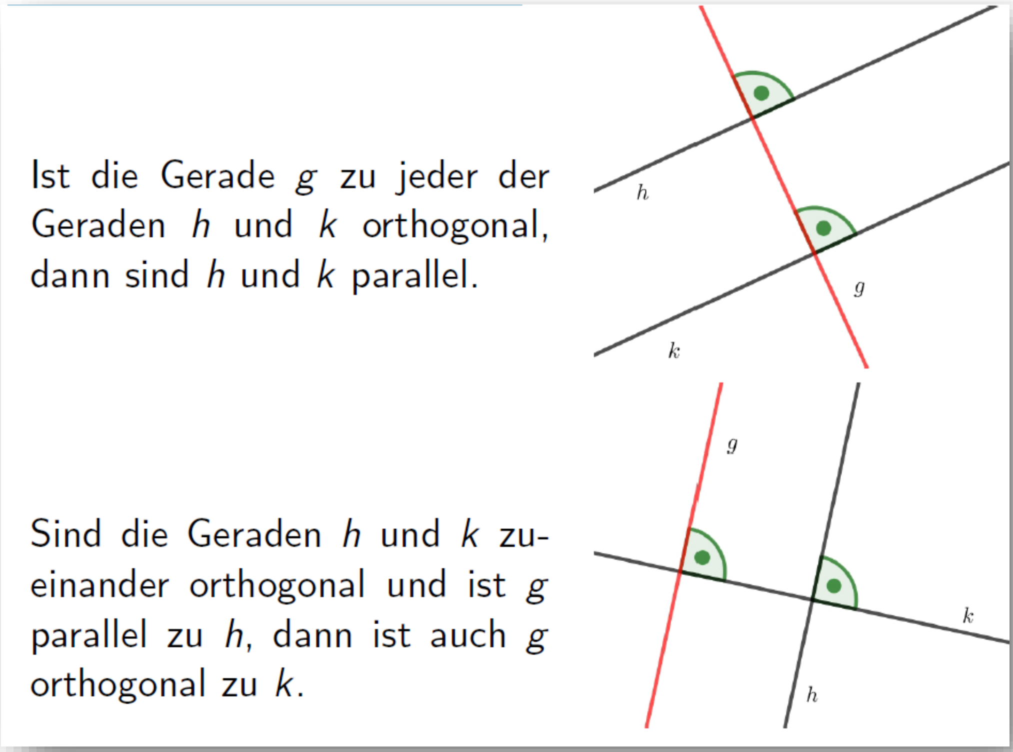
1.13 Weitere Winkelgrößen



[12]

[12] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 10

1.14 Parallelität und Orthogonalität



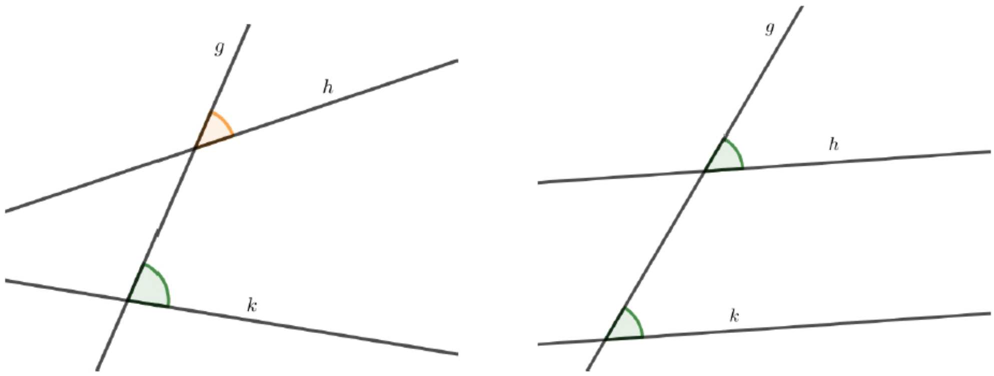
[13]

(Siehe auch: Parallelenaxiom, S. 9)

[13] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 13

1.15 Stufenwinkel

Schneidet eine Gerade g die Geraden h und k, so nennt man die auf den gleichen Seiten von g entstehenden Winkel Stufenwinkel.



Stufenwinkel — Stufenwinkel an parallelen Geraden

[14]

Übung:

Stufenwinkel sind genau dann gleich groß, wenn die Geraden h und k parallel sind. (Was heißt das?)

Lösung:

Stufenwinkel sind gleich groß. ⇒ Die Geraden h und k sind parallel.

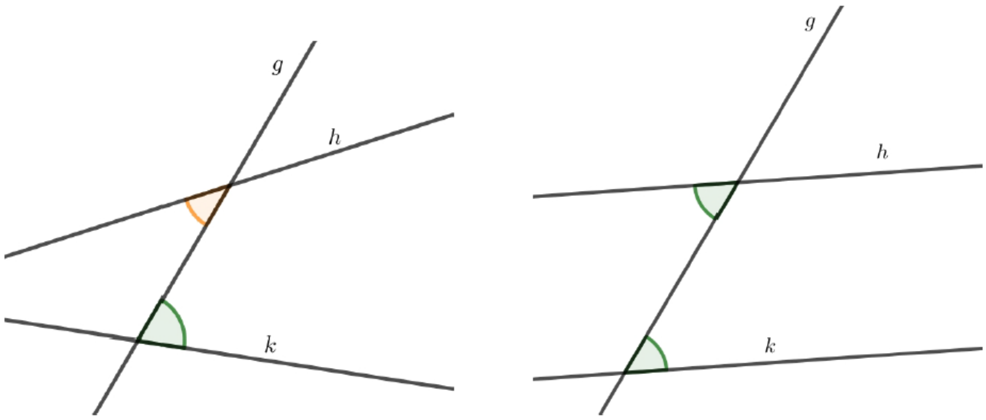
Die Geraden h und k sind parallel. ⇒ Stufenwinkel sind gleich groß.

Stufenwinkel sind nur bei parallelen Geraden gleich groß.

[14] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 14

1.16 Wechselwinkel

Ersetzt man einen der beiden Stufenwinkel durch seinen Scheitelwinkel, so entsteht ein Paar von Wechselwinkeln.



Wechselwinkel — Wechselwinkel an parallelen Geraden

[15]

Übung:

Wechselwinkel sind genau dann gleich groß, wenn die Geraden *h* und *k* parallel sind. (Was heißt das?)

Lösung:

Wechselwinkel sind gleich groß. ⇒ Die Geraden h und k sind parallel.

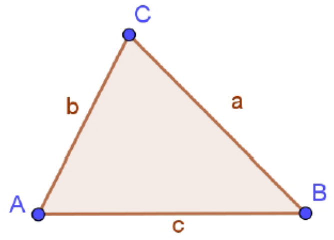
Die Geraden h und k sind parallel. ⇒ Wechselwinkel sind gleich groß.

Wechselwinkel sind nur bei parallelen Geraden gleich groß.

[15] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 15

1.17 Dreieck

Drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C und deren Verbindungsstrecken bilden das Dreieck $\triangle ABC$.



[16]

Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln:

ein stumpfer Winkel:	stumpfwinkliges Dreieck
ein rechter Winkel:	rechtwinkliges Dreieck
drei spitze Winkel:	spitzwinkliges Dreieck.

[17]

1.18 Innenwinkelsumme im Dreieck

Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt $180°$.

[18]

Übung:

Beweisen Sie, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt.

Hinweis: Zeichnen Sie zuerst eine passende Hilfslinie.

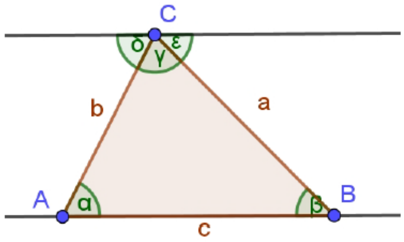
[16] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 19
[17] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 20
[18] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 19

Lösung:

Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt $180°$.

Beweis.

Zeichne eine Parallele zur Seite c durch die Ecke C. Verlängere c über A und B hinaus. Es entstehen die Wechselwinkel ε und δ.



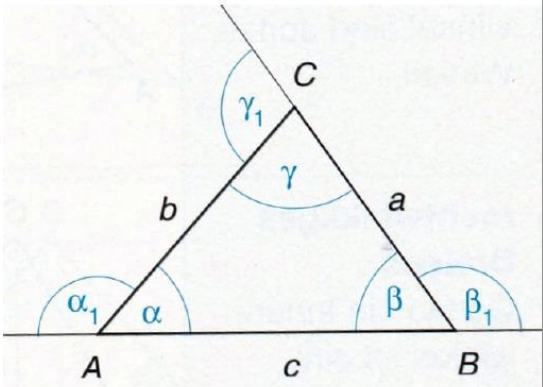
Da Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich sind, gilt bei C: $\delta + \gamma + \varepsilon = \alpha + \gamma + \beta = 180°$. □

[19]

1.19 Außenwinkelsatz

Außen- und Innenwinkel:

Die Nebenwinkel der Innenwinkel heißen Außenwinkel. Jeder Außenwinkel ist so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. (Warum?)



Also $\alpha_1 = \beta + \gamma, \beta_1 = \alpha + \gamma$ und $\gamma_1 = \alpha + \beta$.

[20]

Übung:

Beweisen Sie den Außenwinkelsatz.

---

[19] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 19

[20] Aus: Warmuth, E.: 7.2. Grundbegriffe und Relationen der ebenen Geometrie, Kongruenzsätze, 2019, S. 20

Lösung:

$\alpha_1 = 180° - \alpha = 180° - (180° - \beta - \gamma) = \beta + \gamma$

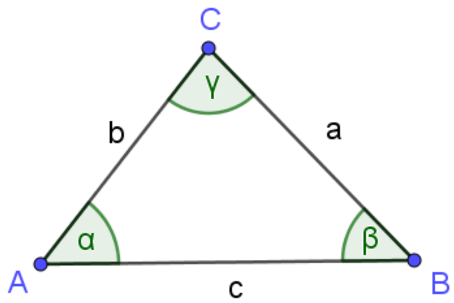
1.20 Übungen Grundkonstruktionen

Bitte nutzen Sie den Ordner Übungsaufgaben Geometrie (Schulniveau) .

2 Kongruenzsätze für Dreiecke

2.1 Bezeichnungsvereinbarung

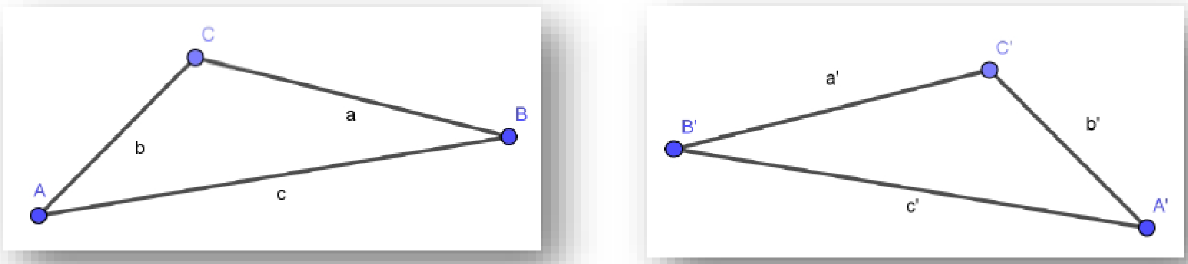
Grundsätzlich kann man die Bezeichnungen der Punkte, Seiten und Winkel im Dreieck frei wählen. Wenn jedoch nichts anderes angegeben ist, wird meist in der Schule (und hier auf den Folgeseiten im Skript) folgende Bezeichnungsweise verwendet:



2.2 Kongruenz

Kongruenz bedeutet Deckungsgleichheit.

- Zwei gleich lange Strecken nennt man kongruent.
- Zwei gleich große Winkel nennt man kongruent.
- Zwei Dreiecke heißen kongruent, wenn sie in allen drei Seiten(längen) und allen drei Winkel(maße)n entsprechend übereinstimmen.



[21]

---

[21] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 3

2.3 Kongruenzsätze und einfachste Sätze der Elementargeometrie

Satz 1 (Kongruenzsätze)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn bei ihnen (nur) folgende sich gegenseitig entsprechende Stücke kongruent, d.h. gleich groß, sind:

(1) *alle drei Seiten (sss) oder*

(2) *zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (sws) oder*

(3) *eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (wsw) oder*

(4) *zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (Ssw).*

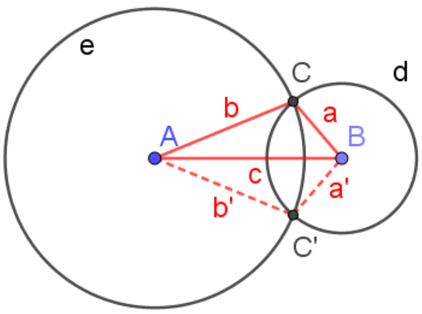
[22]

2.3.1 Übung (sss)

Übung: Konstruieren Sie ein Dreieck mit c = 5cm, a = 2cm und b = 4cm.

Warum ist das Dreieck *eindeutig* konstruierbar?

Es gibt zwei Möglichkeiten, das Dreieck zu konstruieren:



Die Dreiecke △ABC und △AC'B sind jedoch kongruent (sss). Daher spricht man von *eindeutig* konstruierbar.

[22] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 6

2.3.2 Übung (sws)

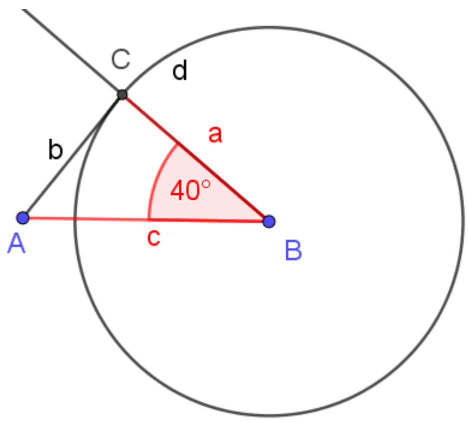
Übung:

Konstruieren Sie ein Dreieck mit c = 5cm, β = 40° und a = 4,3cm.

(Siehe Bezeichnungsvereinbarung S. 22)

Warum ist das Dreieck *eindeutig* konstruierbar?

Lösung:



Das Dreieck △ABC ist aufgrund des 2. Kongruenzsatzes (sws) eindeutig konstruierbar, d.h. jedes andere Dreieck, welches mit diesen Vorgaben konstruiert würde, wäre kongruent zu obigem Dreieck.

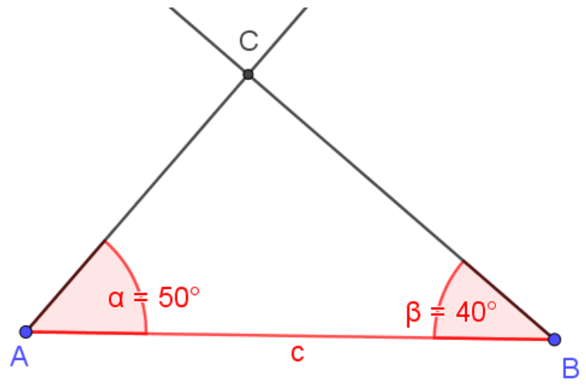
2.3.3 Übung (wsw)

Übung:

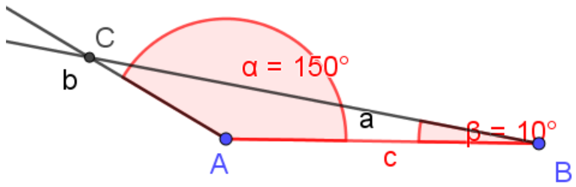
1. Konstruieren Sie ein Dreieck mit c = 5cm, β = 40° und α = 50°
2. Konstruieren Sie ein Dreieck mit c = 5cm, β = 10° und α = 150°
3. Konstruieren Sie ein Dreieck mit c = 5cm, β = 60° und α = 130°

(Siehe Bezeichnungsvereinbarung S. 22).

Lösung 1:



Lösung 2:



Lösung 3:

Ein solches Dreieck ist nicht konstruierbar, weil die Innenwinkelsumme 180° beträgt.

2.3.4 Übungen (Ssw)

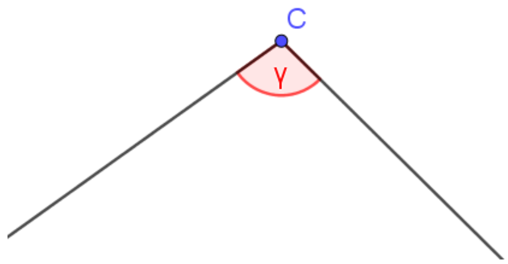
Übung 1:

Konstruieren Sie ein Dreieck mit c = 4cm, a = 3cm und γ = 100°.

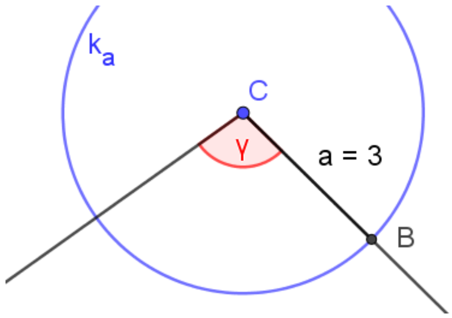
(Siehe Bezeichnungsvereinbarung S. 22).

Lösung:

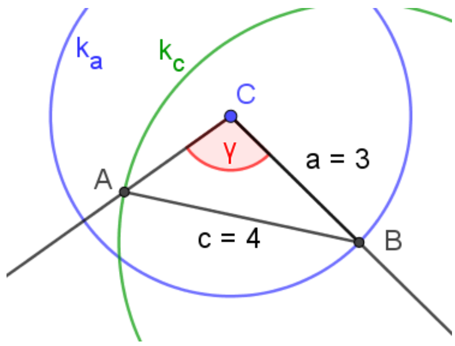
Man zeichne den Punkt C mit seinen beiden Schenkeln im Winkel von 100°:



Nun wird ein Kreis k_a mit Mittelpunkt C und Radius a = 3cm gezeichnet:



Man erhält den Schnittpunkt B. Dies ist der Mittelpunkt vom Kreis k_c der mit Radius c = 4cm gezeichnet wird:



Man erhält den Schnittpunkt A.

Das Dreieck △ABC ist eindeutig konstruiert worden.

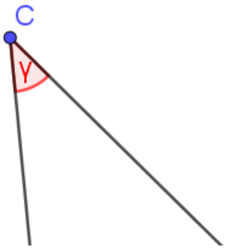
Übung 2:

Konstruieren Sie ein Dreieck mit c = 2cm, a = 3cm und γ = 40°.

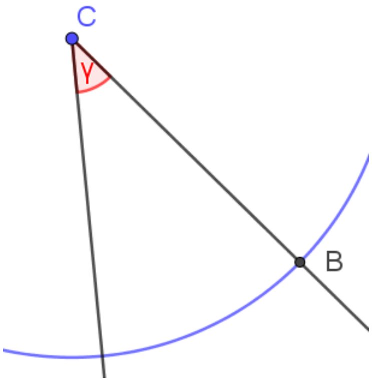
(Siehe Bezeichnungsvereinbarung S. 22).

Lösung:

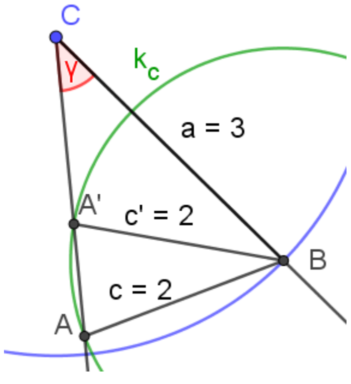
Man zeichne den Punkt C mit seinen beiden Schenkeln im Winkel von 40°:



Nun wird ein Kreis k_a mit Mittelpunkt C und Radius a = 3cm gezeichnet:



Man erhält den Schnittpunkt B. Dies ist der Mittelpunkt vom Kreis k_c der mit Radius c = 4cm gezeichnet wird:



Man erhält jedoch zwei Schnittpunkte: Schnittpunkt A und Schnittpunkt A'. Somit können zwei nicht kongruente Dreiecke △ABC und △A'BC konstruiert werden.

Die Konstruktion ist nicht eindeutig.

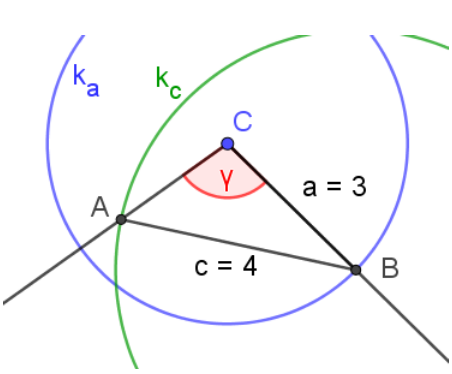
Übung:

Wann ist im Falle ssw hinsichtlich der Seitengrößen das Dreieck eindeutig konstruierbar?

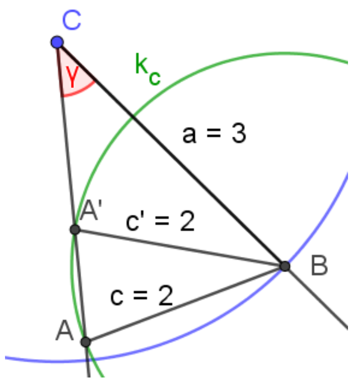
Lösung:

Der Winkel muss der größeren Seite gegenüber liegen. Daher schreibt man häufig auch Ssw. Bitte vergleichen Sie:

Eindeutig konstruierbar:



Nicht eindeutig konstruierbar:



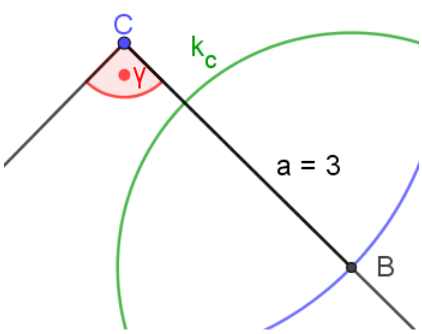
Übung:

Wann ist im Falle ssw hinsichtlich des Winkels das Dreieck eindeutig konstruierbar?

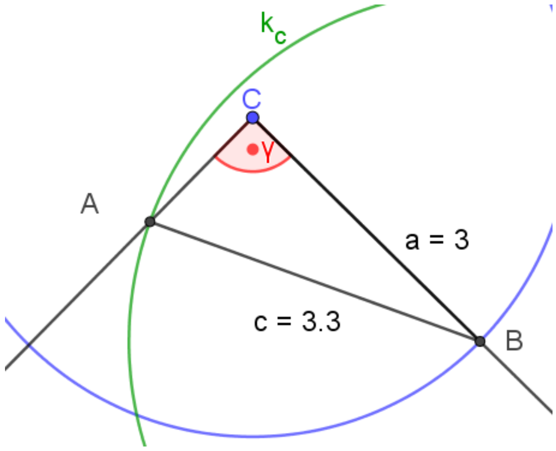
Lösung:

Der Winkel muss mindesten 90° betragen.

c ≤ a: Keine Dreieckskonstruktion möglich

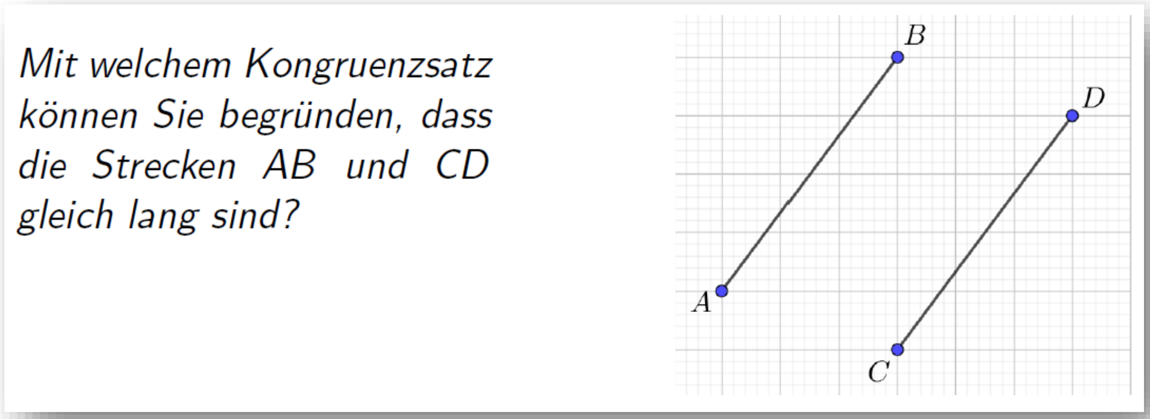


c > a: Eindeutige Dreieckskonstruktion möglich



2.4 Weitere Übungen

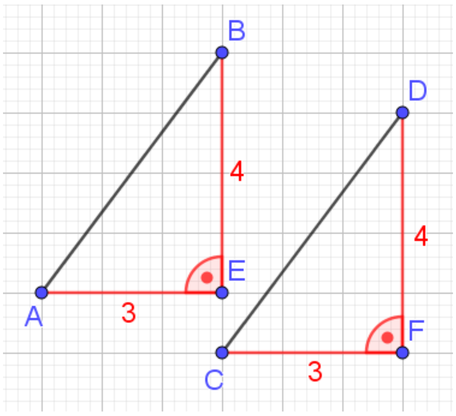
Übung 1:



[23]

Lösung1:

Man zeichne die Hilfspunkte E und F.



Es ist offensichtlich, dass gilt:

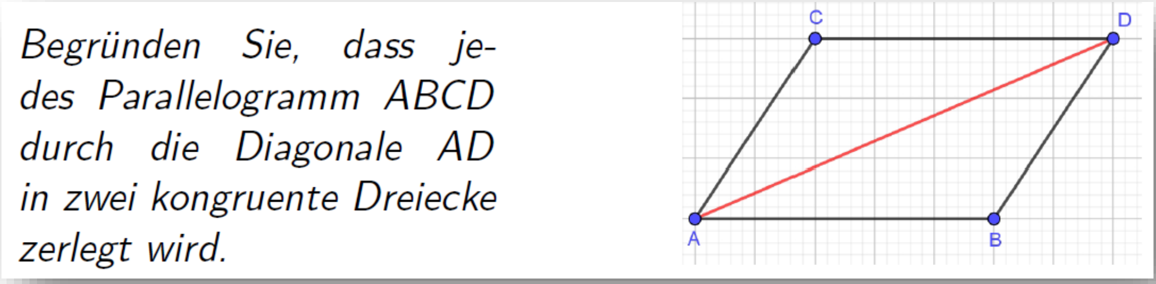
$|AE| = 3cm = |CF|$,
$|EB| = 4cm = |FD|$,

$\measuredangle BEA = 90° = \measuredangle DFC$.

Somit findet der 2. Kongruenzsatz (sws) Anwendung.

[23] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 7

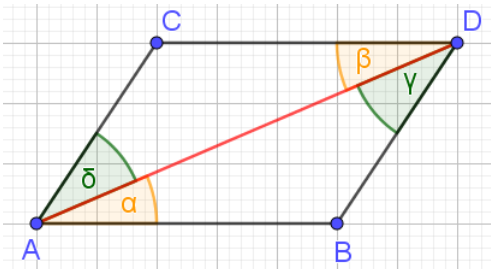
Übung 2:


Begründen Sie, dass jedes Parallelogramm ABCD durch die Diagonale AD in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird.

[24]

Lösung 2:

Man zeichne die Winkel α, β, γ und δ ein:

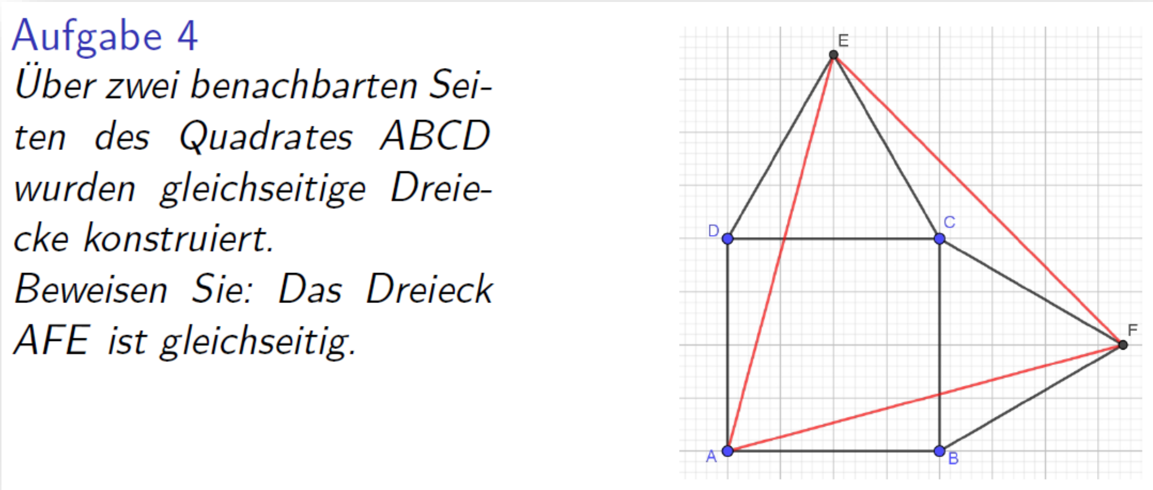


Die Winkel α und β sowie γ und δ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und somit paarweise gleich groß (siehe S. 18).

Die Dreiecke △ABD und △ADC besitzen zudem beide die Strecke AD. Aufgrund des 3. Kongruenzsatzes (wsw) sind sie somit kongruent.

[24] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 7

Übung 3:



[25]

Lösung 3:

Man zeichne Winkel ein.

In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß.
Da die Winkelsumme 180° beträgt, ist α = 60° groß.

In einem Quadrat sind die Innenwinkel 90° groß. Somit ergibt sich:

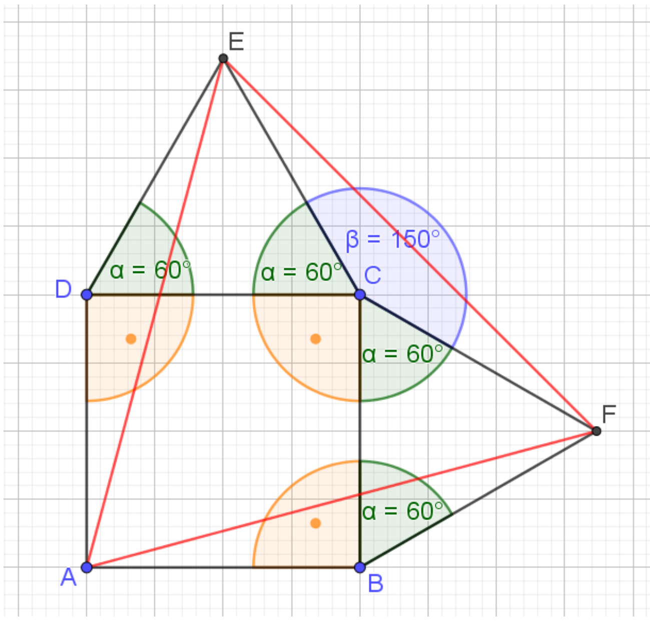
∡ADE = 90° + 60° = 150° = ∡FBA

Weiterhin gilt:

∡FCE = 360° - 90° - 2·60° = 150°

Nach Konstruktion gilt:

|AD|=|DE|=|EC|=|CF|=|FB|=|AB|



Nach dem 2. Kongruenzsatz (sws) gilt, dass die Dreiecke △AED, △ABF und △CFE kongruent sind.

Da das Dreieck △AFE aus den längsten Seiten dieser kongruenten Dreiecke besteht, ist es gleichseitig.

[25] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 8

3 Geometrische Örter (Ortslinien) und Grundkonstruktionen

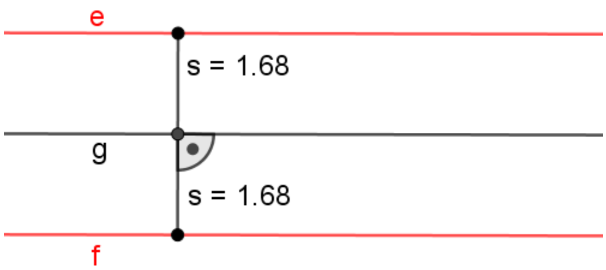
Unter dem geometrischen Ort versteht man eine Linie, deren sämtliche Punkte, **und nur diese**, eine bestimmte gegebene Eigenschaft haben. Man spricht deshalb auch von Ortslinie.

[26]

3.1 Beispiele (Parallelen und Kreis)

Beispiel 1:

Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Gerade g eine gegebene Entfernung s haben, besteht aus zwei Geraden e und f, parallel der gegebenen Gerade g in der gegebenen Entfernung s.[27]



Beispiel 2:

Die Ortslinie aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt M einen festen Abstand r haben, ist die Kreislinie um M mit dem Radius r.

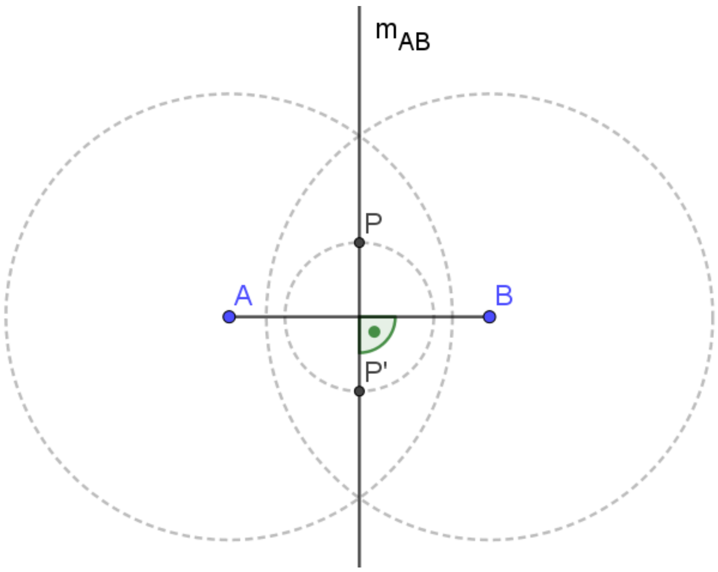
[26] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 10
[27] Siehe: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 10

3.2 Satz (Mittelsenkrechte)

Die Mittelsenkrechte einer Strecke AB ist die Menge (der geometrische Ort) aller Punkte der Ebene, die von A und B gleich weit entfernt sind. [28]

Übung: Fertigen Sie mit Zirkel und Lineal (oder GeoGebra) eine Konstruktionszeichnung an.

Lösung:



Für den Beweis des Satzes sind zwei Richtungen zu zeigen:

1. Wenn ein Punkt P auf der Mittelsenkrechten liegt, dann ist er gleich weit von A und B entfernt, kurz:

$$\text{Wenn } P \in m_{AB}, \text{ dann } |AP| = |BP|.$$

2. Wenn ein Punkt gleich weit von A und B entfernt ist, dann liegt er auf der Mittelsenkrechten, kurz:

$$\text{Wenn } |AP| = |BP| \text{ , dann } P \in m_{AB}.$$

[28] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 11

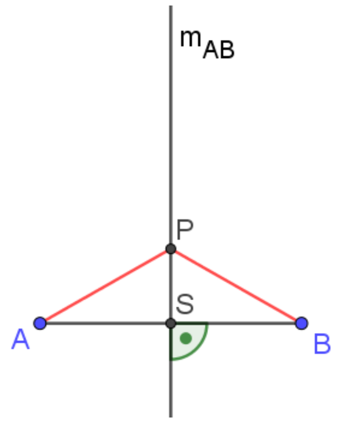
1. Wenn ein Punkt P auf der Mittelsenkrechten liegt, dann ist er gleich weit von A und B entfernt, kurz:

$$\text{Wenn } P \in m_{AB}, \text{ dann } |AP| = |BP|.$$

Beweis[29]:

Man betrachte die Dreiecke △ASP und △BSP:

Sei $P \in m_{AB}$ beliebig.
Nach sws gilt $\triangle ASP \cong \triangle BSP$.
Folglich $|AP| = |BP|$.

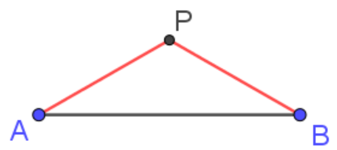


2. Wenn ein Punkt gleich weit von A und B entfernt ist, dann liegt er auf der Mittelsenkrechten, kurz:

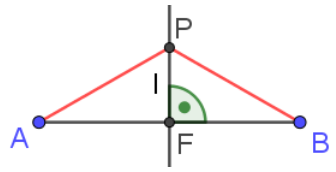
$$\text{Wenn } |AP| = |BP| \text{ , dann } P \in m_{AB}.$$

Beweis:

Man betrachte das Dreieck △ABP, wobei nach Voraussetzung gilt: |AP|=|PB|



Nun fällt man das Lot l von P auf AB und erhält den Lotfußpunkt F.



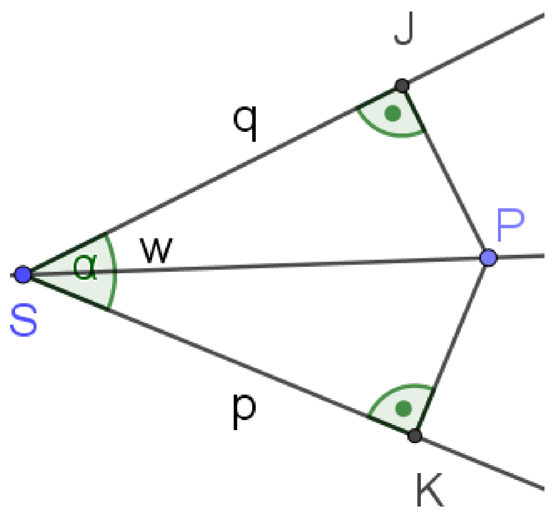
Da |AP|=|PB|, l=l und ∡PFA = ∡BFP sind nach dem 4. Kongruenzsatz (Ssw) die Dreiecke △AFP und △BFP kongruent. Also ist |AF|=|BF|, so dass das Lot l gleich der Mittelsenkrechten m_{AB} ist.

---

[29] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 11

3.3 Satz (Winkelhalbierende)

Die Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle(p, q)$ ist die Menge (der geometrische Ort) aller Punkte der Ebene, die von den beiden Schenkeln denselben Abstand haben. [30]



Übung:

Beweisen Sie diesen Satz:

a. Erläutern Sie, welche Eigenschaften die Punkte K und J besitzen und wofür dies nützlich ist.

b. Schreiben Sie auf, was genau zu beweisen ist (Tipp: Es gibt wieder die Hin-Richtung („⇒“) und die Rück-Richtung („⇐“).)

c. Beweisen Sie die beiden Richtungen.

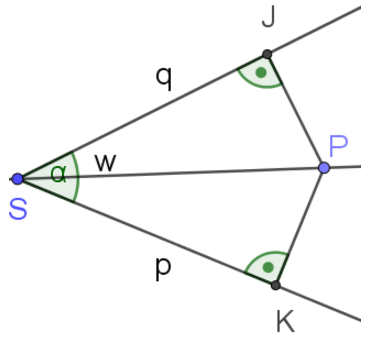
[30] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 13

Lösung:

Beweis.
Seien K bzw. J die Lotfußpunkte von P auf p bzw. q. Zu zeigen ist:

1. Wenn $P \in w$, dann $|PJ| = |PK|$.
2. Wenn $|PJ| = |PK|$, dann $P \in w$.

[31]



Zu 1.:

Idee: Wenn die Dreiecke $\triangle SPJ$ und $\triangle SPK$ kongruent sind, dann ist auch $|PJ| = |PK|$.

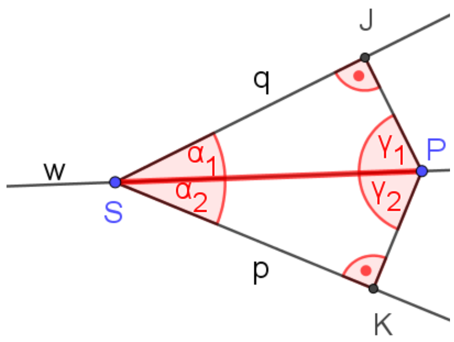
Es gilt: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ (Winkelhalbierende).

Weiterhin lassen sich γ_1 und γ_2 durch die Winkelsumme im Dreick berechnen:

$\gamma_1 = \gamma_2 = 180° - \alpha_1 - 90°$

Zudem besitzen beide Dreiecke die Seite SP.

Nach Kongruenzsatz (wsw) sind die Dreicke $\triangle SPJ$ und $\triangle SPK$ kongruent und somit $|PJ| = |PK|$.

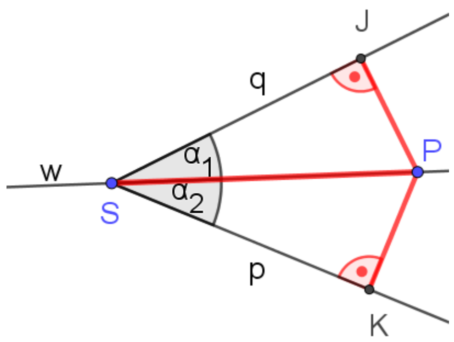


Zu 2.:

Idee: Wenn die Dreiecke $\triangle SPJ$ und $\triangle SPK$ kongruent sind, dann ist auch $\alpha_1 = \alpha_2$.

Es gilt: $|PJ| = |PK|$.

Zudem besitzen beide Dreiecke die Seite SP.



Außerdem ist bei beiden Dreiecken der der größeren Seite gegenüber liegende Winkel 90°.

Nach Kongruenzsatz (Ssw) sind die Dreiecke $\triangle SPJ$ und $\triangle SPK$ kongruent und somit $\alpha_1 = \alpha_2$. Somit liegt der Punkt P auf der Winkelhalbierenden w.

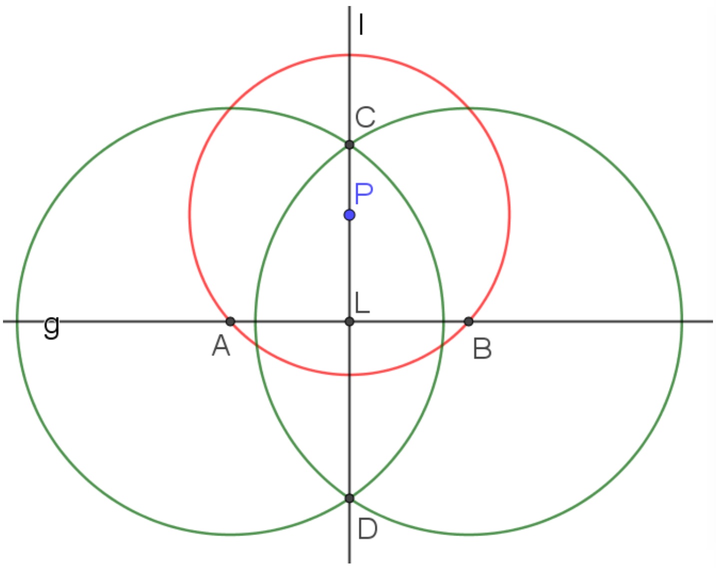
[31] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 13

3.4 Lot eines Punktes P auf eine Gerade g

Gegeben: Gerade g und Punkt $P \notin g$. Gesucht: Lot von P auf g. [32]

Übung: Konstruieren Sie das Lot von P auf g.

Lösung:



1. Kreis (rot) um P, der g in A und B schneidet.
2. Kreis (grün) um A mit Radius r_1 mit $r_1 > 0,5|AB|$. Kreis (grün) um B mit r_1. Beide Kreise schneiden sich in C und D.
3. Verbinde C mit D. Der Schnittpunkt von $g(C, D)$ mit AB ist der Lotfußpunkt L.

Übung:

Begründen Sie, dass damit das Lot konstruiert wird.

Was ist also zu zeigen?

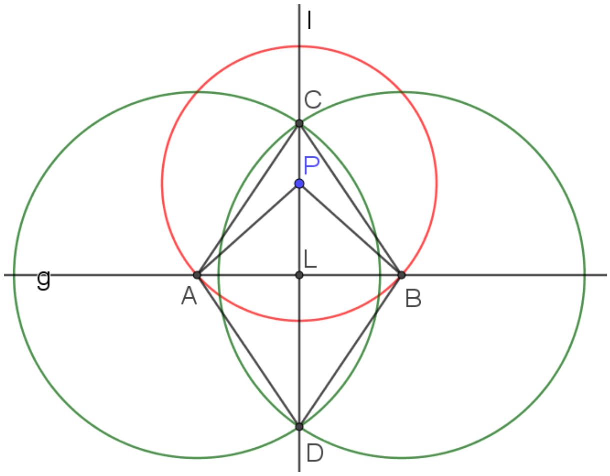
Lösung:

Zu zeigen ist:

1. P liegt auf der Geraden l (P ϵ l).
2. Der Winkel ∡BLC beträgt 90°.

[32] Aus: Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 14

Zu 1.:



C liegt (nach Konstruktion) gleich weit von A und B entfernt:

|CA|=|CB|

Dies gilt ebenso für D:

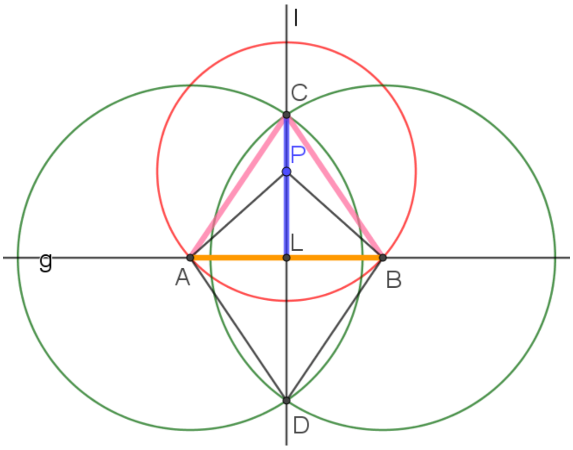
|DA|=|DB|

P liegt ebenfalls (nach Konstruktion) gleich weit von A und B entfernt:

|PA|=|PB|

Also liegt P auf der Geraden l, die alle Punkte, die gleich weit von A und B entfernt sind, enthält.

Zu 2.:



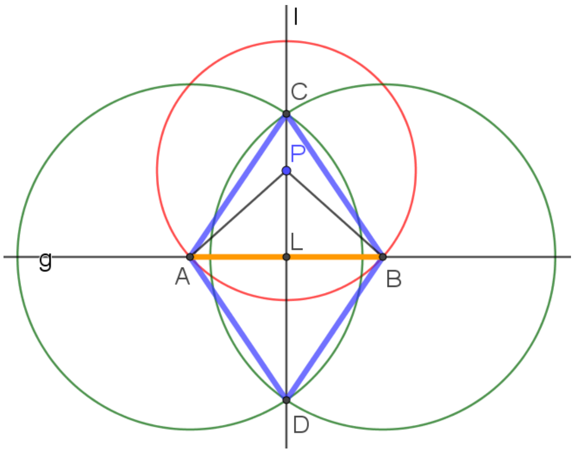
Zu zeigen: Die Dreiecke △ALC, △ALD, △BLC und △BLD sind kongruent:

|AL| = |LB|
(da L auf der Geraden l liegt, auf der alle Punkte gleich weit von A und B entfernt sind.)

|AC| = |BC|
(da C auf der Geraden l liegt, auf der alle Punkte gleich weit von A und Bentfernt sind.)

|LC| = |LC|

⇒ Die Dreiecke △ALC und △BLC sind kongruent. (analog gilt: △ALD ≅ △BLD)



Die Dreiecke △ABD und △ABC sind ebenfalls kongruent (sss). Sie bestehen jeweils aus den kongruenten Dreiecken △ALC und △BLC sowie △ALD und △BLD.

⇒ Die Dreiecke △ALC, △ALD, △BLC und △BLD sind kongruent.

Weiterhin gilt deswegen: Die Winkel mit dem Scheitelpunkt L sind kongruent:

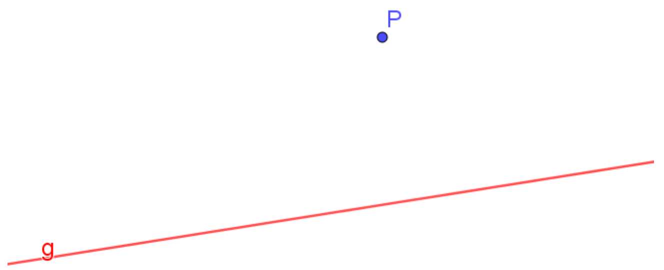
∡CLA ≅ ∡BLC ≅ ∡DLB ≅ ∡ALD

⇒ ∡BLC = 90° (rechter Winkel, siehe S. 12)

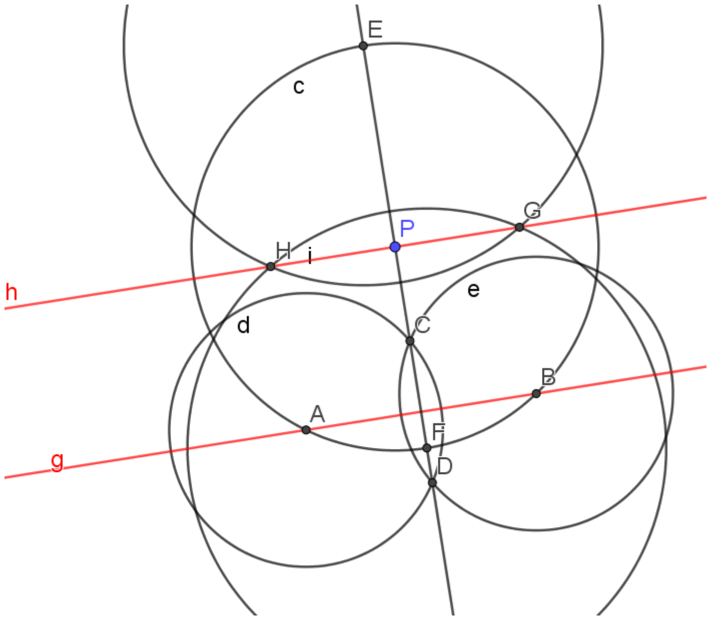
3.5 Mittelparallele

Übung 1:

Konstruieren Sie eine Parallele h zu einer Geraden g durch einen Punkt P, der nicht auf g liegt.
Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.[33]



Lösung 1:



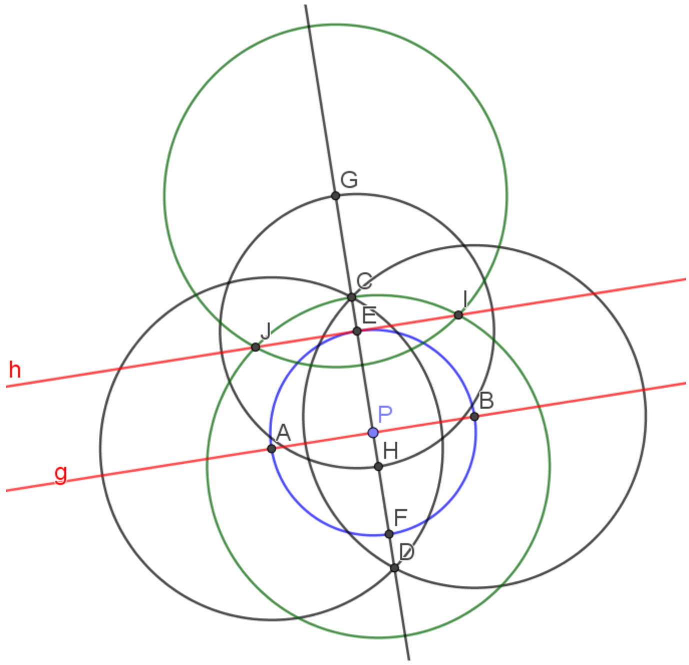
[33] Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 17

Übung 2:

Konstruieren Sie eine Parallele h zu einer Geraden g, die von g den Abstand 3 cm hat.
Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

[34]

Lösung:



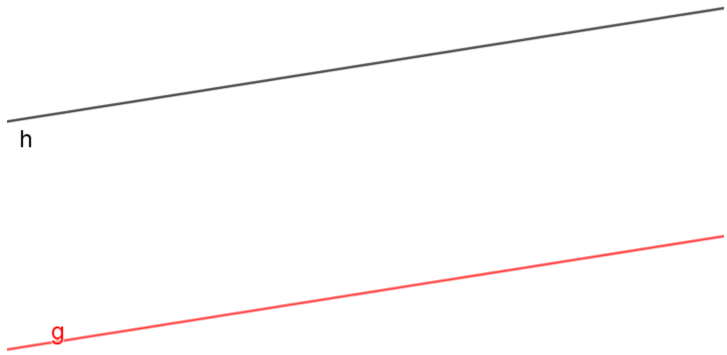
Hinweis: Sie können sich mit der GeoGebra-Datei „18 Konstruktion (Parallele 3cm)“ die Konstruktion schrittweise vorführen lassen.

[34] Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 17

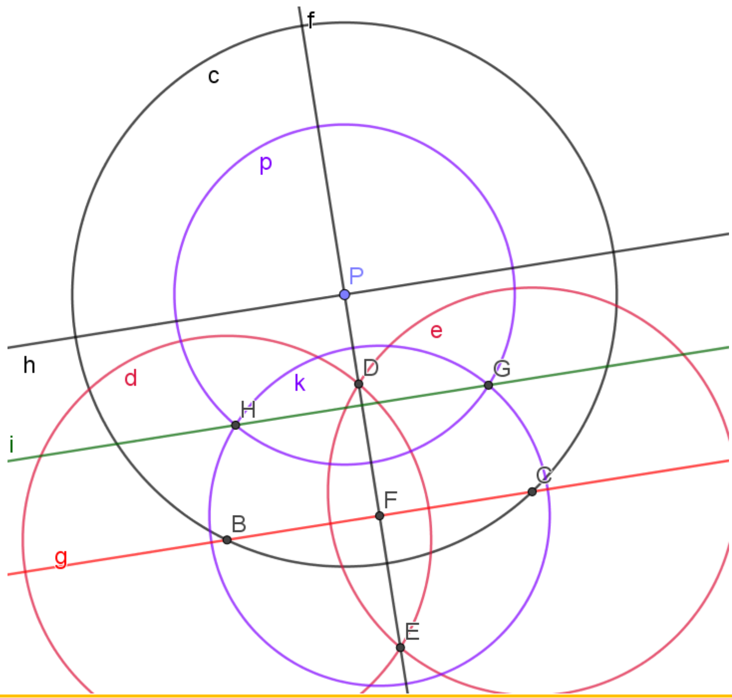
Übung 3:

Gegeben sind zwei parallele Geraden g und h. Konstruieren Sie eine Parallele zu g und h, die genau in der Mitte zwischen g und h verläuft.
Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Die konstruierte Parallele heißt **Mittelparallele**. [35]



Lösung[36]:



[35] Warmuth, E.: 9.2. Kongruenzsätze für Dreiecke und Grundkonstruktionen in der Ebene, 2019, S. 17
[36] Sie können sich mit der GeoGebra-Datei „19 Konstruktion (Mittelparallele)" die Konstruktion vorführen lassen.

4 Besondere Dreiecke

4.1 Gleichseitiges Dreieck

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt gleichseitiges Dreieck.

[37]

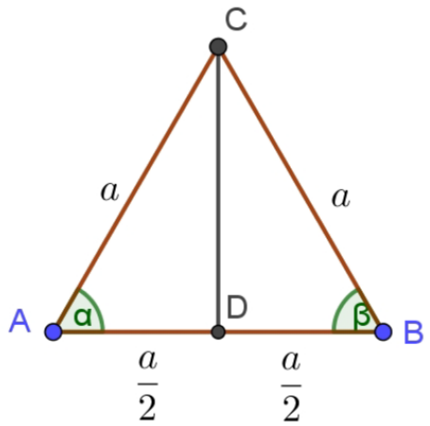
Übung:

Beweisen Sie folgenden Satz:

In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß.

Lösung:

1. Sei D der Mittelpunkt von AB.
2. Dann sind nach Kongruenzsatz sss die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle BDC$ kongruent. Also gilt $\alpha = \beta$.
3. Analog verfährt man mit der Seitenmitte von BC und erhält $\beta = \gamma$, insgesamt also $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.



[37] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 3

4.2 Gleichschenkliges Dreieck

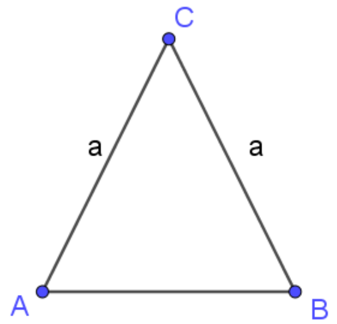
Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt gleichschenkliges Dreieck. Die beiden gleich langen Seiten heißen Schenkel, die dritte Seite heißt Basis. Die an der Basis anliegenden Winkel heißen Basiswinkel. [38]

Übung:

Beweisen Sie folgenden Satz:

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.

(Dreieck ist gleichschenklig ⇒ Die Basiswinkel sind gleich groß.)

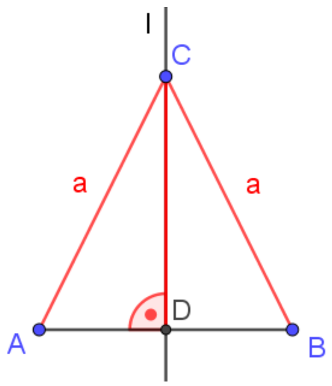


Lösung:

Man fälle das Lot l von C auf AB.

Nach Kongruenzsatz Ssw sind die Dreiecke △ADC und △BDC kongruent.

Somit sind die Winkel ∡DAC und ∡CBD kongruent.



[38] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 4

Übung:

Beweisen Sie die Umkehrung des obigen Satzes:

1. Wie lautet die Umkehrung?
2. Beweisen Sie die Umkehrung.

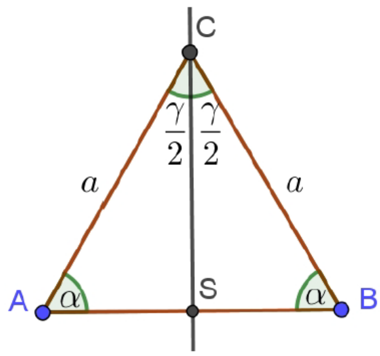
Lösung:

Wenn im Dreieck $\triangle ABC$ einer Dreiecksseite d zwei gleich große Winkel anliegen, dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig und hat d als Basis. [39]

(Die Basiswinkel sind gleich groß. ⇒ Dreieck ist gleichschenklig.)

Beweis.

1. OBdA sei $AB = d$. Die Winkelhalbierende von γ schneide AB in S.
2. In den Dreiecken $\triangle ASC$ und $\triangle CSB$ sind alle Winkel gleich.
3. Nach Kongruenzsatz wsw gilt $\triangle ASC \cong \triangle CSB$.
3. Also gilt $a = b$ und das Dreieck ist gleichschenklig mit der Basis AB.



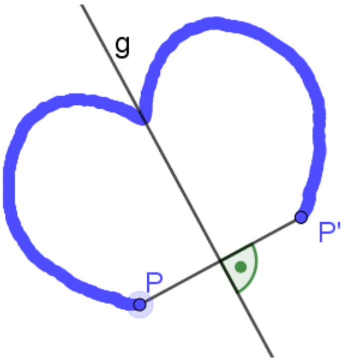
[39] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 5

4.3 Achsensymmetrie

Eine Figur ist achsensymmetrisch, falls es eine Gerade g gibt, so dass es zu jedem Punkt P der Figur einen weiteren (eventuell mit P identischen) Punkt P' der Figur gibt, so dass die Verbindungsstrecke PP' von dieser Geraden rechtwinklig halbiert wird.

Eine ebene Figur F heißt achsen- oder axialsymmetrisch, wenn sich in ihrer Ebene eine Gerade g angeben lässt, so dass F durch Spiegelung an g in sich selbst übergeführt wird.

Die Gerade g wird dann Symmetrieachse genannt.[40]



4.4 Gleichschenkliges Dreieck (Symmetrieachse)

Übung:

Beweisen Sie:

Ein gleichschenkliges Dreieck besitzt eine Symmetrieachse; diese ist die Höhe von der Spitze auf die Basis, die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze, die Seitenhalbierende der Basis und die Mittelsenkrechte der Basis.[41]

1. Welche vier Sätze sind zu zeigen?
2. Beweisen Sie die Sätze.

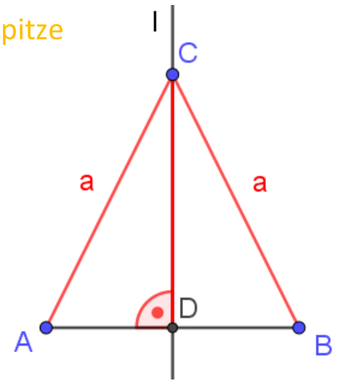
[40] Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Achsensymmetrie

[41] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 6

Lösung:

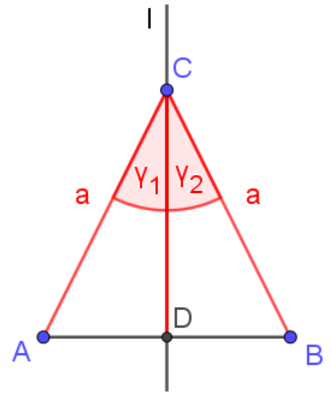
1. Zu zeigen: In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Höhe von der Spitze auf die Basis eine Symmetrieachse.

   Beweis:
   Man fälle das Lot von C auf AB. Die Höhe ist die Strecke CD.
   Nach Kongruenzsatz Ssw sind die Dreiecke △ADC und △BDC kongruent. Somit ist die Höhe eine Symmetrieachse.



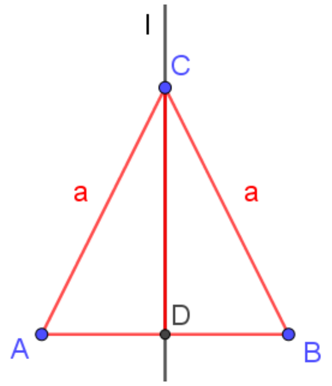
2. Zu zeigen: In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze eine Symmetrieachse.

   Beweis:
   Nach Kongruenzsatz sws sind die Dreiecke △ADC und △BDC kongruent. Somit ist die Winkelhalbierende eine Symmetrieachse.



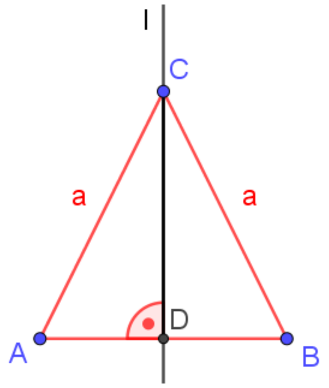
3. Zu zeigen: In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Basis eine Symmetrieachse.

   Beweis:
   Nach Kongruenzsatz sss sind die Dreiecke △ADC und △BDC kongruent. Somit ist die Seitenhalbierende der Basis eine Symmetrieachse.



4. Zu zeigen: In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Mittelsenkrechte der Basis eine Symmetrieachse.

   Beweis:
   Nach Kongruenzsatz Ssw sind die Dreiecke △ADC und △BDC kongruent. Somit ist die Mittelsenkrechte der Basis eine Symmetrieachse.



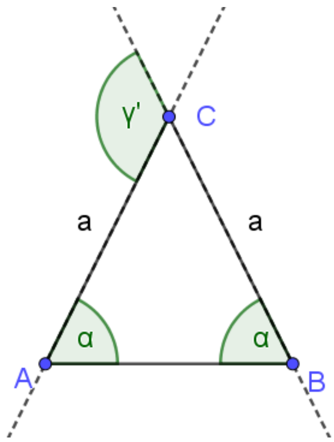
4.5 Gleichschenkliges Dreieck (Außenwinkel)

Übung:

Beweisen Sie:

> *Im gleichschenkligen Dreieck ist der Außenwinkel an der Spitze doppelt so groß wie jeder der beiden Basiswinkel.* [42]

(Siehe Außenwinkel, S. 20)



Lösung:

Zu zeigen: $\gamma' = 2 \cdot \alpha$

Beweis:

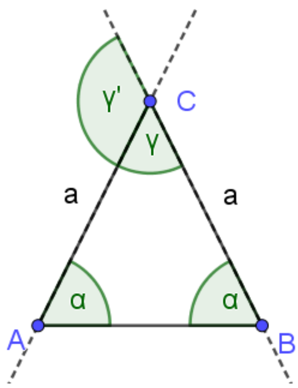
Es gilt:

$\gamma' + \gamma = 180°$

$2 \cdot \alpha + \gamma = 180°$

$\Rightarrow \gamma' + \gamma = 2 \cdot \alpha + \gamma$

$\Rightarrow \gamma' = 2 \cdot \alpha$



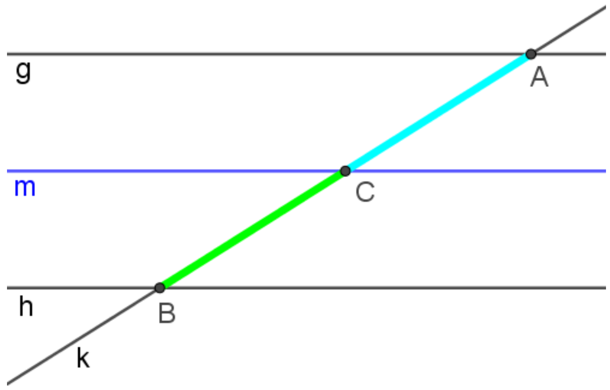
[42] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 6

4.6 Mittelparallele (schneidende Gerade)

Übung:

Beweisen Sie folgenden Satz:

Die Mittelparallele schneidet aus jeder schneidenden Geraden gleichlange Stücke heraus. [43]

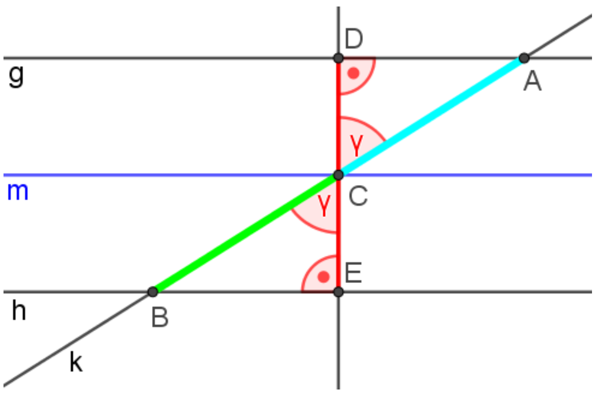


Zu zeigen ist also: |AC| = |BC|

Lösung:

Beweis.

1. Hilfslinie: Senkrechte zu m durch C erzeugt Schnittpunkte D und E.
2. Dreiecke $\triangle BEC \cong \triangle CAD$ nach Kongruenzsatz wsw. Also ist $|AC| = |BC|$.



[43] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 7

4.7 Das Seitenmittendreieck

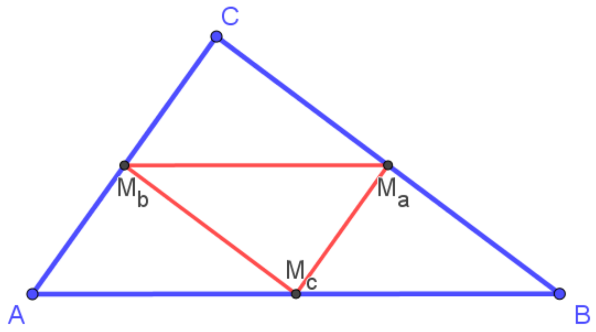
In einem Dreieck $\triangle ABC$ werden die Seitenmitten eingezeichnet und durch Strecken verbunden. Es ensteht das Seitenmittendreieck $\triangle M_c M_a M_b$.

[44]

Übung:

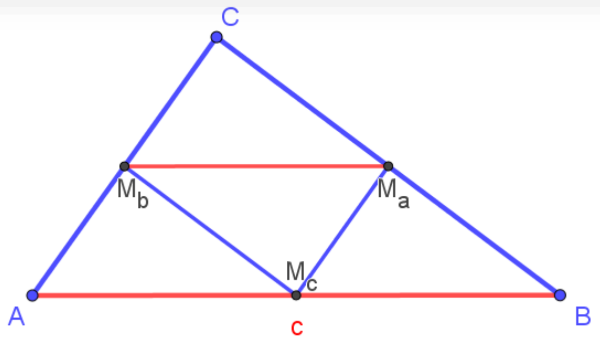
Zeichnen Sie das Dreieck △ABC und das dazugehörige Seitenmittendreieck.

Lösung:



Beweisen Sie[45]:

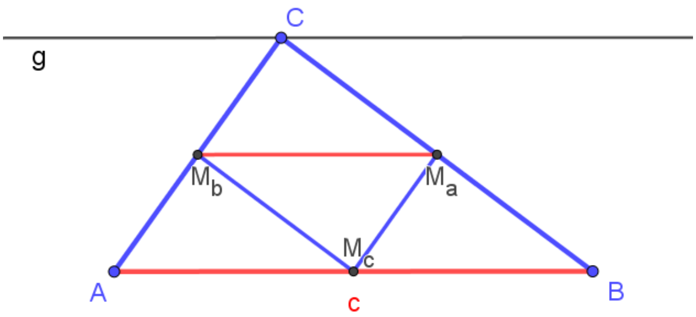
Im Seitenmittendreieck zu $\triangle ABC$ ist die Strecke $M_a M_b$ parallel zur Seite c des Ausgangsdreiecks und halb so lang wie diese.



[44] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 8
[45] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 9

Lösung:

Man zeichne eine Parallele g zu M_aM_b durch C:

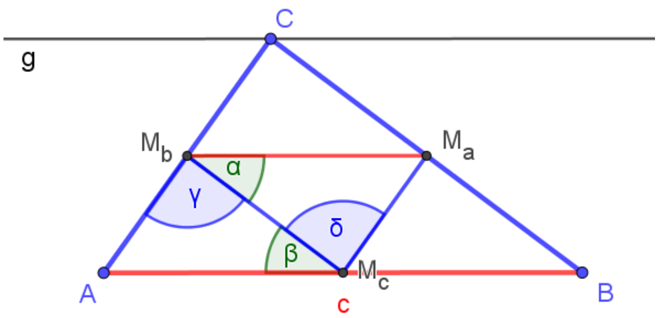


Weil $|AM_b| = |CM_b|$ und $|BM_a| = |CM_a|$, ist die Gerade M_aM_b die Mittelparallele von g und AB (sie schneidet nämlich gleichlange Stücke aus AC und BC heraus, siehe S. 48).

Somit sind M_aM_b und c parallel.

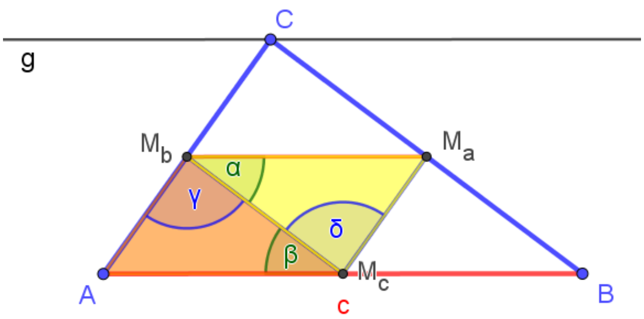
Analog zeigt man, dass M_aM_c und AC parallel sind.

Man zeichne Winkel ein:



Weil $M_aM_b \parallel c$ und $M_aM_c \parallel AC$, gilt: $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$
(Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)

Somit sind die Dreiecke $\triangle AM_cM_b$ und das Seitenmittendreieck $\triangle M_aM_bM_c$ nach Kongruenzsatz wsw kongruent:



$\Rightarrow |AM_c| = |M_aM_b| \Rightarrow c = 2 \cdot |AM_c| = 2 \cdot |M_aM_b|$

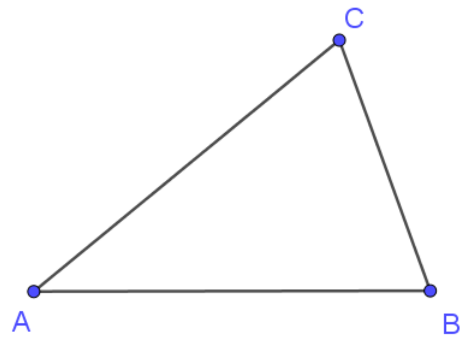
5 Transversalen im Dreieck

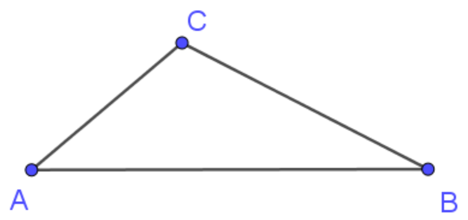
5.1 Mittelsenkrechten

Die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks heißen Mittelsenkrechten des Dreiecks. [46]

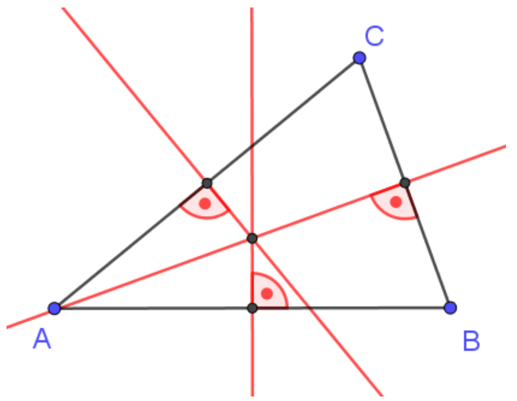
Übung:

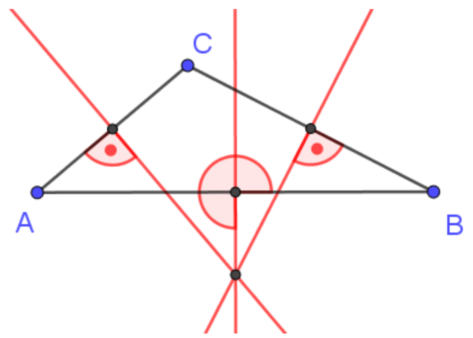
Zeichnen Sie die Mittelsenkrechten in die beiden Dreiecke ein:





Lösung:





[46] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 12

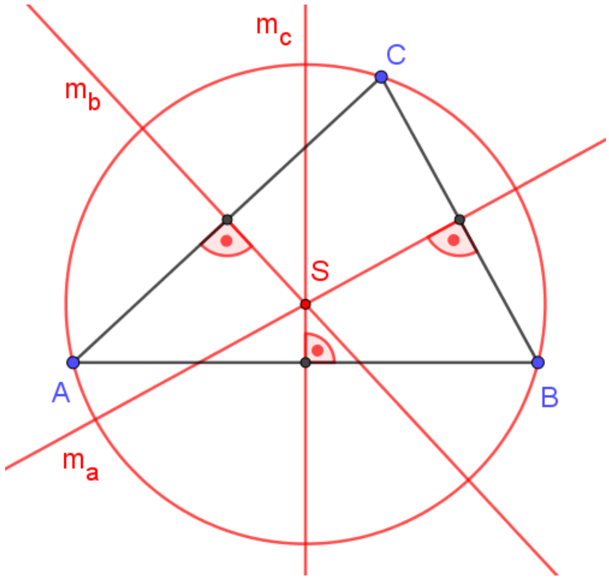
5.1.1 Satz: Mittelsenkrechten (Schnittpunkt ist Umkreis)

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt S. Dies ist der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$.[47]

Übung:

Beweisen Sie obigen Satz:

1. Was genau ist zu zeigen?
2. Zeichnen Sie Hilfslinien ein.
3. Führen Sie den Beweis durch.



[47] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 17

Lösung:

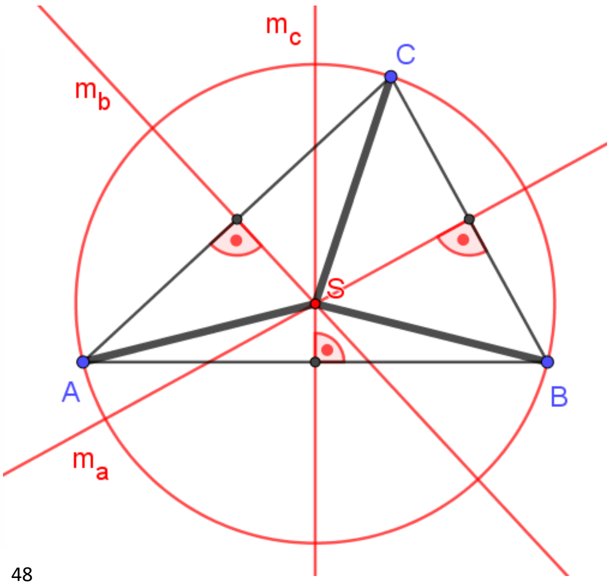
Zu zeigen ist:

a) Der Schnittpunkt von m_a und m_b ist gleich dem Schnittpunkt von m_a und m_c und dieser ist gleich dem Schnittpunkt von m_b und m_c .

b) Der gemeinsame Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Umkreises vom Dreieck $\triangle ABC$.

Man zeichne Hilfslinien:

1. Sei S der Schnittpunkt von m_a und m_b. Dann gilt $|BS| = |CS|$ und $|AS| = |CS|$.
2. Aus 1. folgt $|AS| = |BS|$. Demzufolge liegt S auf m_c.
3. Folglich schneiden sich alle drei Mittelsenkrechten in S. S ist gleich weit von allen drei Eckpunkten entfernt. Also ist S der Mittelpunkt des Umkreises.



[48]

[48] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 17

5.2 Höhen

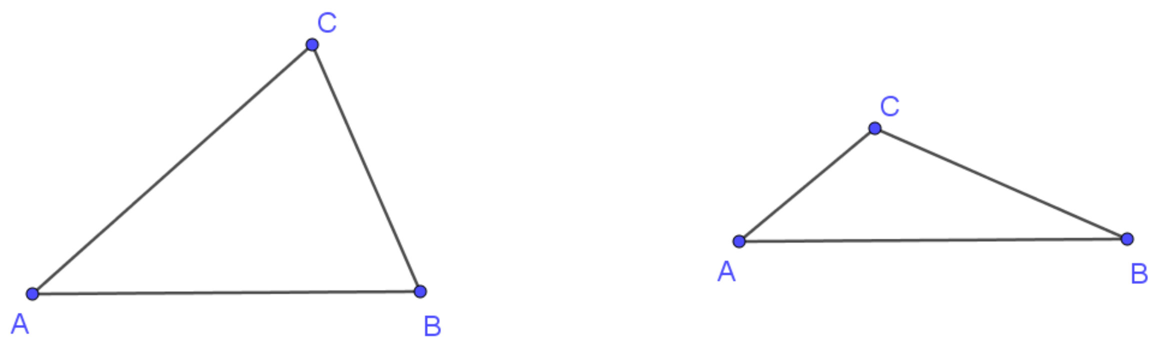
> Die Höhen des Dreiecks sind die Lote von den Eckpunkten zu den gegenüberliegenden Seiten.

[49]

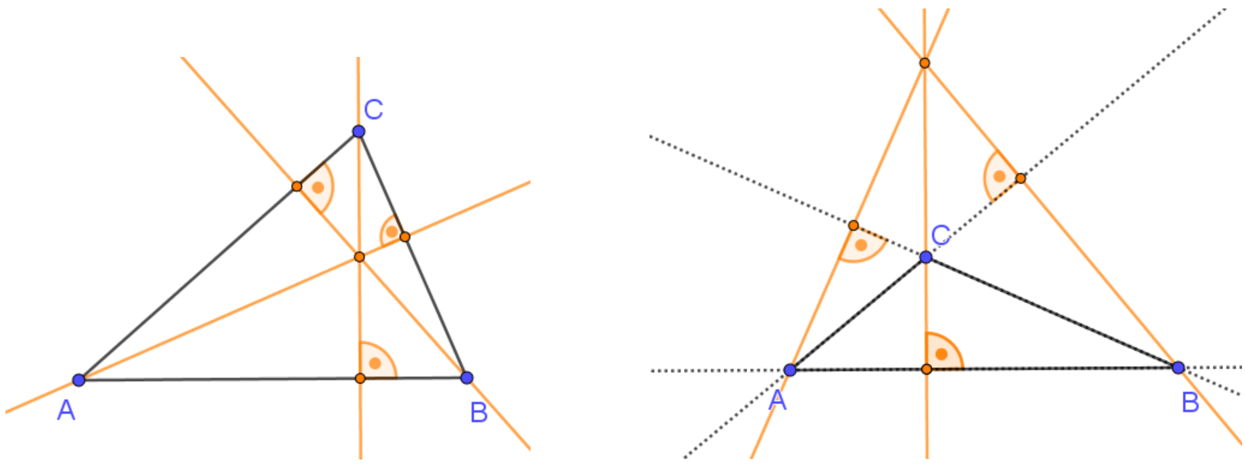
Hinweis: Die Höhen werden hier als *Geraden* aufgefasst (siehe auch Lot(-gerade), S. 12).
Bei der Flächenformel des Dreiecks („Grundseite mal Höhe durch Zwei") wird die Höhe jedoch als *Strecke* zwischen dem Eckpunkt und seinem Lotfußpunkt angesehen.

Übung:

Zeichnen Sie die Höhen in die beiden Dreiecke ein:



Lösung:



[49] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 12

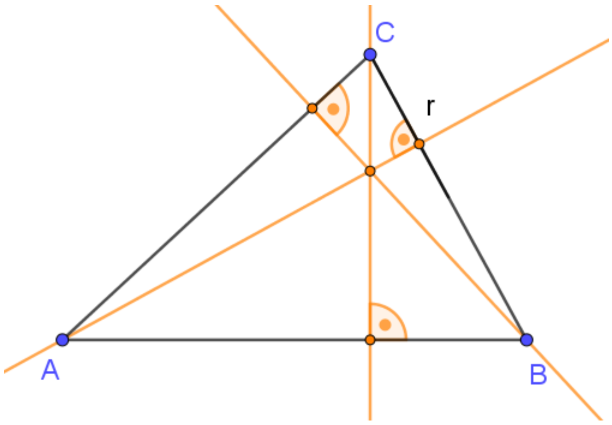
5.2.1 Satz: Höhen (Schnittpunkt)

Die Höhen eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt. [50]

Übung:

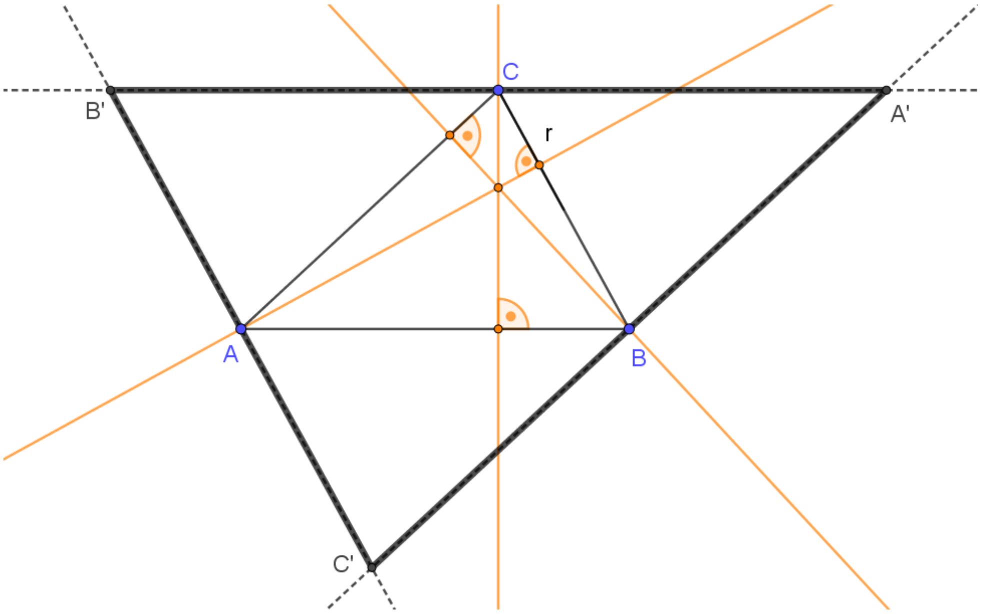
Beweisen Sie obigen Satz.

Tipp: Zeichnen Sie Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die gegenüberliegenden Punkte.



[50] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 18

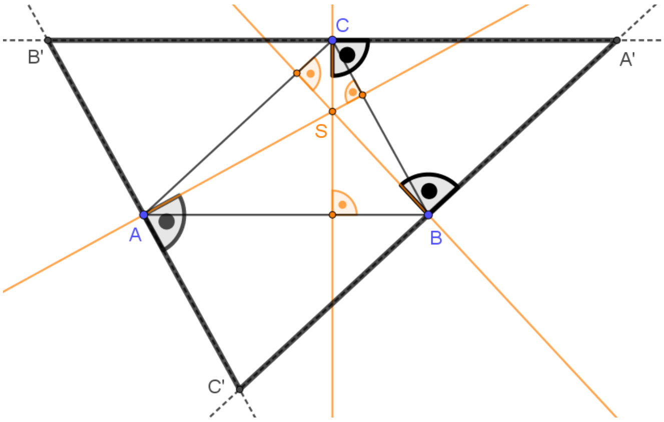
Lösung:



Das Dreieck △ABC ist das Seitenmittendreieck vom Dreieck △A’B’C‘.

Beweis:

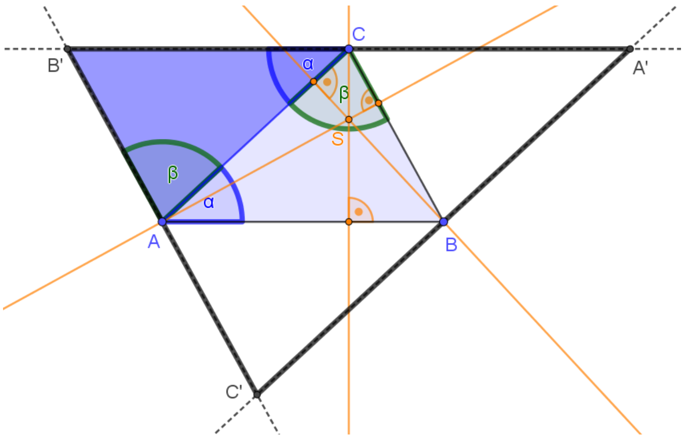
Die Winkel ∡C’AS, ∡B’CS und ∡A’BS sind nach Konstruktion rechte Winkel (siehe Parallelität und Orthogonalität, S. 16).



Die Dreiecke △ABC und △ACB‘ sind nach wsw kongruent (analog alle anderen).

Somit ist |B’C| = |CA‘|, |B’A| = |AC‘| und |C’B| = |BA‘|.

A, B und C sind also die Mittelpunkte der äußeren Dreiecksseiten und das Dreieck △ABC das Seitenmittendreieck von △A’B’C‘.



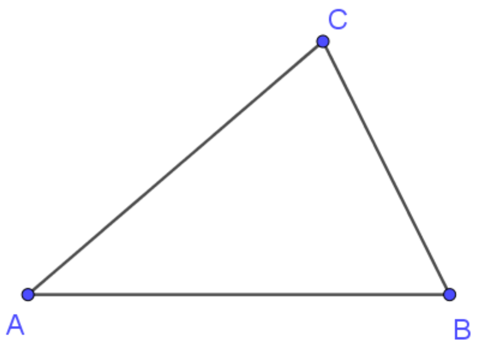
Die Höhen des Mittendreiecks sind die Mittelsenkrechten vom Dreieck △A’B’C‘. Dass sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden, wurde bereits bewiesen (siehe S. 52).

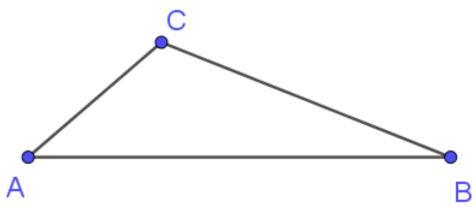
5.3 Seitenhalbierenden

Die Verbindungsgeraden von einer Ecke zur Mitte der gegenüberliegenden Seite heißen Seitenhalbierenden.[51]

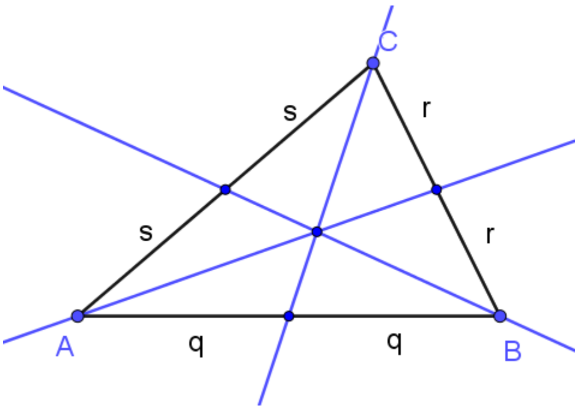
Übung:

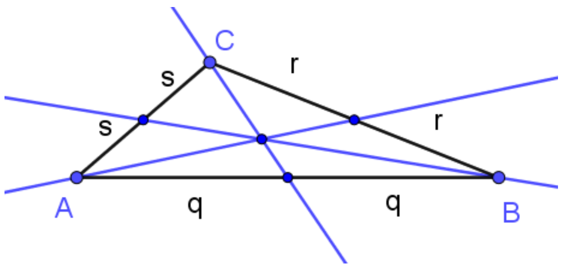
Zeichnen Sie die Seitenhalbierenden in die beiden Dreiecke ein:





Lösung:





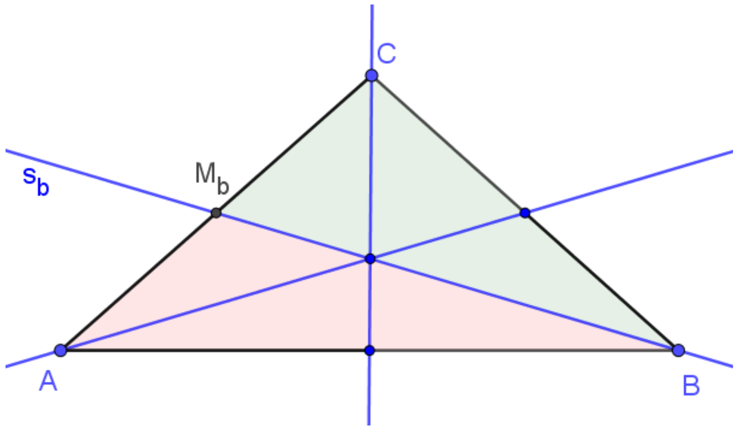
[51] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 12

5.3.1 Satz: Seitenhalbierende (flächengleiche Dreiecke)

Jede Seitenhalbierende zerlegt ein Dreieck $\triangle ABC$ in zwei flächengleiche Teildreiecke. [52]

Übung:

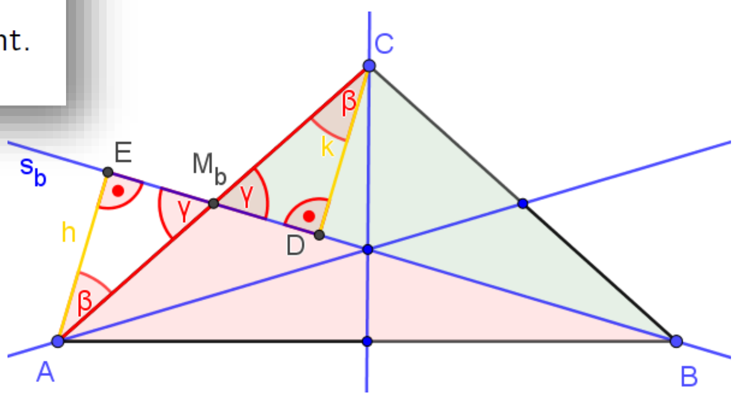
Beweisen Sie obigen Satz.



Lösung:

1. Fälle das Lot von C bzw. A auf die Seitenhalbierende s_b. Die Lotfußpunkte seien D und E.
2. Nach wsw sind die Dreiecke $\triangle DM_bC$ und $\triangle EM_bA$ kongruent. Also gilt $h \cong k$.

Wegen gleicher Grundseite M_bB und gleicher Höhe ($h \cong k$) sind die Dreiecke $\triangle ABM_b$ und $\triangle M_bBC$ flächengleich.



[52] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 19

5.3.2 Satz: Seitenhalbierenden (Schnittpunkt ist Schwerpunkt)

Schwerpunkt eines Dreiecks

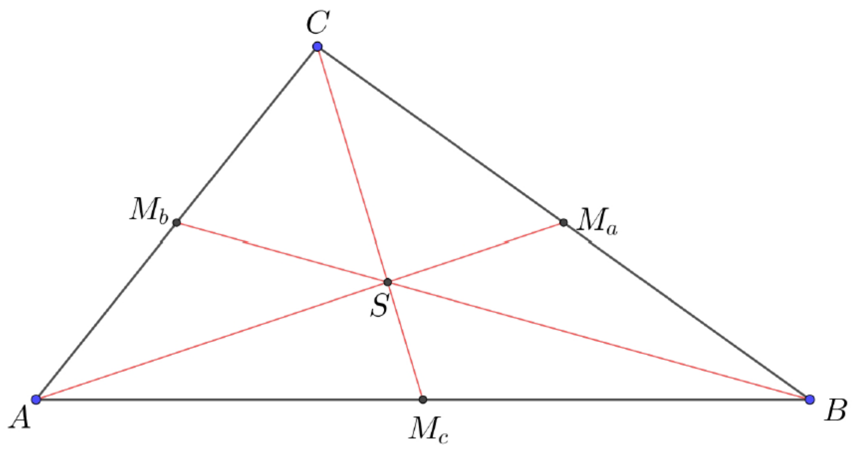
Frage: Wir stellen uns das Dreieck als homogene starre Fläche vor. Wo muss man das Dreieck unterstützen, damit es im Gleichgewicht bleibt?

- Antwort 1: Wenn man zum Unterstützen ein Lineal nimmt, dann entlang einer beliebigen Seitenhalbierenden.
- Antwort 2: Wenn man zum Unterstützen eine Zirkelspitze nimmt, dann im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Folgerung: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

[53]

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt S. Dieser Punkt S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (von den Ecken aus gemessen).



z.B. $|AS| : |SM_a| = 2 : 1$

[53] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 20

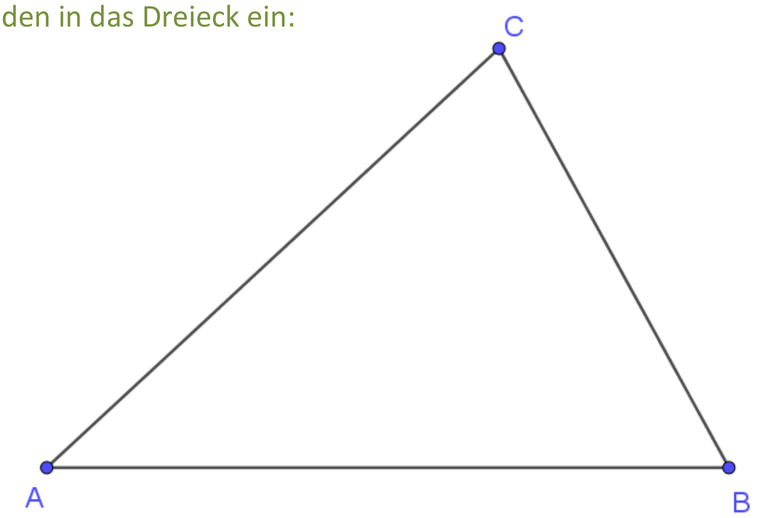
5.4 Winkelhalbierenden

Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks heißen Winkelhalbierenden des Dreiecks.

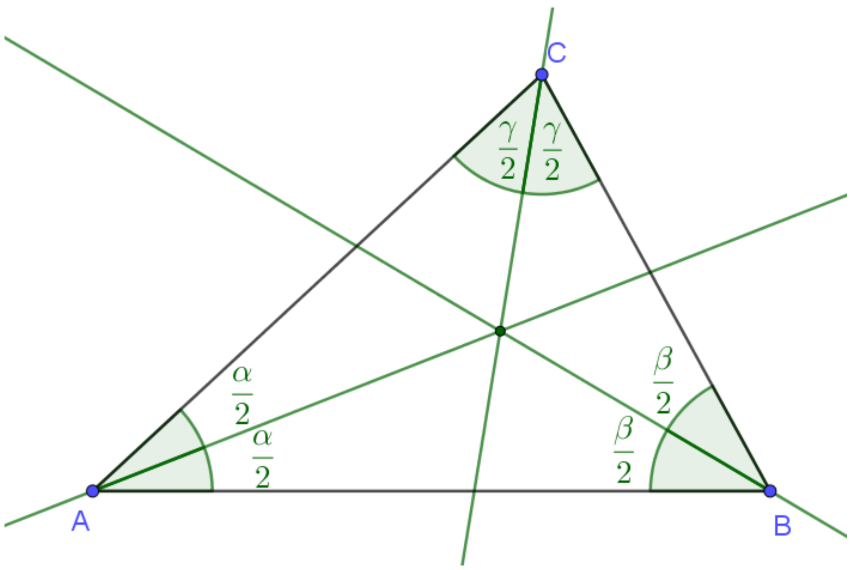
[54]

Übung:

Zeichnen Sie die Winkelhalbierenden in das Dreieck ein:



Lösung:



[54] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 12

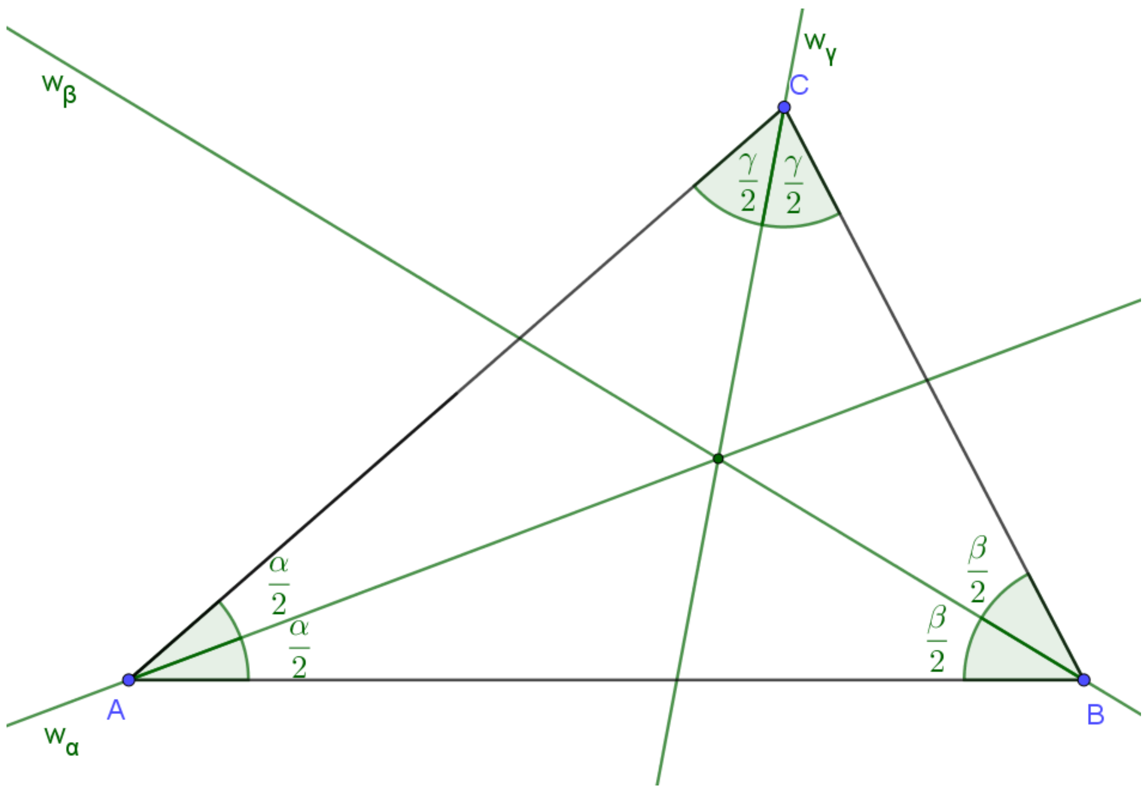
5.4.1 Satz: Winkelhalbierenden (Schnittpunkt ist Inkreismittelpunkt)

Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt S. Dies ist der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$. [55]

Übung:

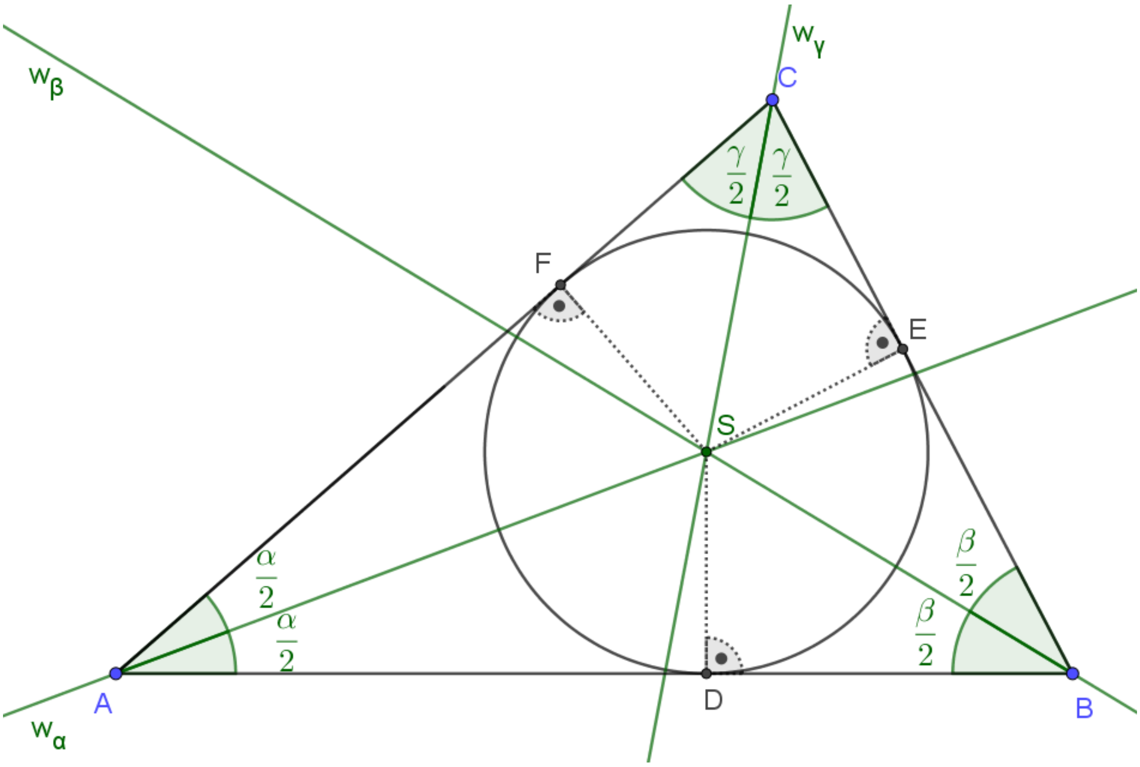
Beweisen Sie obigen Satz:

Tipp: Zeichnen Sie Hilfslinien.



[55] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 22

Lösung:



1. Sei S der Schnittpunkt von w_α und w_β. Dann gilt für die Abstände zu den Seiten: $|SF| = |SD|$ und $|SD| = |SE|$.
2. Aus 1. folgt $|SF| = |SE|$. Demzufolge liegt S auf w_γ.

3. Folglich schneiden sich alle drei Winkelhalbierenden in S. S ist gleich weit von allen drei Seiten entfernt. Also ist S der Mittelpunkt des Inkreises, der die drei Seiten in den Lotfußpunkten E, F und D berührt.

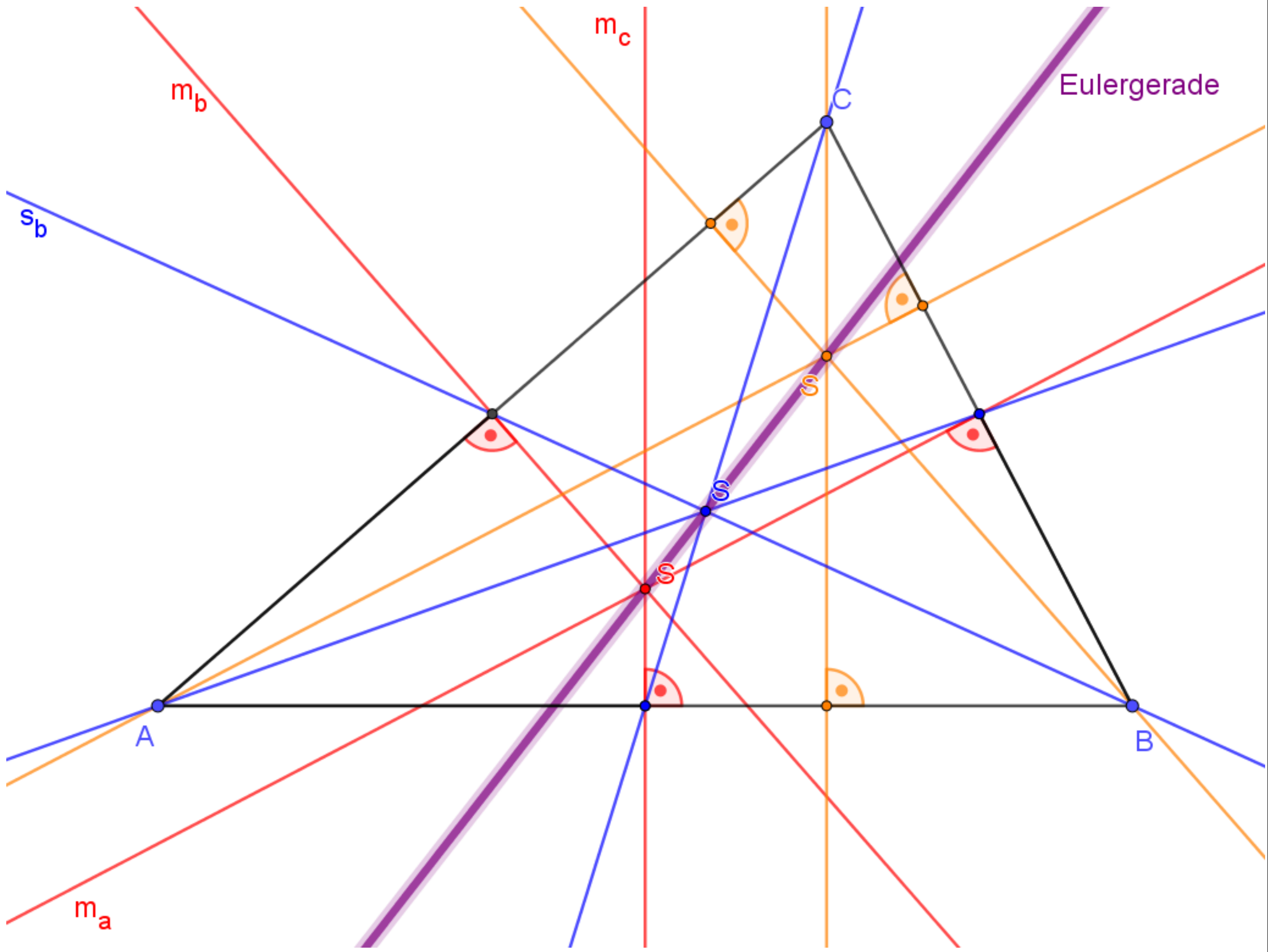
[56]

---

[56] Warmuth, E.: 9.3. Einfache Sätze der Elementargeometrie (Haus der Dreiecke), 2020, S. 22

5.5 Eulergerade

Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten, Höhen und Seitenhalbierenden liegen auf einer Geraden, die Eulergerade genannt wird:

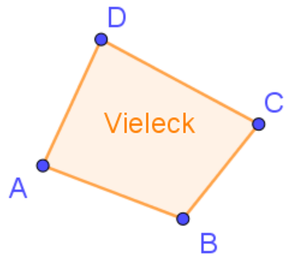


5.6 Zerlegung eines Vielecks

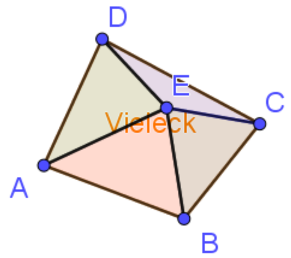
„Ist ein Vieleck aus Teilvielecken so zusammengesetzt, dass die Inneren der Teilvielecke paarweise disjunkt sind und dass die Vereinigung der Flächen der Teilvielecke die Fläche des Vielecks ergibt, so bilden die Teilvielecke eine **Zerlegung des Vielecks**.“[57]

Beispiel:

Man betrachte das Vieleck ABCD.

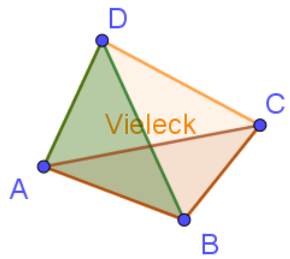


Die vier Dreiecke △AED, △ABE, △BCE und △CDE bilden zusammen eine **Zerlegung** des Vielecks ABCD, weil sie paarweise disjunkt sind (d.h. sich nicht überschneiden) und zusammen wieder das Vieleck ABCD ergeben.



Gegenbeispiel:

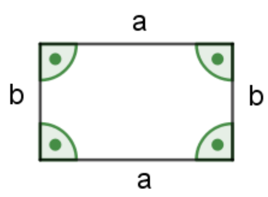
Die Dreiecke △ABD und △ABC bilden zusammen jedoch **keine Zerlegung** des Vielecks ABCD:
Einerseits sind sie nicht paarweise disjunkt (weil sie sich überschneiden) und andererseits ergeben sie zusammen nicht das Vieleck ABCD.



5.7 Flächeninhalt eines Dreiecks

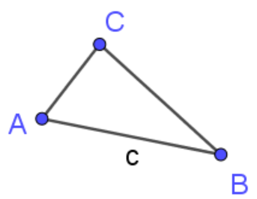
Übung:

Man betrachte ein beliebiges Rechteck:



Der Flächeninhalt $A_{Rechteck}$ eines Rechtecks berechnet sich durch: $A_{Rechteck} = a \cdot b$

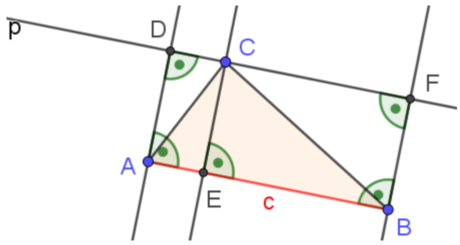
Leiten Sie auf dieser Grundlage die Flächeninhaltsformel für ein beliebiges Dreieck her.



[57] Aus: Wellstein, H. / Kirsche, P.: Elementargeometrie, 2009, S. 70

Lösung:

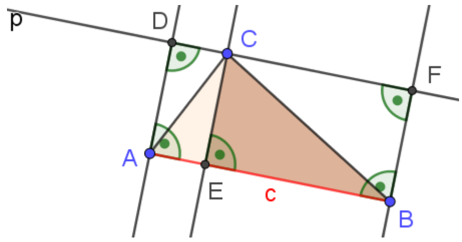
Man zeichne eine Parallele p zu AB durch C.
Nun fälle man das Lot
- von A auf p
- von B auf p
- sowie C auf AB.



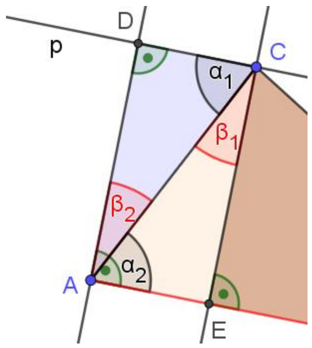
Es entsteht das Rechteck ABFD, welches das Dreieck △ABC enthält.

Der Flächeninhalt A des Rechtecks ABFD berechnet sich durch $A = c \cdot |BF|$.

Das Dreieck △ABC lässt sich in zwei Teildreiecke △AEC und △EBC zerlegen (siehe Zerlegung, S. 64).

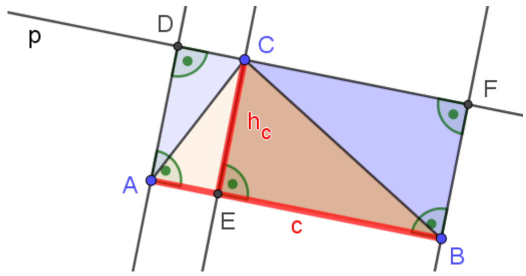


Man betrachte die Dreiecke △AEC und △ACD.
Diese sind nach wsw kongruent, weil gilt:
$\beta_1 \cong \beta_2$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)
AC ist gemeinsame Seite.
$\alpha_1 \cong \alpha_2$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)



Analog zeigt man, dass die Dreiecke △EBC und △BFC kongruent sind.

Das Rechteck ABFD lässt sich in zwei kleinere Rechtecke zerlegen, die sich jeweils in zwei kongruente Dreiecke zerlegen lassen. Somit lässt sich das Rechteck ABFD in *vier* Dreiecke zerlegen.



Das Dreieck △ABC, lässt sich in *zwei* dieser Dreiecke zerlegen (die nicht kongruent sind) und besitzt daher nur die Hälfte des Flächeninhalts des Rechtecks.
Es gilt: $A_{Dreieck} = A_{Rechteck} : 2$

Da $EC \cong BF$ gilt und man in diesem Fall die *Strecke* EC als die Höhe h_c auf der Seite c bezeichnen kann, erhält man O.B.d.A.

$$A_{Dreieck} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

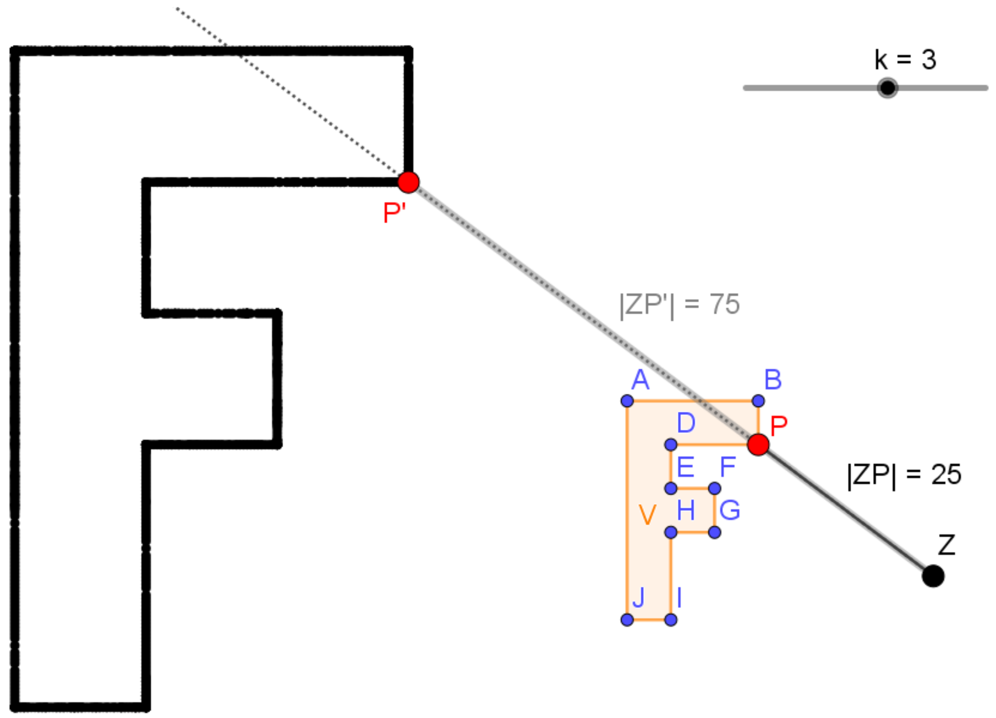
(„Grundseite mal Höhe durch Zwei“)

6 Strahlensätze und ähnliche Dreiecke

6.1 Zentrische Streckung

Übung: Man betrachte das Vieleck V mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H, I und J.

Weiterhin wähle man einen Punkt Z, der das Streckungszentrum darstellt und einen Streckungsfaktor k > 0.



Erläutern Sie, wie die große Figur entstanden ist.

Lösung[58]:

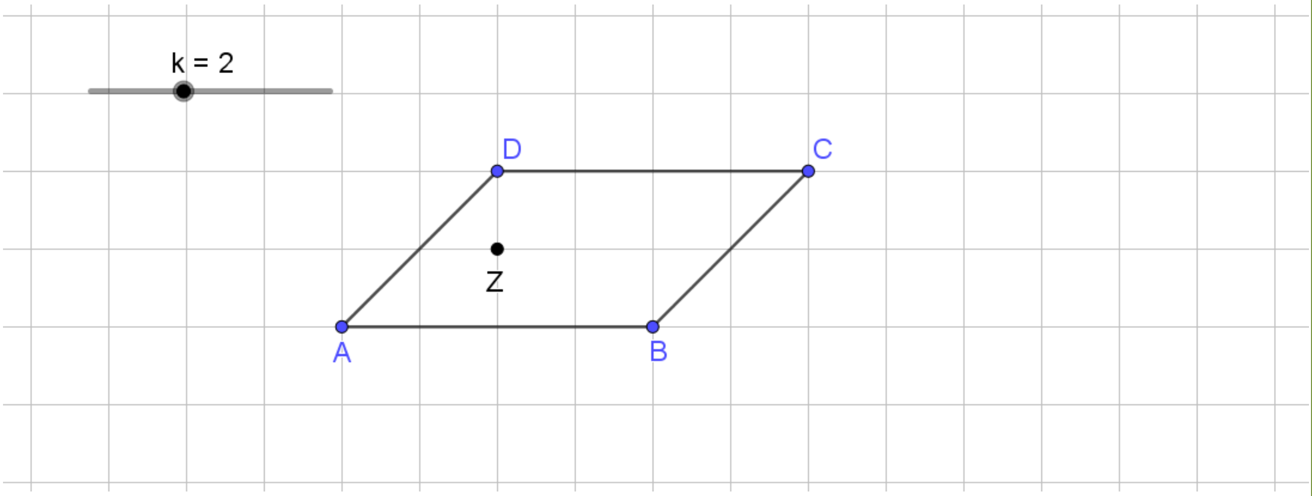
Zentrische Streckung mit Streckungszentrum Z und Streckungsfaktor $k, k > 0$:

- Abbildung der Ebene auf sich
- Jedem Punkt $P \neq Z$ wird sein Bildpunkt P' folgendermaßen zugeordnet:
  P' liegt auf dem Strahl ZP^+ und es gilt $|ZP'| = k \cdot |ZP|$.
- Es gilt $Z' = Z$.

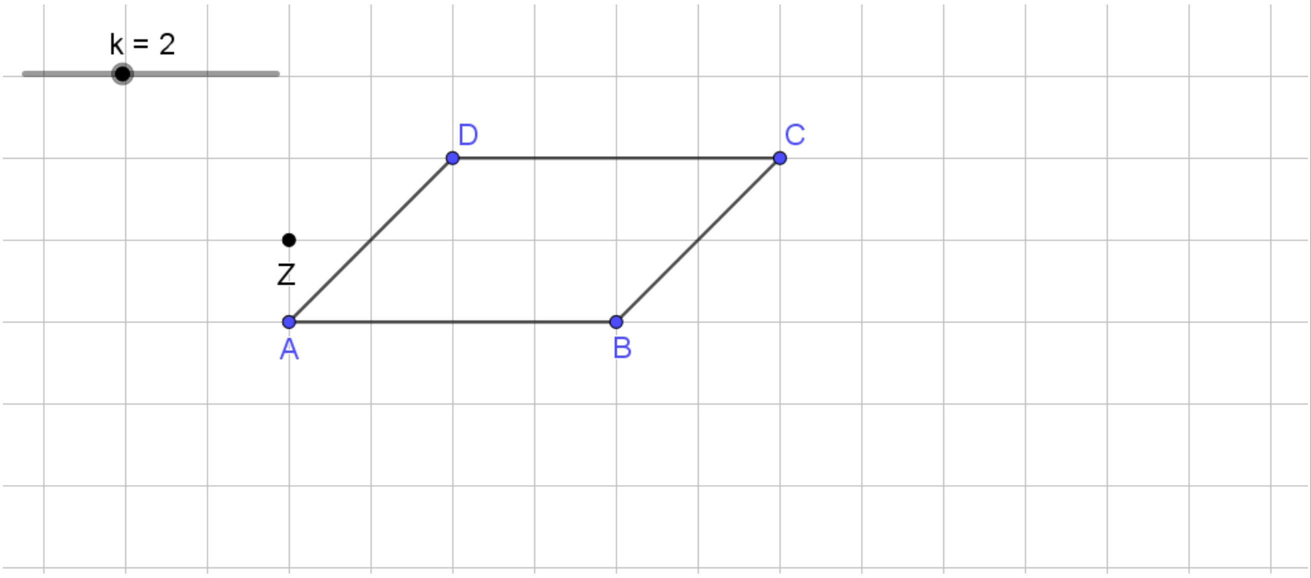
[58] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 4

Übungen:

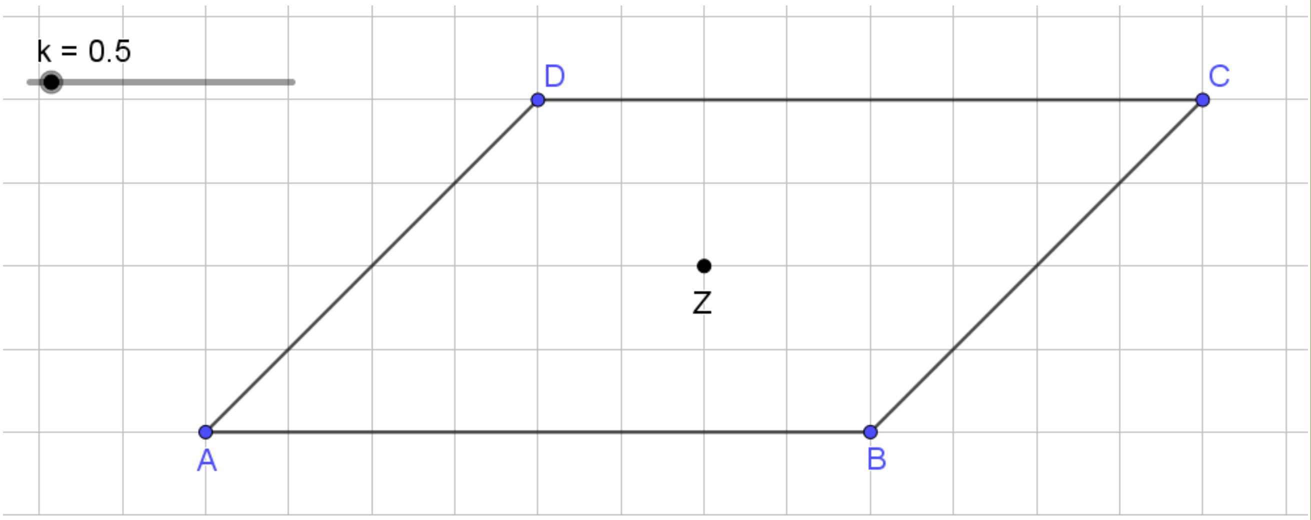
Führen Sie die zentrische Streckung durch:



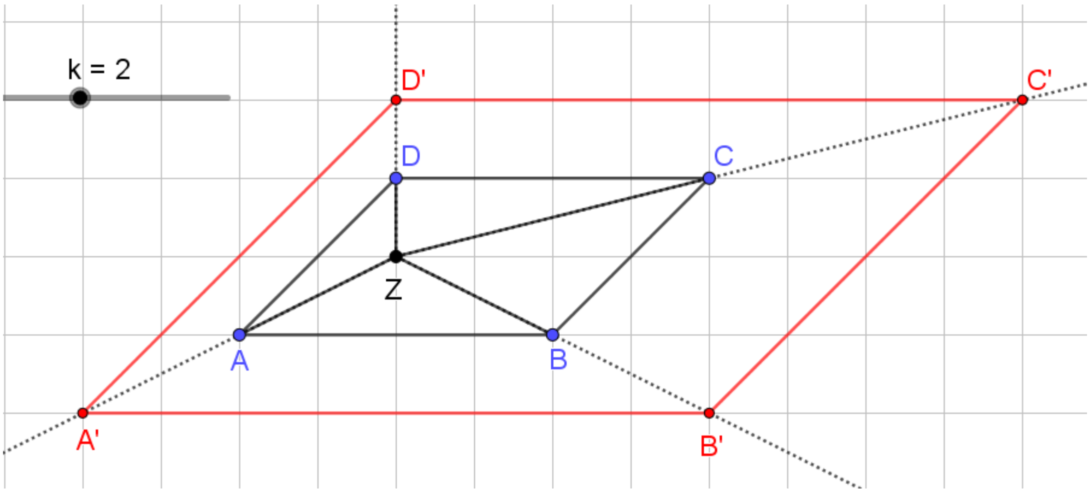
Führen Sie die zentrische Streckung durch:

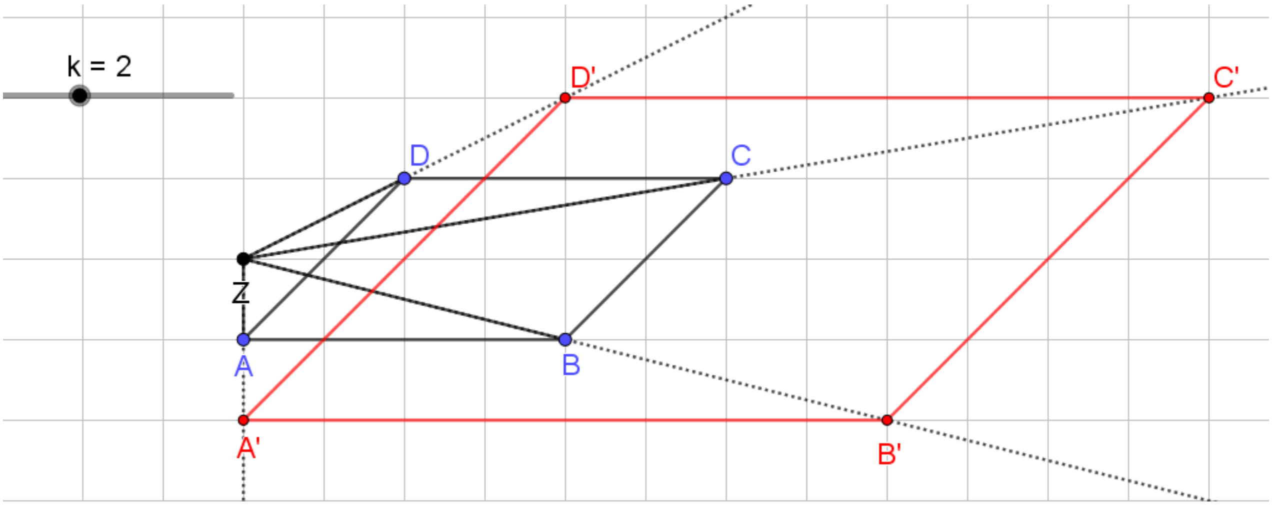


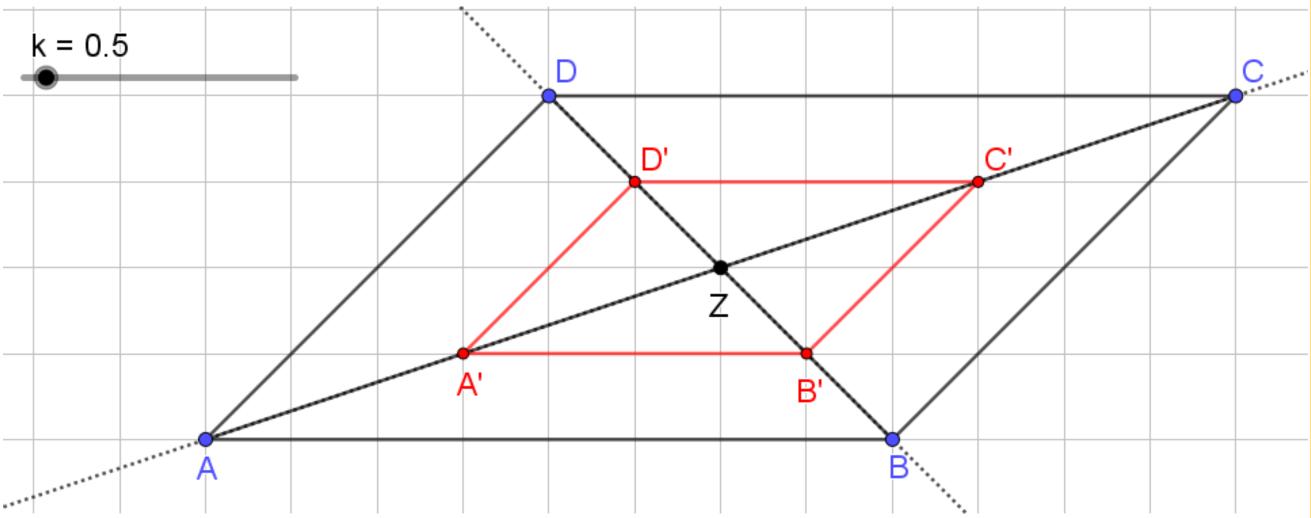
Führen Sie die zentrische Streckung durch:



Lösungen:



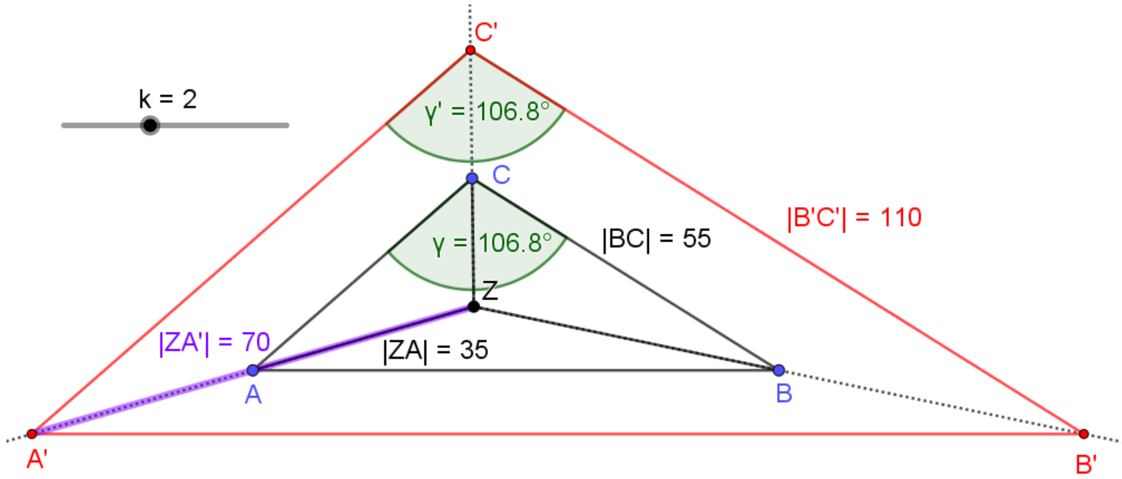




6.1.1 Eigenschaften einer zentrischen Streckung

Übung:

Betrachten Sie nachfolgende Abbildung und suchen Sie nach Eigenschaften einer zentrischen Streckung:



Lösung[59]:

Verhalten von Punkten und Geraden bei einer zentrischen Streckung mit $k > 0, k \neq 1$:

a. Z ist der einzige Fixpunkt.

b. Z, P und P' liegen stets auf einer Geraden.

c. Die Bilder von Strecken bzw. Geraden sind Strecken bzw. Geraden. Die Bildstrecke ist k-mal so lang wie die Urbildstrecke. Jede Gerade wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet.

d. Genau die Geraden durch Z sind Fixgeraden.

e. Das Winkelmaß ist invariant.

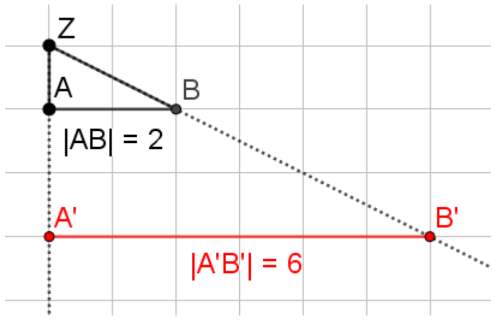
f. Das Teilungsverhältnis ist invariant.

Bezeichnung: $S_{Z,k}$

[59] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 7

6.2 Maßstab

Übung: Betrachten Sie die zentrische Streckung:



1. Geben Sie den Streckungsfaktor k an.
2. In welchem Verhältnis stehen die Längen von Bildstrecke und Urbildstrecke?
3. Stellen Sie eine allgemeine Gleichung auf.

Lösung:

zu 1. : k = 3

zu 2. : |A'B'| : |AB| = 6 : 2

zu 3. : |A'B'| : |AB| = k

Der Streckungsfaktor k wird in der Kartografie als *Maßstabszahl* bezeichnet[60]:

$$k = \frac{|Bildstrecke|}{|Urbildstrecke|} = \frac{|Naturstrecke|}{|Kartenstrecke|}$$, z.B. k = 3

Der Quotient 1/k wird in der Kartografie als *Maßstab* bezeichnet:

$$\frac{1}{k} = \frac{|Urbildstrecke|}{|Bildstrecke|} = \frac{|Kartenstrecke|}{|Naturstrecke|}$$, z.B. 1 : k = 1 : 10.000

Übung: Eine Strecke ist in der Natur 5km lang, auf einer Karte beträgt ihre Länge 10cm. Welcher Maßstab wird verwendet?

[60] https://de.wikipedia.org/wiki/Ma%C3%9Fstab_(Kartografie)#Definition_des_Ma%C3%9Fstabes

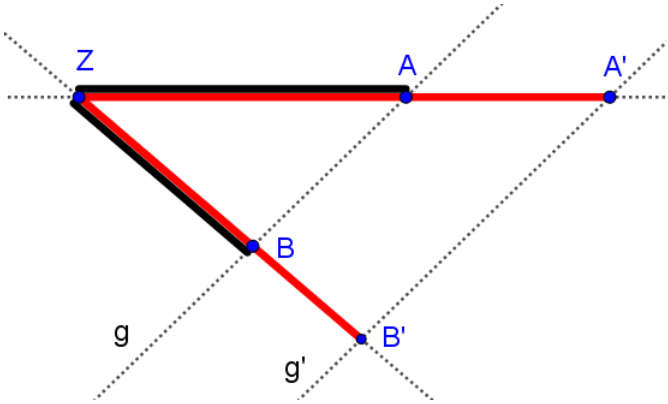
Lösung:

$$\frac{1}{k} = \frac{|Kartenstrecke|}{|Naturstrecke|} = \frac{10cm}{5km} = \frac{0{,}1m}{5.000m} = \frac{1}{50.000} = 1{:}\,50.000$$

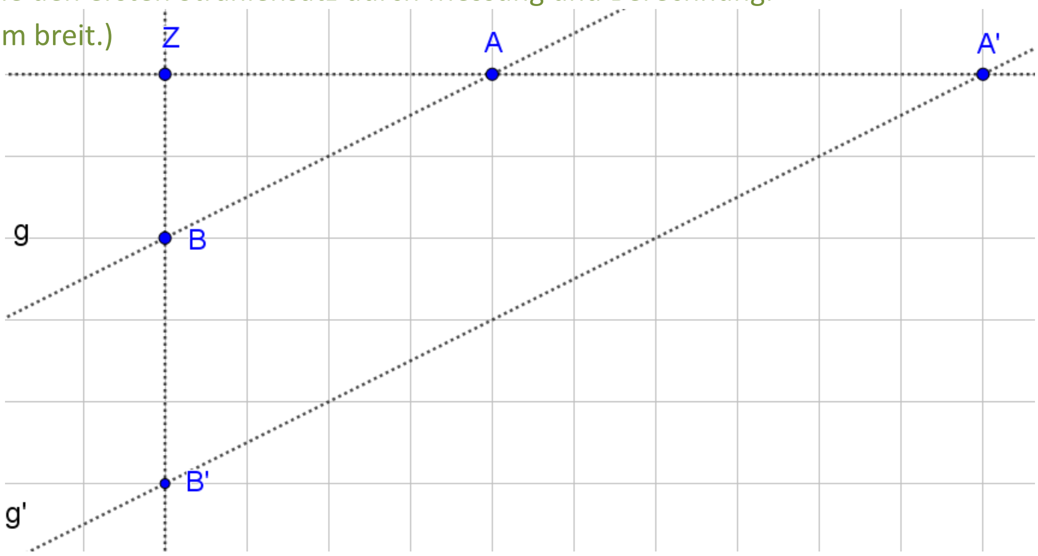
6.3 Erster Strahlensatz (Verhältnis sich schneidender Geradenabschnitte)

Werden zwei sich in einem Punkt Z schneidende Geraden von parallelen Geraden g und g' in A, B bzw. A', B' geschnitten, dann gilt: [61]

- $|ZA| : |ZA'| = |ZB| : |ZB'|$

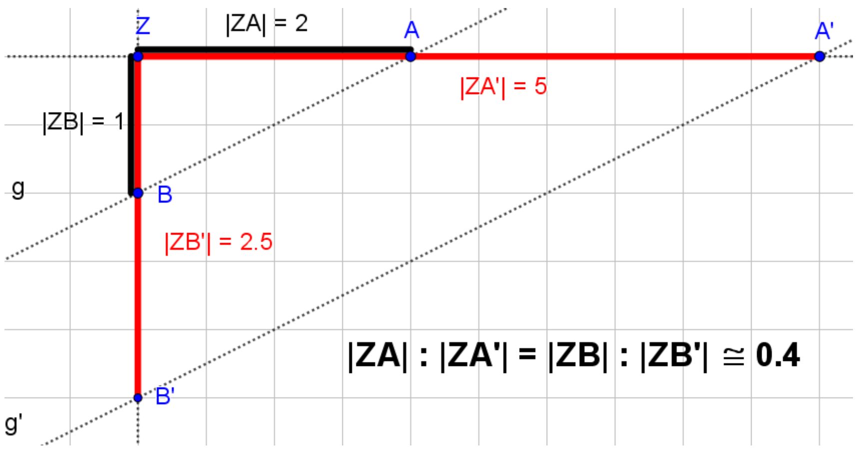


Übung: Bestätigen Sie den ersten Strahlensatz durch Messung und Berechnung.
(Ein Kästchen ist 5mm breit.)



[61] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 10

Lösung:

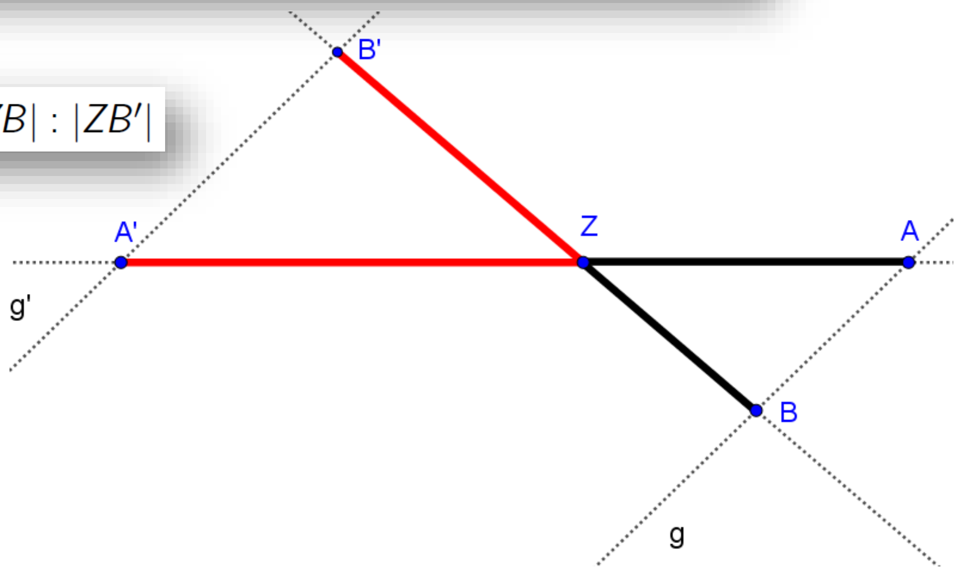


6.3.1 Hinweis (Punkt Z zwischen den Parallelen)

Der erste Strahlensatz gilt auch, wenn sich der Punkt Z zwischen den Parallelen befindet:

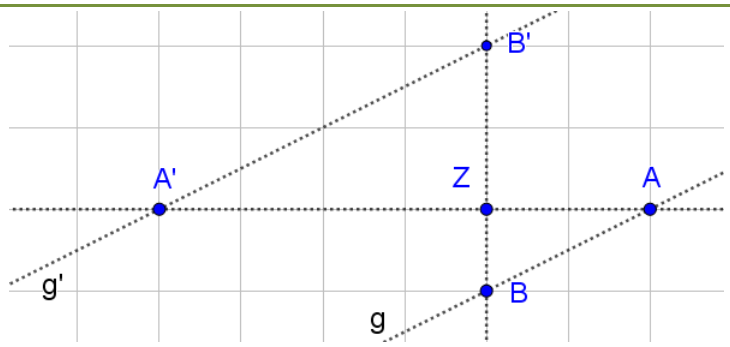
Werden zwei sich in einem Punkt Z schneidende Geraden von parallelen Geraden g und g' in A, B bzw. A', B' geschnitten, dann gilt:

- $|ZA| : |ZA'| = |ZB| : |ZB'|$

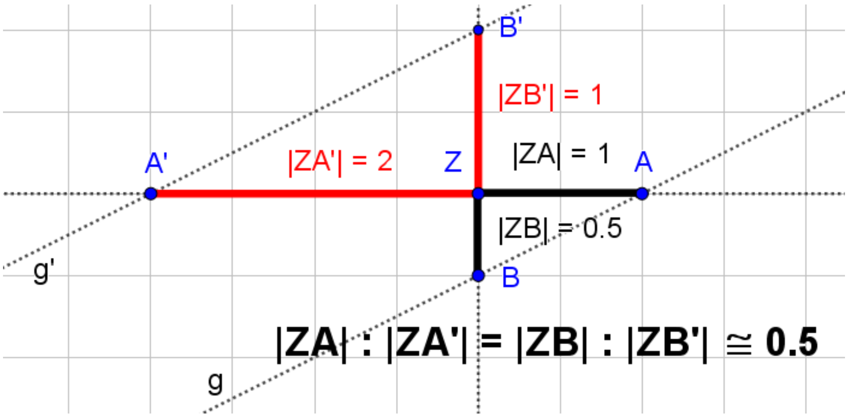


Übung:

Bestätigen Sie den ersten Strahlensatz durch Messung und Berechnung.
(Ein Kästchen ist 5mm breit.)



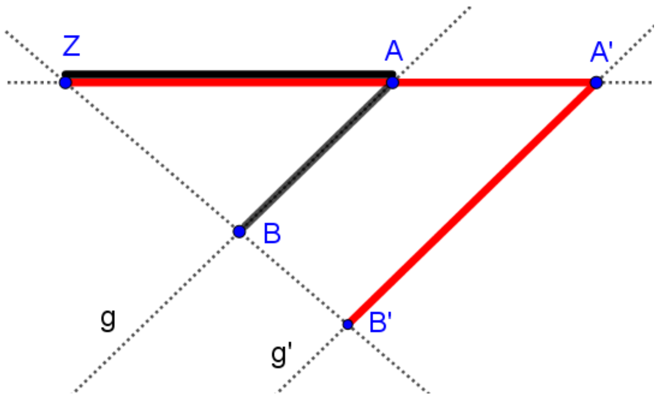
Lösung:



6.4 Zweiter Strahlensatz (Verhältnis Parallelen- zu Geradenabschnitten)

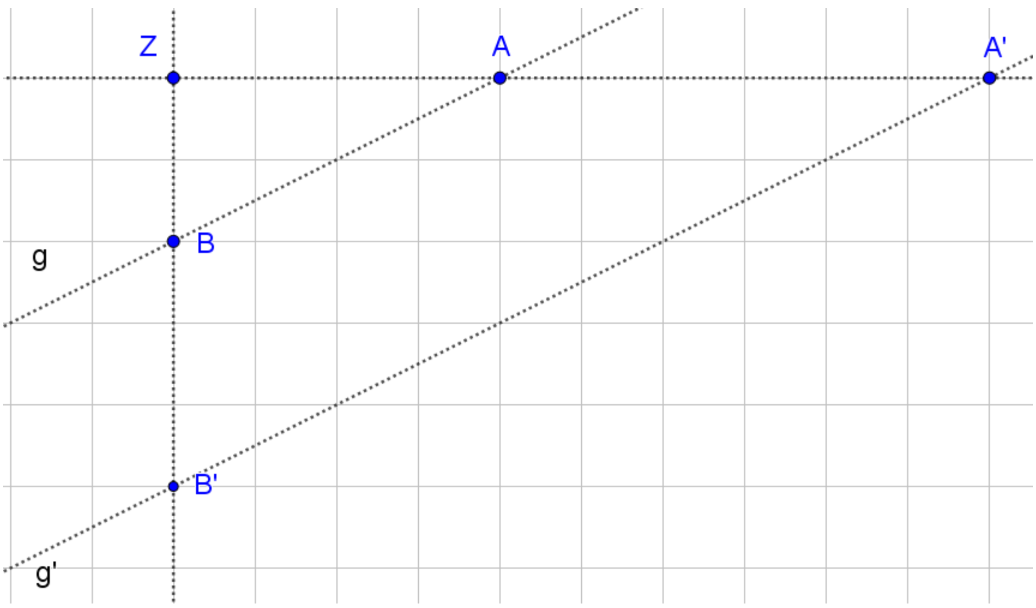
Werden zwei sich in einem Punkt Z schneidende Geraden von parallelen Geraden g und g' in A, B bzw. A', B' geschnitten, dann gilt:[62]

- $|ZA| : |ZA'| = |AB| : |A'B'|$



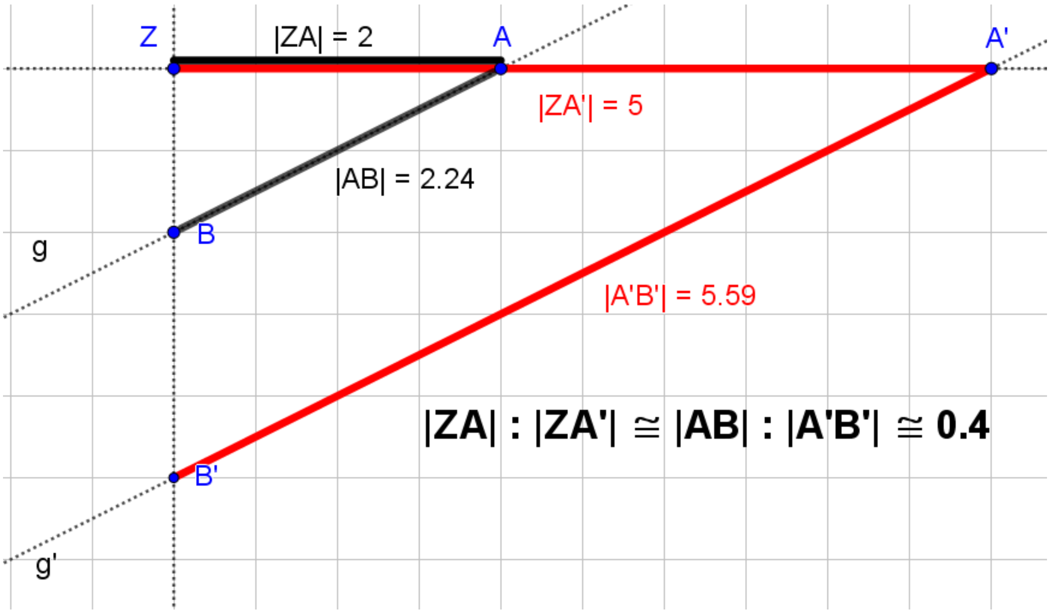
Übung:

Bestätigen Sie den zweiten Strahlensatz durch Messung und Berechnung.



[62] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 10

Lösung:

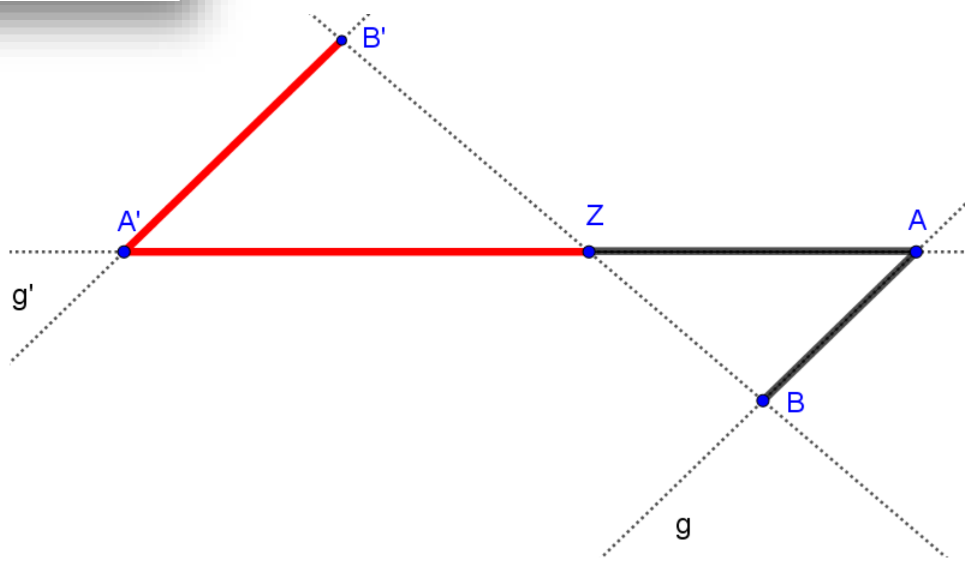


6.4.1 Hinweis (Punkt Z zwischen den Parallelen)

Der zweite Strahlensatz gilt auch, wenn sich der Punkt Z zwischen den Parallelen befindet:

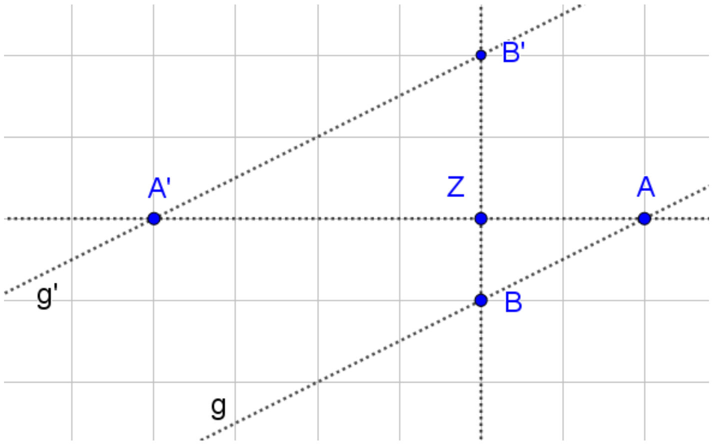
Werden zwei sich in einem Punkt Z schneidende Geraden von parallelen Geraden g und g' in A, B bzw. A', B' geschnitten, dann gilt:

▸ $|ZA| : |ZA'| = |AB| : |A'B'|$

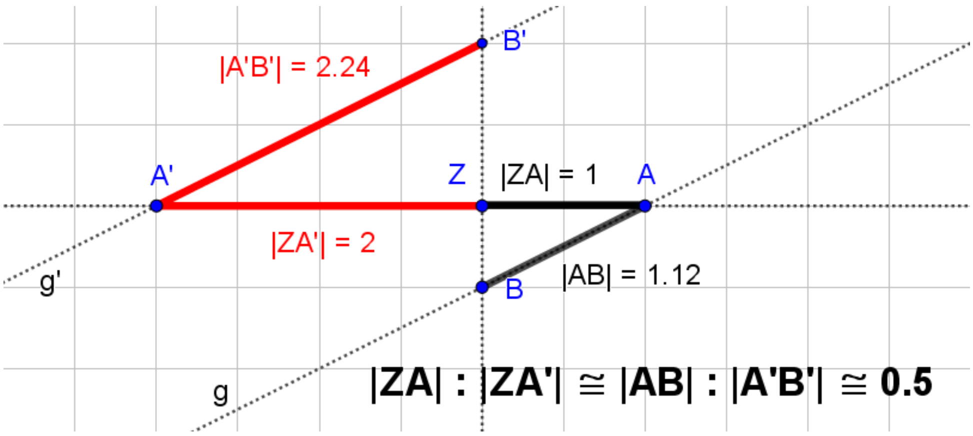


Übung:

Bestätigen Sie den zweiten Strahlensatz durch Messung und Berechnung.



Lösung:



6.5 Umkehrbarkeit des ersten Strahlensatzes

Der 1. Strahlensatz ist umkehrbar:

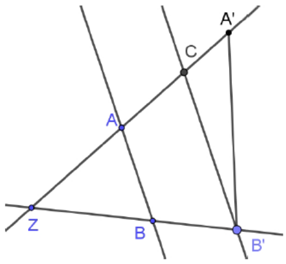
Satz 3

Gilt $A' \in ZA^+$, $B' \in ZB^+$ und

$$|ZA| : |ZA'| = |ZB| : |ZB'|,$$

so ist $AB \parallel A'B'$.

Beweis.

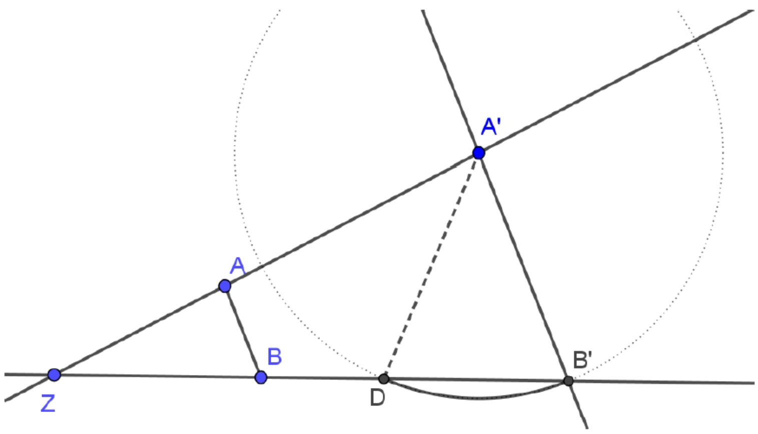


Angenommen, AB und $A'B'$ seien nicht parallel. Zeichne Parallele zu AB durch B'. Sie schneide ZA^+ in $C \neq A'$. Nach dem 1. Strahlensatz gilt $|ZA| : |ZC| = |ZB| : |ZB'|$. Nach Voraussetzung gilt $|ZA| : |ZA'| = |ZB| : |ZB'|$. Also muss $C = A'$ sein, im Widerspruch zur Annahme. □

[63]

6.6 Nichtumkehrbarkeit des zweiten Strahlensatzes

Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar:



$|ZA| : |ZA'| = |AB| : |A'D|$, aber AB und $A'D$ sind nicht parallel.

[64]

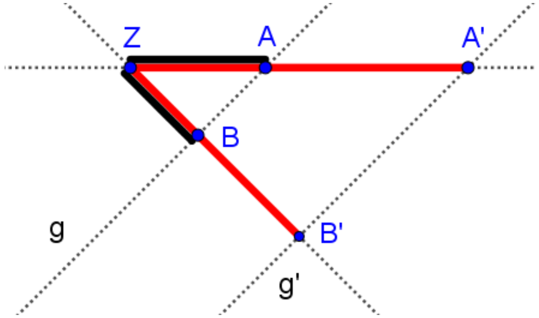
---

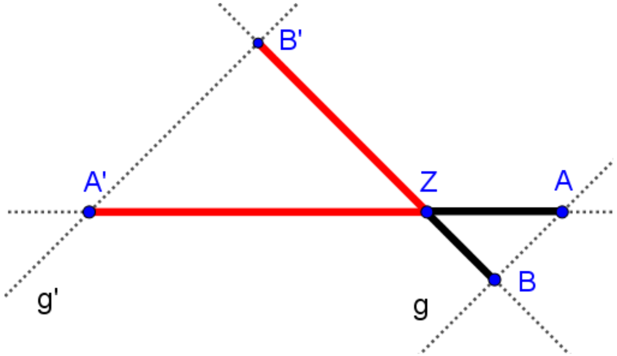
[63] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 13
[64] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 14

6.7 Übersicht Strahlensätze

Werden zwei sich in einem Punkt Z schneidende Geraden von zwei parallelen Geraden g und g‘ in A, B bzw. A‘, B‘ geschnitten, dann gilt[65]:

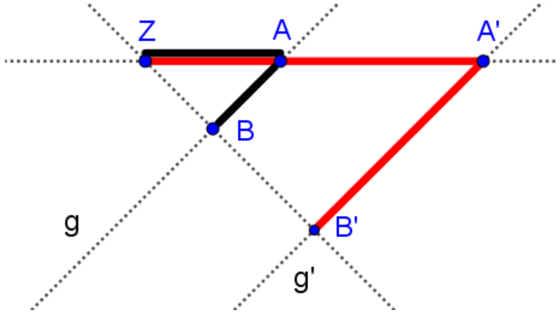
$|ZA| : |ZA'| = |ZB| : |ZB'|$ (erster Strahlensatz)

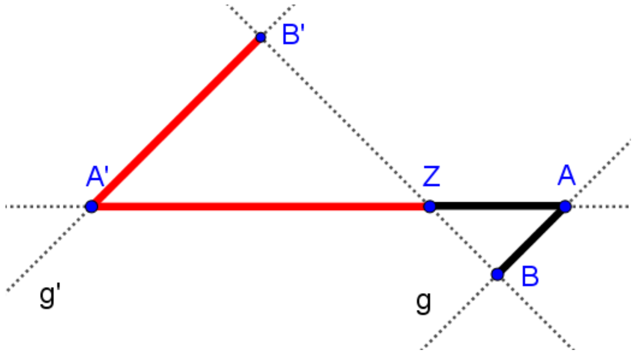




Der erste Strahlensatz *ist* umkehrbar (siehe S. 77).

$|ZA| : |ZA'| = |AB| : |A'B'|$ (zweiter Strahlensatz)





Der zweite Strahlensatz ist *nicht* umkehrbar (siehe S. 77).

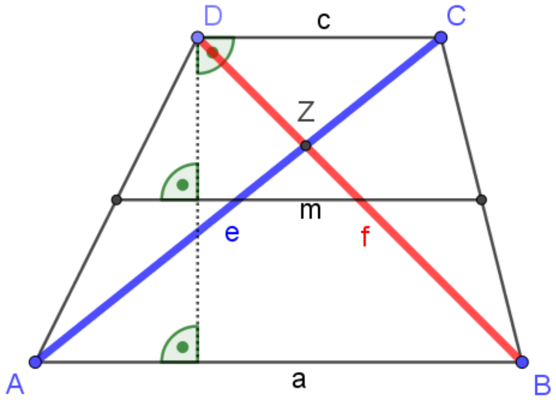
[65] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 10

6.8 Übungen (Strahlensätze)

Bitten nutzen Sie auch die Übungen in diesem Ordner.

Übung 1:

In welchem Verhältnis schneiden sich die Diagonalen e und f im Trapez?



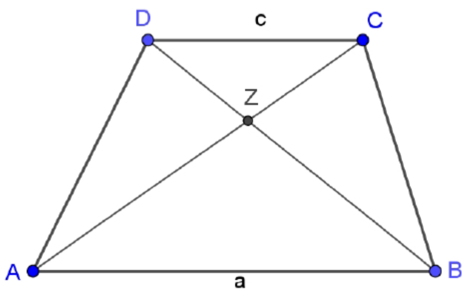
Lösung 1:

Die Diagonalen schneiden einander im gleichen Verhältnis, nämlich wie $c : a$.

Beweis mit Strahlensatz:

$|ZA| : |ZC| = |ZB| : |ZD|$

$= a : c.$



[66]

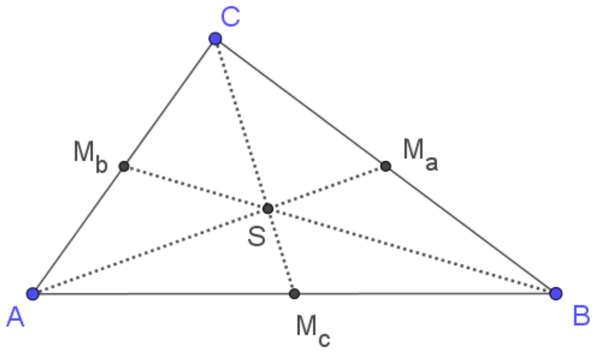
---

[66] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 15

Übung 2:

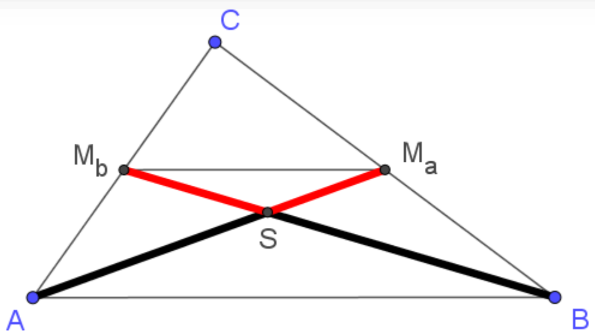
Beweisen Sie:

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt S. Dieser Punkt S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (von den Ecken aus gemessen). [67]



Lösung 2:

1. $AB \| M_aM_B$. (Seitenmittendreieck)
2. Betrachte die Strahlensatzfigur mit S als Zentrum, den Geraden $g(A, S)$ und $g(B, S)$ und den Parallelen aus 1.
3. Nach 2. Strahlensatz gilt $AS : SM_a = BS : SM_b = AB : M_aM_b$.
4. $AB : M_aM_b = 2 : 1$ (Seitenmittendreieck), also $AS : SM_a = BS : SM_b = 2 : 1$.
5. Analog für die dritte Seitenhalbierende.



[67] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 16

6.9 Ähnlichkeit

Mit Hilfe zentrischer Streckungen kann man eine Figur maßstäblich verkleinern oder vergrößern.

Definition 7
Eine Figur G heißt zu einer Figur F ähnlich, wenn G zu einem dieser Bilder von F kongruent ist.

Wenn G zu F ähnlich ist, dann auch F zu G. Man sagt: F und G sind zueinander ähnlich.

Beispiele 8

- Alle Kreise sind untereinander ähnlich.
- Alle Strecken sind untereinander ähnlich.
- Alle Quadrate sind untereinander ähnlich.
- Alle gleichseitigen Dreiecke sind untereinander ähnlich.

[68]

Satz 9
In ähnlichen n-Ecken stimmen entsprechende Winkelgrößen und das Verhältnis entsprechender Seiten überein.

Beweis.
Das folgt aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung und der Kongruenz. □

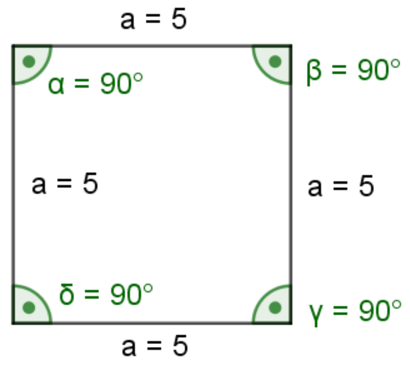
Die Gleichheit der Seitenverhältnisse reicht i.A. ebensowenig für die Ähnlichkeit aus wie die Gleichheit der Winkelgrößen.

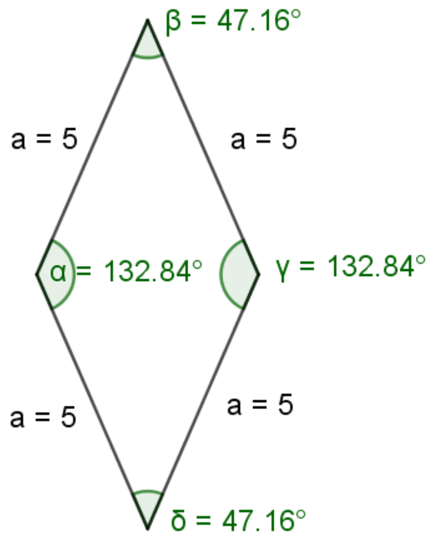
[68] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 20

Übung 1:

Zeichnen Sie zwei Vierecke, die nicht ähnlich zueinander sind, deren *Seitenverhältnisse* jedoch gleich sind.

Lösungsbeispiel 1:



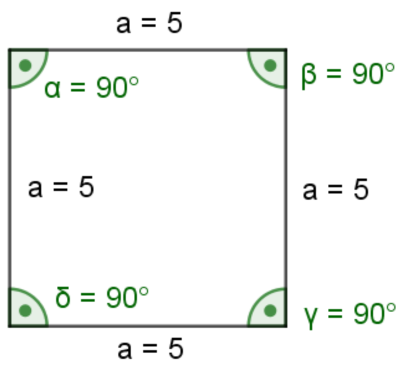


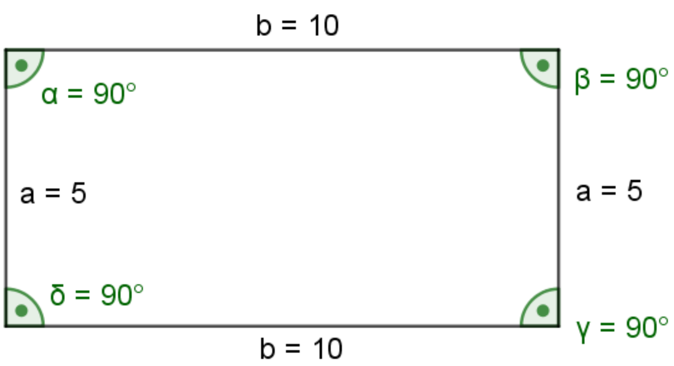
Die Seitenverhältnisse sind gleich, die Winkel sind jedoch nicht kongruent. Demnach sind die Vierecke nicht ähnlich zueinander.

Übung 2:

Zeichnen Sie zwei Vierecke, die nicht ähnlich zueinander sind, deren *Winkel* jedoch kongruent sind.

Lösungsbeispiel 2:



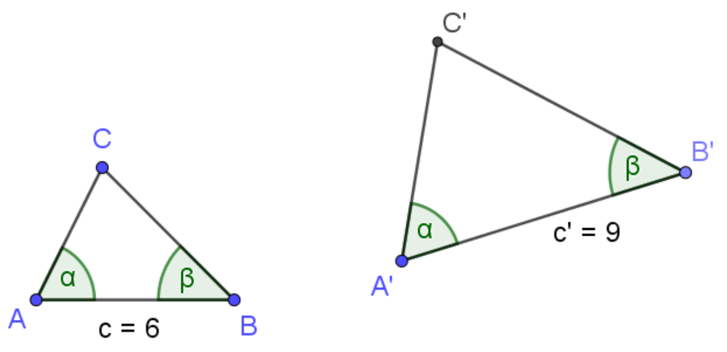


Beispiel: Die Winkel sind kongruent, die Seitenverhältnisse sind jedoch nicht gleich. Demnach sind die Vierecke nicht ähnlich zueinander.

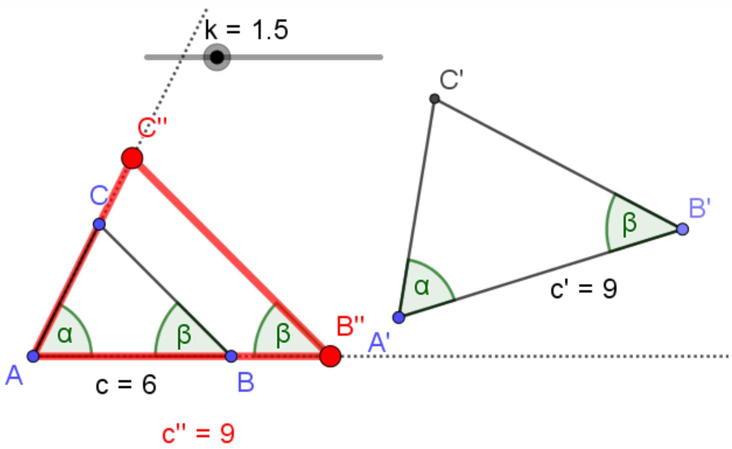
6.9.1 Hauptähnlichkeitssatz für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen. [69]

Beweis: Zwei Dreiecke mögen in zwei Winkeln übereinstimmen.



Wir wählen die Streckung $S_{A,\frac{c'}{c}}$. A wird abgebildet auf A (Fixpunkt). B wird abgebildet auf einen Punkt B'', für den gilt $|AB''| = k \cdot |AB| = \frac{c'}{c} \cdot c = c'$. Bei einer zentrischen Streckung bleiben die Winkelgrößen erhalten. Nach Kongruenz satz wsw gilt $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$. Folglich sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ ähnlich. $\square$



[69] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 20

6.9.2 Weitere Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind genau dann ähnlich, wenn sie

1. *im Verhältnis entsprechender Seiten (sss)*
2. *in einem Winkel und im Verhältnis der anliegenden Seiten (sws)*
3. *im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (Ssw)*

übereinstimmen. [70]

Beweis.

1. Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, dann müssen sie in allen Winkeln und im Verhältnis entsprechender Seiten übereinstimmen. Das folgt aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung und der Kongruenz.
2. Beweis beispielhaft für sss: Für $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ gelte $a : a' = b : b' = c : c' = k$.
   Wir strecken $\triangle A'B'C'$ mit Streckzentrum A' und Streckfaktor k. Dann stimmt das Bild von $\triangle A'B'C'$ bei dieser Streckung in allen drei Seitenlängen mit $\triangle ABC$ überein. Es ist also kongruent (nach sss) mit $\triangle ABC$. Folglich gilt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

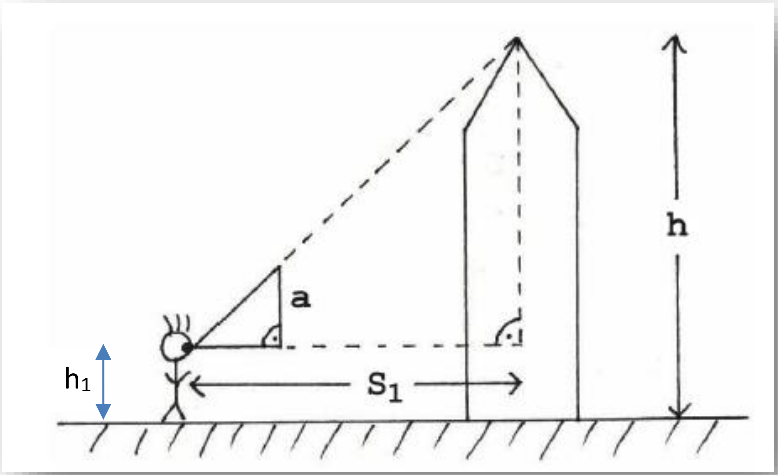
□

[70] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 24

6.9.3 Anwendung: Försterdreieck

Anwendungsbeispiel:

Man möchte herausfinden, wie hoch ein Baum, ein Gebäude oder ein Kirchturm ist. Hierzu bastelt man sich ein *gleichschenkliges* und *rechtwinkliges* Försterdreieck und stelle folgende Überlegung an:



[71]

Man betrachte das Verhältnis $a : S_1$. Da man weiß, dass das große (gestrichelte) Dreieck gleichschenklig ist, kann man S_1 durch $h - h_1$ ersetzen und folgende Gleichung aufstellen und umformen:

$$\frac{a}{S_1} = \frac{a}{h - h_1} \qquad | \cdot S_1$$

$$a = \frac{a \cdot S_1}{h - h_1} \qquad | \cdot (h - h_1)$$

$$a \cdot (h - h_1) = a \cdot S_1 \qquad | : a$$

$$h - h_1 = S_1 \qquad | + h_1$$

$$h = S_1 + h_1$$

Übung 1:

1. Erläutern Sie, warum das obige gestrichelte Dreieck gleichschenklig ist.
2. Wie geht man in der Praxis vor, wenn man die Höhe eines Kirchturms messen möchte?
3. Wie muss das Försterdreieck gehalten werden?

[71] Warmuth, E.: 9.4. Strahlensätze und Ähnliches, 2020, S. 26

Lösung 1:

Zu 1.:

Die beiden Dreiecke sind ähnlich zueinander, da sie in zwei Winkeln übereinstimmen. Da das Försterdreieck gleichschenklig ist, muss auch das große gestrichelte Dreieck gleichschenklig sein.

Zu 2.:

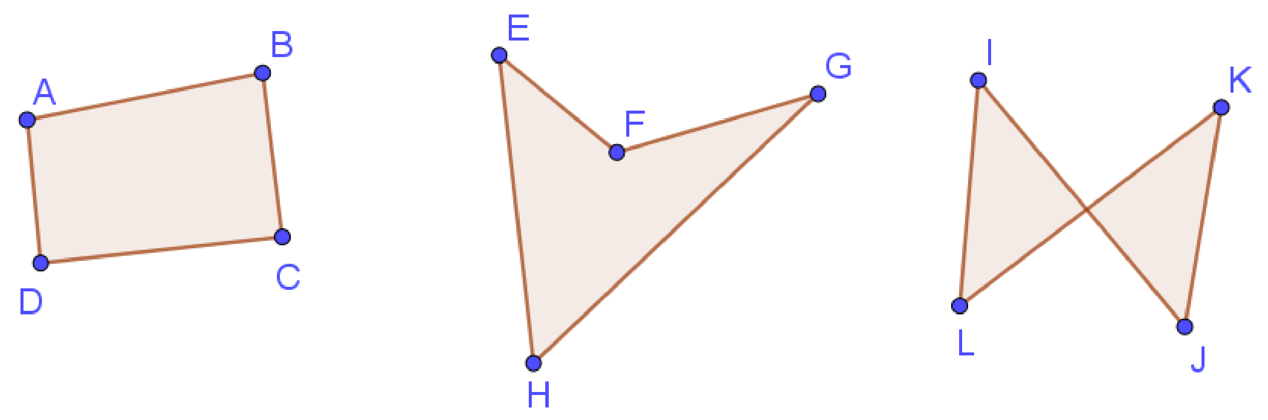
Man geht so weit vom Kirchturm weg, bis man mit dem Dreieck die Kirchturmspitze anpeilen kann (Hinweis: Verletzungsgefahr bei Schülern! Nicht ins Auge pieken!). Danach misst man die Entfernung auf dem Boden (z.B. in Schritten) und berechnet die Höhe.

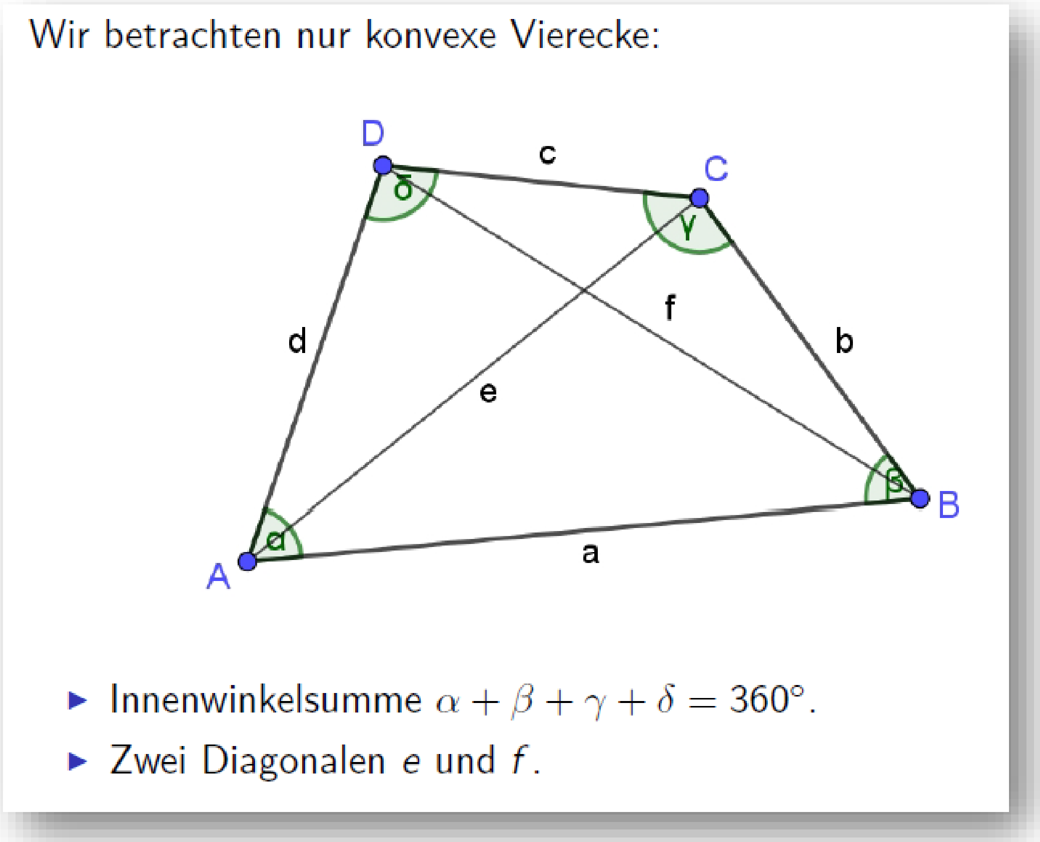
Zu 3.:

Es ist wichtig, dass das Försterdreieck möglichst waagerecht gehalten wird. Daher ist manchmal auch eine kleine Wasserwaage einbaut.

7 Haus der Vierecke

Es gibt konvexe (ABCD), konkave (EFGH) und überschlagene (IJKL) Vierecke:



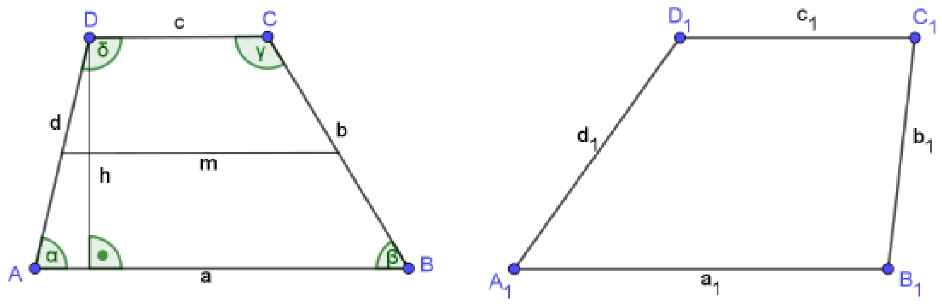


[72]

[72] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 3

7.1 Trapez

Ein Viereck mit zwei zueinander parallelen Seiten heißt Trapez.



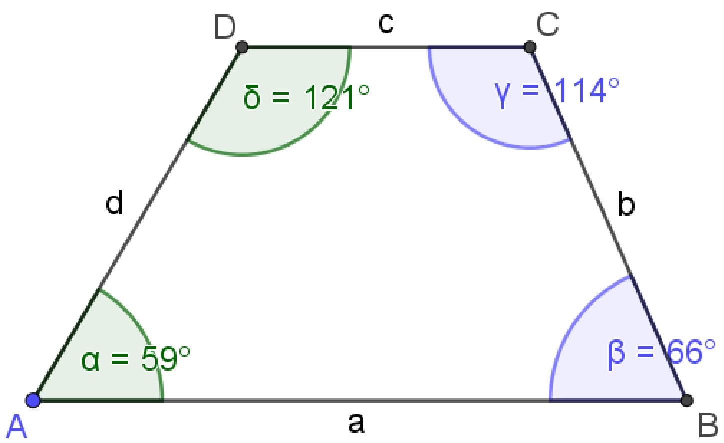
Bezeichnungen und Eigenschaften

- Grundseiten a, c mit $a \| c$, a ist die längere Seite.
- Schenkel b, d. m verbindet die Seitenmitten der Schenkel
- Die Höhe h steht senkrecht auf a und auf c.

[73]

Übung 1:

Betrachten Sie die Winkel in diesem speziellen Trapez.
Welche allgemeingültige Aussage vermuten Sie?

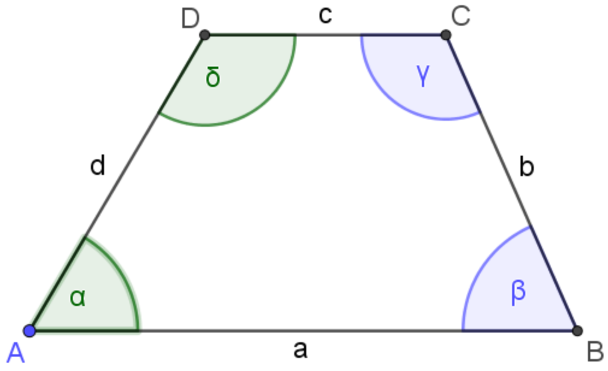


[73] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 4

Lösung 1: $\alpha + \delta = 180°$ und $\beta + \gamma = 180°$

Übung 2:

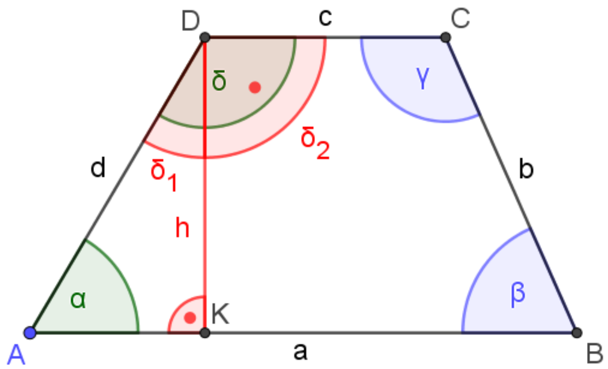
Beweisen Sie allgemein, dass gilt: $\alpha + \delta = 180°$ und $\beta + \gamma = 180°$



Tipp: Zeichnen Sie eine geeignete Hilfslinie ein.

Lösung 2:

Man fälle das Lot von D auf a und erhalte den Lotfußpunkt K



Es gilt: $\delta = \delta_1 + \delta_2 = \delta_1 + 90°$

Weiterhin gilt aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck:

$$\alpha + \delta_1 + 90° = 180°$$

Man setze $90° = \delta_2$ ein:

$$\alpha + \delta_1 + \delta_2 = 180°$$

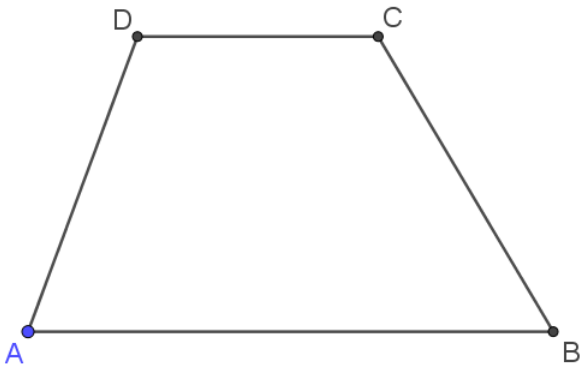
Man setze $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ ein:

$$\alpha + \delta = 180°$$

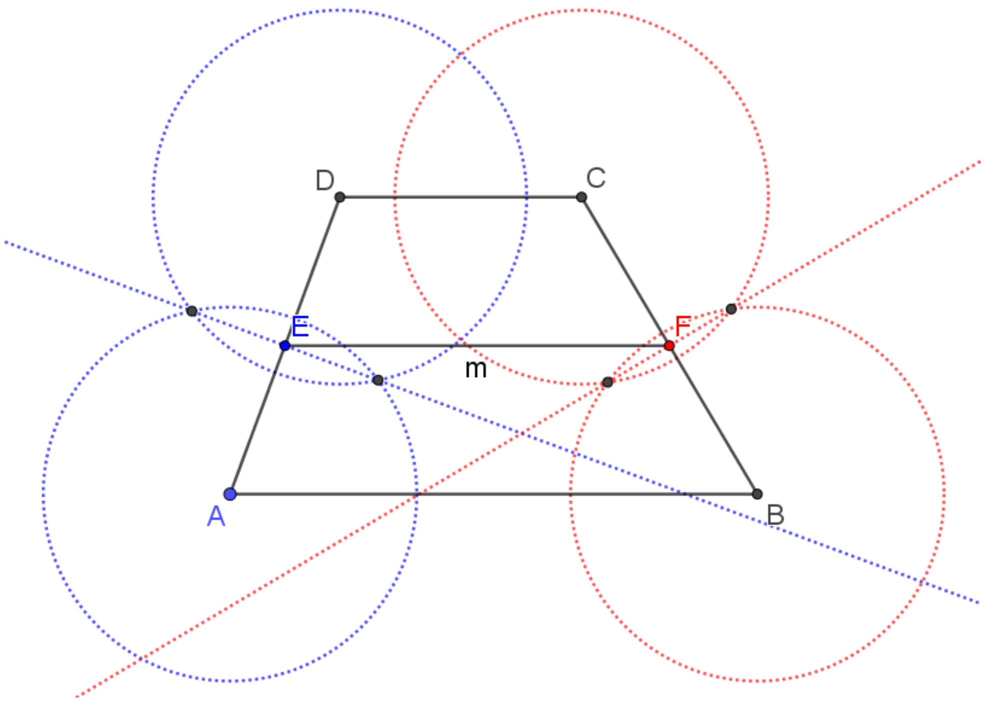
Analog zeigt man: $\beta + \gamma = 180°$.

Übung 3:

Konstruieren Sie den Mittelpunkt E von AD und den Mittelpunkt F von BC und verbinden Sie die Punkte E und F:



Lösung 3:



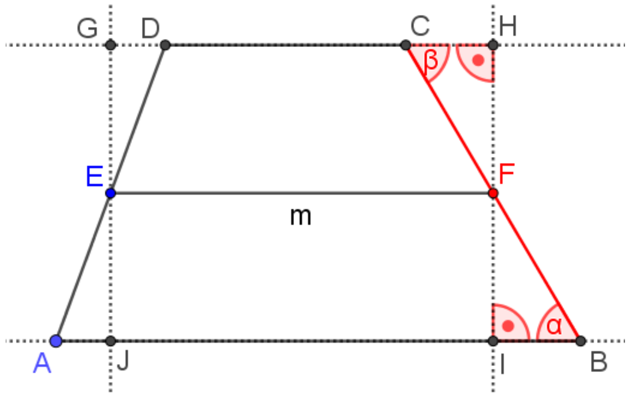
Übung 4:

Beweisen Sie: Die Mittellinie m ist die Mittelparallele zu den beiden Grundseiten AB und CD.

Tipp: Zeichnen Sie Hilfslinien ein.

Lösung 4:

Zeichne Senkrechte zu den Grundseiten durch E und F. Zeige mit Kongruenzsätzen, dass $|EG| = |EJ|$ und $|FH| = |FI|$. [74]



Es gilt:

α = β (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)
|CF| = |FB| (F ist Mittelpunkt der Strecke BC)
∡BIF ≅ ∡CHF = 90° (Senkrechte zu den Grundseiten)

Wenn zwei Winkel im Dreieck bekannt sind, lässt sich der 3. Winkel berechnen.

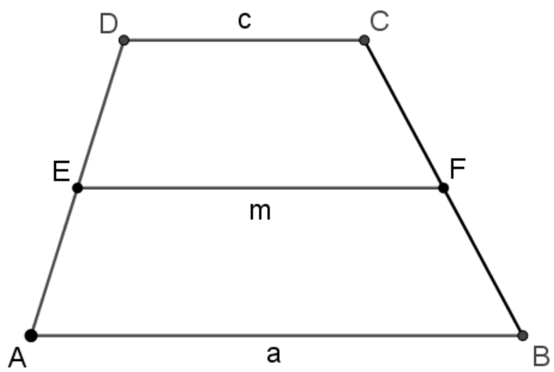
Nach Kongruenzsatz wsw sind die Dreiecke △BIF und △FCH kongruent.

Somit gilt |FH| = |FI|.

Analog zeigt man: |EG = |EJ|

Übung 5:

Beweisen Sie, dass für die Mittelinie m im Trapez gilt: $m = \frac{a+c}{2}$.

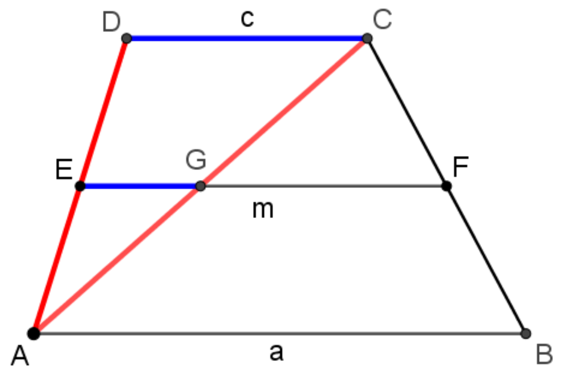


Tipp: Zeichnen Sie eine Diagonale ein.

[74] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 6

Lösung:

Aufgrund des 2. Strahlensatzes (siehe S. 78) gilt:



|AE| : |AD| = |EG| : |DC|

Weil E der Mittelpunkt von AD ist, gilt

|AE| : |AD| = 1 : 2

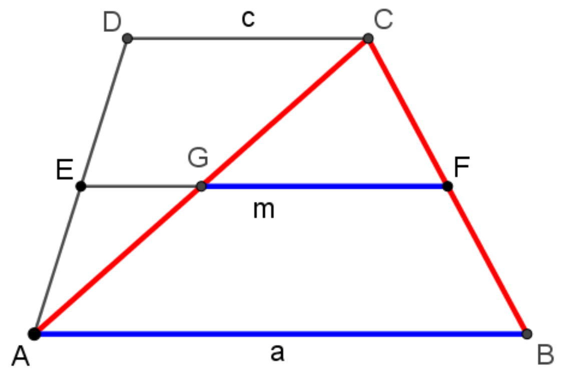
Demnach gilt auch

|EG| : |DC| = 1 : 2

⇔ |EG| = |DC| : 2 bzw. |EG| = c : 2 = $\frac{c}{2}$

Man betrachte weiterhin folgende Abbildung:

Aufgrund des 2. Strahlensatzes (siehe S. 78) gilt:



|CF| : |CB| = |GF| : |AB|

Weil F der Mittelpunkt von CB ist, gilt

|CF| : |CB| = 1 : 2

Demnach gilt auch

|GF| : |AB| = 1 : 2

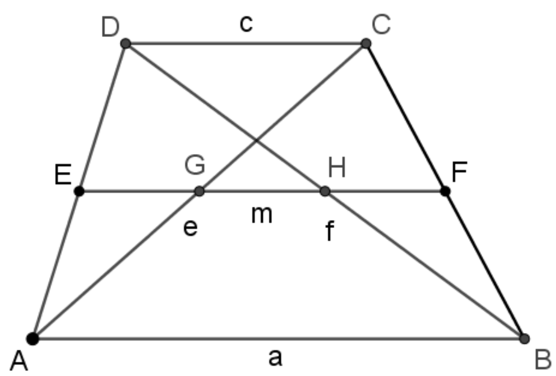
⇔ |GF| = |AB| : 2 bzw. |GF| = a : 2 = $\frac{a}{2}$

Die Länge der Mittellinie m lässt sich demnach berechnen durch:

m = |EG| + |GF| = $\frac{c}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a+c}{2}$

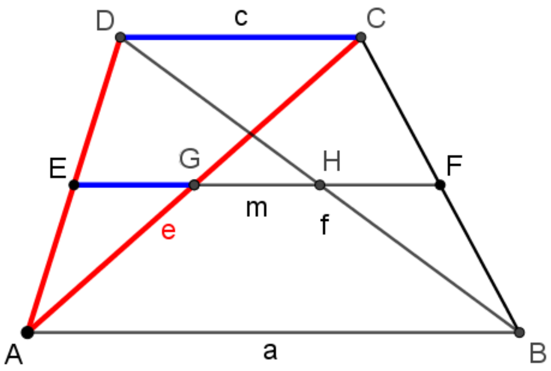
Übung 6:

Beweisen Sie, dass die Mittelline m durch die Mittelpunkte G und H der Diagonalen verläuft.



Lösung 6:

Man betrachte folgende Abbildung:



Zu zeigen: G ist der Mittelpunkt von AC

Beweis:

Aufgrund des 1. Strahlensatzes (siehe S. 78) gilt:

|AE| : |AD| = |AG| : |AC|

Weil E der Mittelpunkt von AD ist, gilt

|AE| : |AD| = 1 : 2

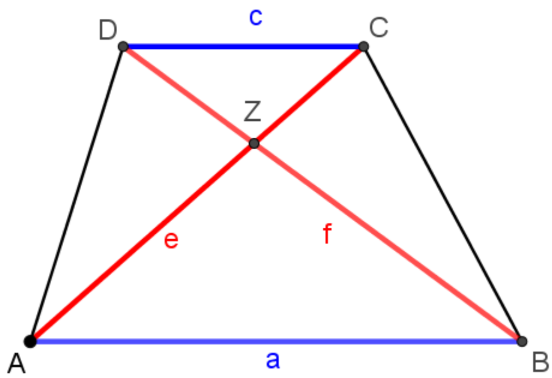
Demnach gilt auch

|AG| : |AC| = 1 : 2

Somit ist G der Mittelpunkt von AC. Analog geht man für H vor. Demnach sind die Schnittpunkte G und H der Mittelline mit den Diagonalen die Mittelpunkte der Diagonalen e bzw. f.

Übung 7:

Beweisen Sie[75]: Die Diagonalen schneiden einander im gleichen Verhältnis, nämlich wie c : a.



Lösung 7:

Aufgrund des 1. und des 2. Strahlensatzes gilt:

|ZC| : |ZA| = |ZD| : |ZB| = |DC| : |AB| = c : a

[75] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 7

7.1.1 Spezielle Trapeze

Spezielle Trapeze:

- gleichschenkliges Trapez: achsensymmetrisch
- rechtwinkliges Trapez: ein rechter Winkel
- Parallelogramm: zwei Paar paralleler Seiten
- Rhombus: zwei Paar paralleler und gleich langer Seiten
- Rechteck: zwei rechte Winkel
- Quadrat: zwei rechte Winkel und gleich lange Seiten

Keine Trapeze:

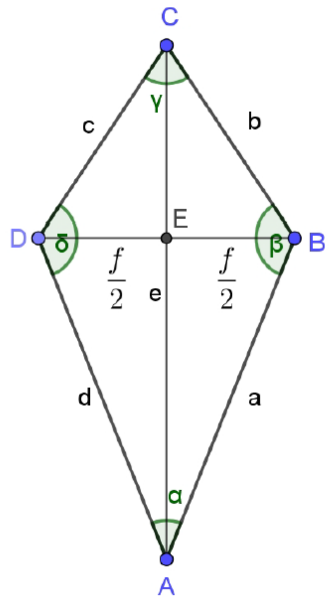
- allgemeines Drachenviereck

[76]

[76] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 8

7.2 Drachenviereck

Ein Drachenviereck ist ein Viereck, bei dem eine Diagonale Symmetrieachse ist.



Eigenschaften:

- $c = b, d = a$
- $\beta = \delta$
- $AC \perp DB$.
- AC halbiert α und γ.
- E halbiert DB.

[77]

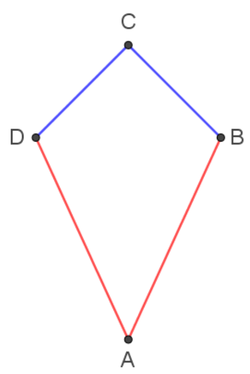
7.2.1 Drachenviereck-Kriterium

Ein Viereck ist genau dann ein Drachenviereck, wenn es zwei disjunkte Paare gleich langer benachbarter Seiten besitzt.

[78]

Übung 1:

Beweisen Sie das Drachenviereck-Kriterium.



Beachten Sie, dass es bei „genau dann“ zwei Richtungen gibt:

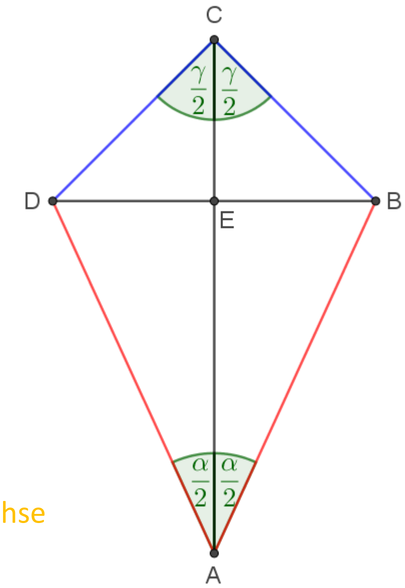
„⇒“: Zwei disjunkte Paare gleich langer benachbarter Seiten ⇒ Drachenviereck

„⇐“: Drachenviereck ⇒ Zwei disjunkte Paare gleich langer benachbarter Seiten

[77] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 11
[78] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 12

Lösung:

„⇒“: Man zeichne die Winkelhalbierende von γ und die Winkelhalbierende von α.



Auf beiden liegt der Punkt E, der gleichweit weg von D und B ist. Somit liegen die Winkelhalbierenden aufeinander.

Nach Kongruenzsatz sws sind die Dreiecke △DEC und △EBC kongruent. Somit gilt:

∡CED ≅ ∡BEC = 90°

|DE| = |EB|

Daher ist die Winkelhalbierende von γ bzw. α eine Symmetrieachse und das Viereck ABCD ein Drachenviereck.

„⇐“: Das Viereck ABCD ist ein Drachenviereck. Somit besitzt es eine Symmetrieachse, die durch A und C geht und die beiden Winkel halbiert. Nach sws gilt:

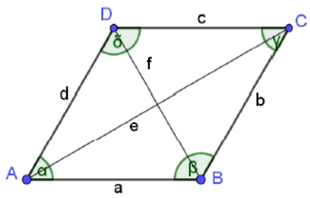
△DEC ≅ △EBC sowie △DAE ≅ △EAB. Somit ist |DC| = |CB| und |DA| = |AB|.

Das Viereck ABCD besitzt demnach zwei disjunkte Paare gleich langer benachbarter Seiten.

7.2.2 Spezielle Drachenvierecke

Spezielle Drachenvierecke:

- Rhombus: vier gleich lange Seiten



- Quadrat: vier gleich lange Seiten und vier gleich große Winkel

Keine Drachenvierecke:

- allgemeines Trapez
- allgemeines Parallelogramm
- allgemeines Rechteck

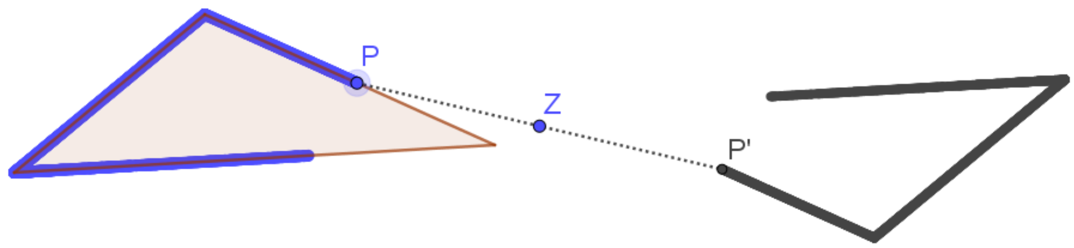
[79]

[79] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 13

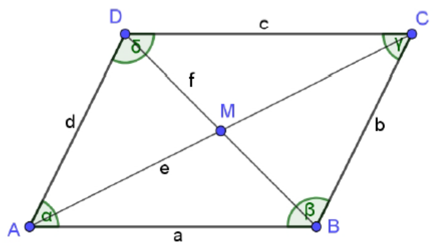
7.3 Punktspiegelung am Zentrum Z

- Abbildung der Ebene auf sich
- Für jeden Punkt P zeichne Strecke von P nach Z , verdopple die Strecke PZ und erhalte als Endpunkt den Bildpunkt P'.
- Es gilt $Z' = Z$.
- In der Ebene ist die Punktspiegelung am Zentrum Z gleichbedeutend mit einer Drehung um 180° um das Drehzentrum Z.
- Eine Figur, die bei Punktspiegelung in sich übergeht, heißt punktsymmetrisch.

[80]



7.4 Parallelogramm



Ein Viereck, bei dem je zwei Gegenseiten zueinander parallel sind, heißt Parallelogramm.

[81]

Übung 1: Zeigen Sie, dass die Dreiecke △ABC und △CDA kongruent sind.

---

[80] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 14
[81] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 16

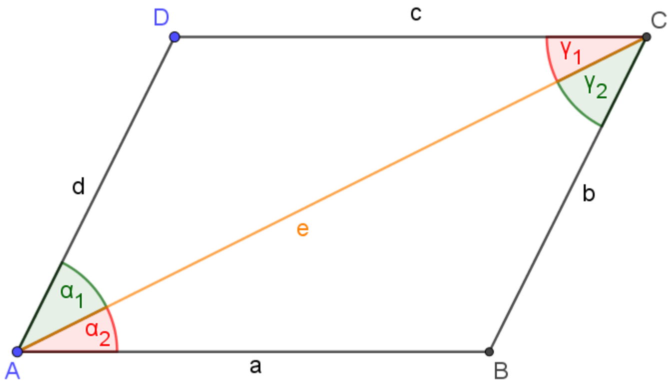
Lösung 1:

Es gilt:

$\alpha_1 \cong \gamma_2$ und $\alpha_2 \cong \gamma_1$
(Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)

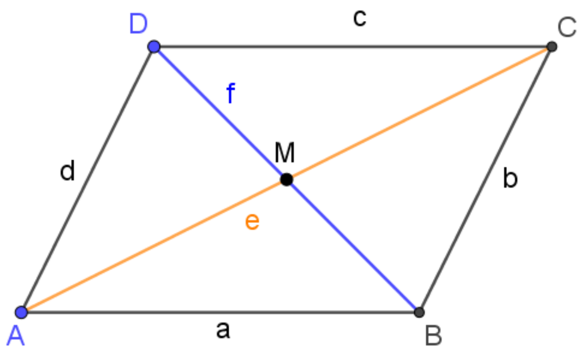
Die Dreiecke besitzen die gemeinsame Seite e.

Nach wsw sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$ kongruent.



Übung 2: Beweisen Sie:

Jedes Parallelogramm ist punktsymmetrisch mit dem Diagonalenschnittpunkt M als Symmetriezentrum. [82]



Lösung 2:

Beweis.

- $\triangle ABC \cong \triangle CDA \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle CDM$
- $\Rightarrow |AM| = |MC|, |BM| = |MD|.$

[82] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 16

7.4.1 1. Parallelogramm-Kriterium

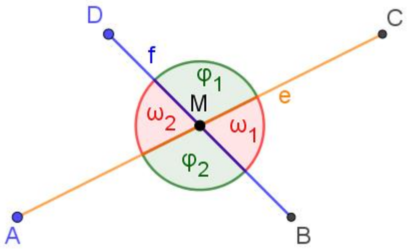
> *Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich die Diagonalen halbieren.*[83]

Übung 3: Beweisen Sie das 1. Parallelogramm-Kriterium.

Lösung 3:

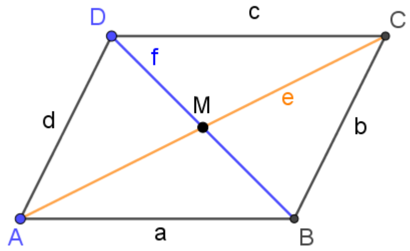
„⇒“: Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen. Das folgt aus der Punktsymmetrie.

„⇐“: Man betrachte folgende Abbildung:



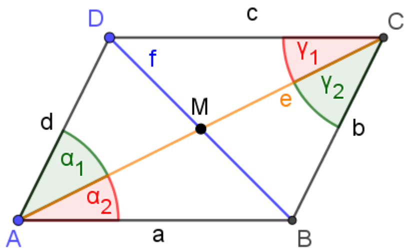
Es gilt: $|DM| = |MB|$ sowie $|AM| = |MC|$
(Die Diagonalen halbieren sich.)

Weiterhin gilt: $\varphi_1 \cong \varphi_2$ sowie $\omega_1 \cong \omega_2$
(Scheitelwinkel)



Nach sws gilt:

$\triangle ABM \cong \triangle CDM$ sowie $\triangle BCM \cong \triangle AMD$



Dann gilt auch:

$\alpha_1 \cong \gamma_2$ und $\alpha_2 \cong \gamma_1$

Somit ist d parallel zu b und a ist parallel zu c (siehe Wechselwinkel S. 18).

[83] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 17

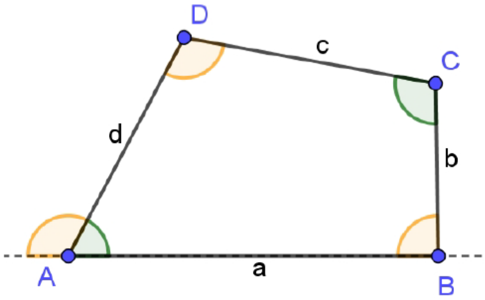
7.4.2 2. Parallelogramm-Kriterium

Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn **je** *zwei Gegenwinkel kongruent sind.*

Beweis.

$\Rightarrow$ Im Parallelogramm gilt $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$. Das folgt aus der Punktsymmetrie.

$\Leftarrow$ Je zwei Gegenwinkel seien kongruent (Bild). Dann gilt $2\alpha + 2\beta = 360°$. Also sind α und β Nebenwinkel. Nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes ist $b \| d$. Analog für $a \| c$.



[84]

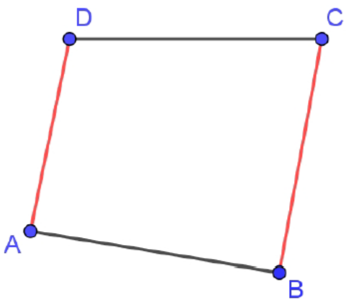
7.4.3 3. Parallelogramm-Kriterium

Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn **je** *zwei Gegenseiten kongruent sind.*

Beweis.

$\Rightarrow$ In einem Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten kongruent.

$\Leftarrow$ Gegeben sei ein Viereck mit je zwei kongruenten Gegenseiten.



- Hilfslinie?
- $\triangle ABC \cong \triangle ACD$

[84] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 18 und S. 19

7.4.4 4. Parallelogramm-Kriterium

Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn zwei Gegenseiten kongruent und parallel sind. [85]

Übung 4: Beweisen Sie das 4. Parallelogramm-Kriterium.

Lösung 4:

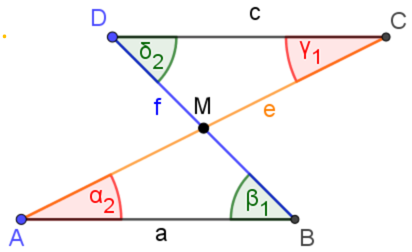
„⇒“: Zu zeigen: Parallelogramm ⇒ Zwei Gegenseiten sind kongruent und parallel.

Beweis: Jedes Parallelogramm ist punktsymmetrisch
⇒ Zwei Gegenseiten sind kongruent und parallel.

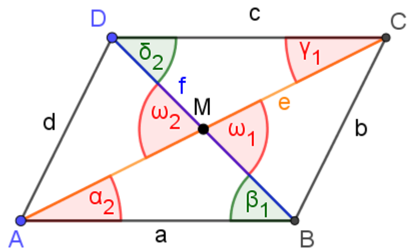
„⇐“: Zu zeigen: Zwei Gegenseiten sind kongruent und parallel. ⇒ Parallelogramm

Beweis: Zwei Gegenseiten sind kongruent und parallel.

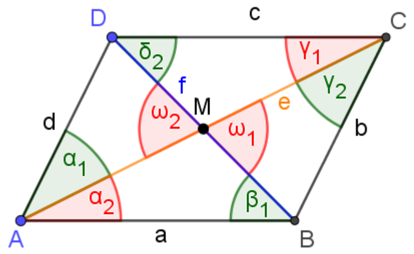
⇒ $\alpha_2 \cong \gamma_1$ und $\beta_1 \cong \delta_2$
⇒ $\triangle$ABM ≅ CDM (nach wsw)



$\omega_1 \cong \omega_2$ (Scheitelwinkel)
⇒ $\triangle$AMD ≅ CMB (nach sws)



⇒ $\alpha_1 \cong \gamma_2$
⇒ d ist parallel zu b
(siehe Wechselwinkel S. 18).



---

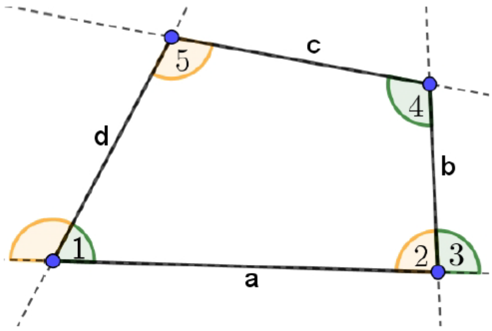
[85] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 20

7.4.5 5. Parallelogramm-Kriterium

Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn je zwei benachbarte Winkel Nebenwinkel sind, d.h. wenn gilt $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

Beweis.

- $\Rightarrow$ Im Parallelogramm sind nach dem Stufenwinkelsatz je zwei benachbarte Winkel Nebenwinkel.
- $\Leftarrow$ Kommentieren Sie die nebenstehende Zeichnung und folgern Sie, dass je zwei Gegenwinkel kongruent sind. Wenden Sie dann P-Kriterium 2 an.

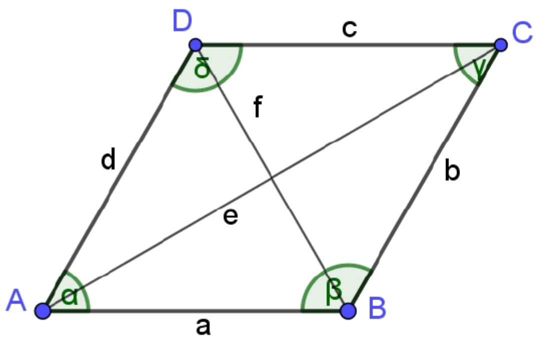


[86]

86 Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 21

7.5 Rhombus (Raute)

Ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten heißt Rhombus oder Raute.



Eigenschaften:

- $AB \| CD$, $BC \| AD$
- $a = b = c = d$
- $\alpha = \gamma, \beta = \delta$
- $\alpha + \delta = 180°$
- Die Diagonalen halbieren einander.

der Rhombus

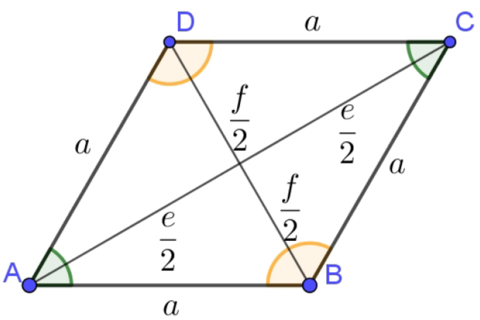
[87]

Übung 1: Zeigen Sie:

Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und sind folglich Symmetrieachsen.

[88]

Lösung 1:



Die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle BCD$ sind gleichschenklig und folglich ist die Seitenhalbierende AC gleich der Mittelsenkrechten. Dasselbe gilt für das andere Dreieckspaar. Also stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und sind Symmetrieachsen.

---

[87] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 22

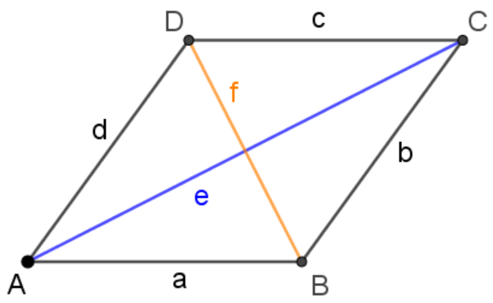
[88] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 23

7.5.1 1. Rhombus-Kriterium

Ein Viereck ist genau dann ein Rhombus, wenn alle vier Seiten gleich lang sind.[89]

Übung 2:

Beweisen Sie das 1. Rhombus-Kriterium.



Tipp:

Beachten Sie, dass zwei Richtungen zu beweisen sind:

„⇒“: Zu zeigen: Rhombus ⇒ Alle vier Seiten sind gleich lang.

„⇐“: Zu zeigen: Alle vier Seiten sind gleich lang. ⇒ Rhombus
(Es bleibt also zu zeigen, dass ein Viereck mit vier gleich langen Seiten ein Parallelogramm ist.)

[89] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 24

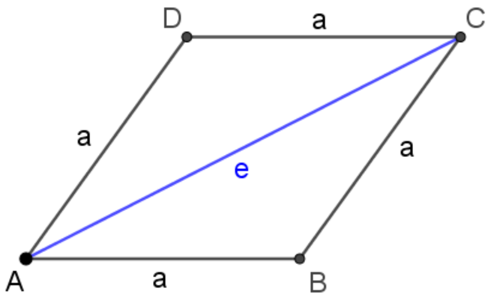
Lösung 2:

„⇒“: Zu zeigen: Rhombus ⇒ Alle vier Seiten sind gleich lang.

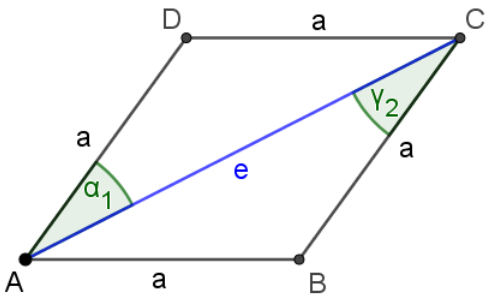
Beweis: Ein Rhombus ist per Definition ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten. ⇒ Alle vier Seiten sind gleich lang.

„⇐“: Zu zeigen: Alle vier Seiten sind gleich lang. ⇒ Rhombus
(Es bleibt also zu zeigen, dass ein Viereck mit vier gleich langen Seiten ein Parallelogramm ist.)

Beweis: Man betrachte das Viereck ABCD, bei dem alle vier Seiten gleich lang sind und die Diagonale e:



Die Dreiecke △ABC und △ACD sind gleichschenklig und nach sss kongruent. Somit gilt: $\alpha_1 \cong \gamma_2$



Da α_1 und γ_2 kongruente Wechselwinkel sind, sind AD und BC parallel (siehe Wechselwinkel, S. 18).

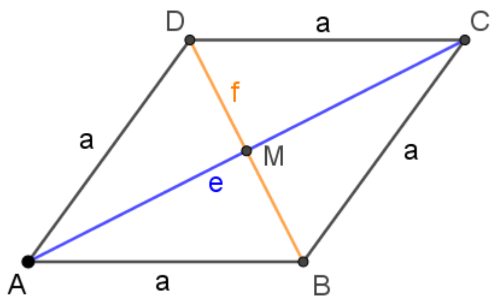
Analog zeigt man, dass AB und DC parallel sind.

Somit besitzt das Viereck ABCD vier gleich lange Seiten, die paarweise parallel sind, und ist daher ein Rhombus.

7.5.2 2. Rhombus-Kriterium

Ein Viereck ist genau dann ein Rhombus, wenn sich die Diagonalen senkrecht halbieren. [90]

Übung 3:
Beweisen Sie das 2. Rhombus-Kriterium.



Tipp:

Beachten Sie, dass zwei Richtungen zu beweisen sind:

„⇒“: Zu zeigen: Rhombus ⇒ Diagonalen halbieren sich senkrecht.

„⇐“: Zu zeigen: Diagonalen halbieren sich senkrecht ⇒ Rhombus
(Es ist also zu zeigen, dass ein Viereck, bei dem sich die Diagonalen senkrecht halbieren, vier gleich lange Seiten hat und somit ein Rhombus ist)

Lösung 3:

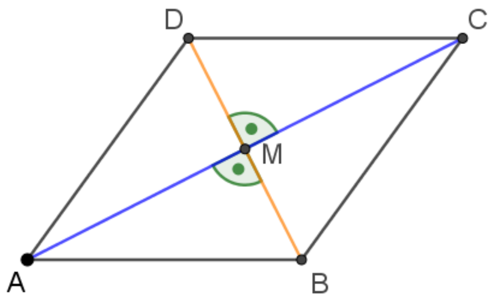
„⇒“: Zu zeigen: Rhombus ⇒ Diagonalen halbieren sich senkrecht.
Beweis: In Übung 1 (siehe S. 103) wurde gezeigt, dass die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und Symmetrieachsen sind. Somit halbieren sie sich.

[90] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 25

„⇐“: Zu zeigen: Diagonalen halbieren sich senkrecht ⇒ Rhombus

(Es ist also zu zeigen, dass ein Viereck, bei dem sich die Diagonalen senkrecht halbieren, vier gleich lange Seiten hat und somit ein Rhombus ist.)

Beweis: Man betrachte folgende Abbildung:



Es gilt: |DM| = |MB| (Diagonalen halbieren sich)

|AM| = |MC| (Diagonalen halbieren sich)

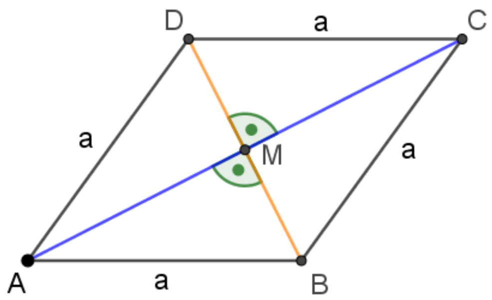
∡AMB ≅ ∡CMD = 90°

Nach sws sind die Dreiecke △ABM und △CDM kongruent.

Analog zeigt man, dass die Dreiecke △AMD und △CMB kongruent sind.

Weil die Diagonalen Symmetrieachsen sind, sind auch die Dreiecke △ABM und △CMB kongruent.

Somit sind alle vier betrachteten Dreiecke kongruent und besitzen die Außenseite a:

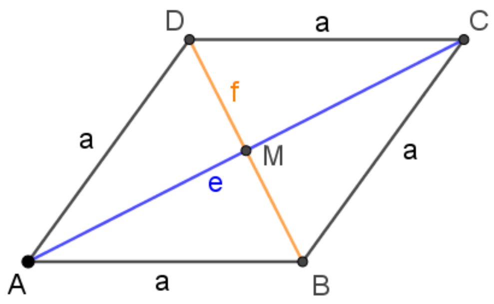


7.5.3 3. Rhombus-Kriterium

Ein Viereck ist genau dann ein Rhombus, wenn jede Diagonale Winkelhalbierende ist. [91]

Übung 4:

Beweisen Sie das 3. Rhombus-Kriterium.



Tipp:

Beachten Sie, dass zwei Richtungen zu beweisen sind:

„⇒“: Zu zeigen: Rhombus ⇒ Diagonalen sind Winkelhalbierende.

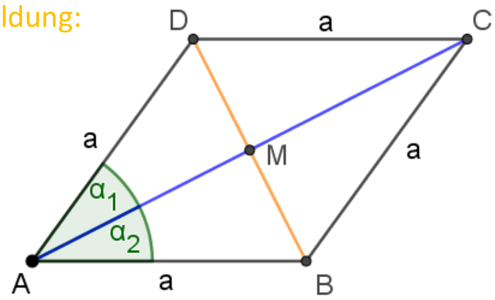
„⇐“: Zu zeigen: Diagonalen sind Winkelhalbierende ⇒ Rhombus
(Es ist also zu zeigen, dass ein Viereck, bei dem die Diagonalen Winkelhalbierende sind, vier gleich lange Seiten hat.)

[91] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 26

Lösung: 4

„⇒“: Zu zeigen: Rhombus ⇒ Diagonalen sind Winkelhalbierende.

Beweis: Man betrachte folgende Abbildung:



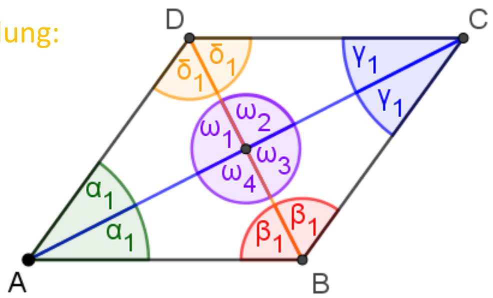
In Übung 3 (siehe S. 107) wurde bereits gezeigt, dass die Dreiecke △ABM, △AMD, △BCM und CDM kongruent sind. Somit gilt: $\alpha_1 \cong \alpha_2$. Also ist AC eine Winkelhalbierende.

Analog zeigt man, dass BD eine Winkelhalbierende ist.

„⇐“: Zu zeigen: Diagonalen sind Winkelhalbierende ⇒ Rhombus

(Es ist also zu zeigen, dass ein Viereck, bei dem die Diagonalen Winkelhalbierende sind, vier gleich lange Seiten hat.)

Beweis: Man betrachte folgende Abbildung:



Da die Diagonalen Winkelhalbierende sind, gilt $\alpha = \alpha_1 + \alpha_1$, $\beta = \beta_1 + \beta_1$ usw.

ω_2 und ω_4 sind Scheitelwinkel und somit kongruent, ebenso ω_1 und ω_3.

Aufgrund der Winkelsumme im Dreieck (und der Kongruenz von ω_2 und ω_4 bzw. ω_1 und ω_3, da Scheitelwinkel) gilt:

$\alpha_1 + \beta_1 + \omega_4 = \gamma_1 + \delta_1 + \omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1 + \delta_1$

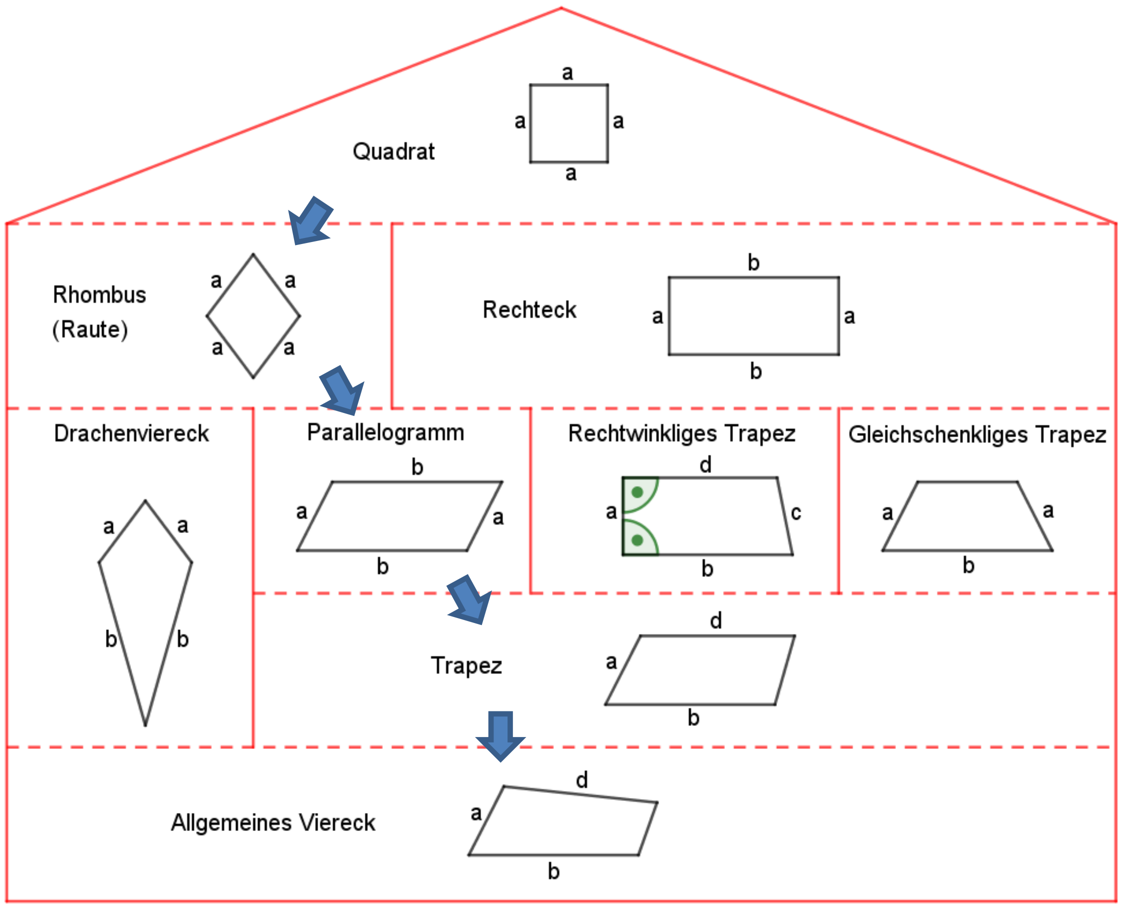
$\alpha_1 + \delta_1 + \omega_1 = \gamma_1 + \beta_1 + \omega_3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 + \delta_1 = \gamma_1 + \beta_1$

Addition der Gleichungen: $\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_1 + \delta_1 = \gamma_1 + \delta_1 + \gamma_1 + \beta_1$

$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \gamma_1$

Da die Basiswinkel der Dreiecke △ABC und △ACD gleich groß sind, sind sie gleichschenklig (siehe S. 43) und nach sws kongruent und besitzen daher als Außenseite die Seite a.

7.6 Haus der (konvexen) Vierecke



Quadrat: Ein Quadrat ist eine Raute mit einem rechten Winkel.

Rechteck: Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel.

Rhombus (Raute): Ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten heißt Rhombus oder Raute.

Parallelogramm: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich die Diagonalen halbieren.

Drachenviereck: Ein Drachenviereck ist ein Viereck, bei dem eine Diagonale eine Symmetrieachse ist.

Trapez: Ein Viereck mit zwei zueinander parallelen Seiten heißt Trapez.

Im Haus der Vierecke kommt in jeder Etage eine bestimmte Eigenschaft hinzu.
Durch die gestrichelten Linien wird z.B. symbolisiert: Jedes Quadrat ist ein Rhombus. Jeder Rhombus ist ein Parallelogramm. Jedes Parallelogramm ist ein Trapez und jedes Trapez ist ein allgemeines Viereck.
Somit ist jedes Quadrat ein allgemeines Viereck.
Umgekehrt gilt jedoch *nicht*: Jedes allgemeine Viereck ist ein Quadrat. (Nicht jedes allgemeine Viereck ist auch ein Quadrat.)

(Vergleiche S. 143)

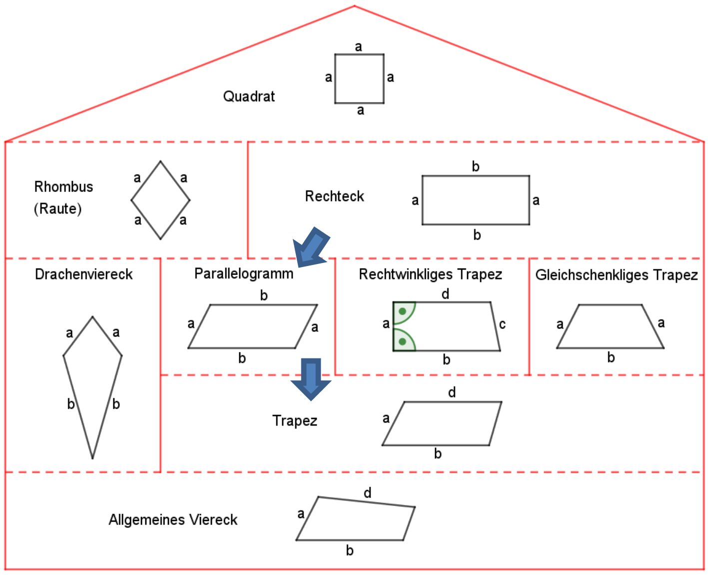
Übung 1:

Begründen Sie mit Hilfe der Definitionen oder Kriterien: Jedes Rechteck ist ein Trapez.

Lösung 1:

Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm (mit einem rechten Winkel).
Jedes Parallelogramm besitzt zwei kongruente und parallele Gegenseiten (4. Parallelogramm-Kriterium,siehe S. 101).

Somit ist es ein Trapez.



Übung 2:

Begründen Sie mit Hilfe der Definitionen oder Kriterien: Nicht jedes Trapez ist ein Rechteck.

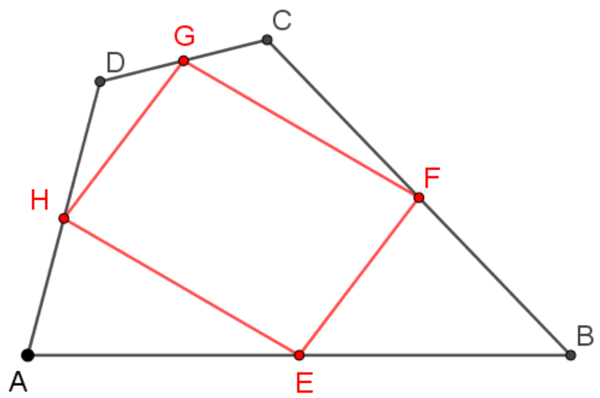
Lösung 2:

Begründung mit Hilfe eines Gegenbeispiels:

Man wähle ein Trapez, welches keinen rechten Winkel besitzt. Dieses kann kein Rechteck sein, weil ein Reckeck (mindestens) einen rechten Winkel besitzen muss.

7.7 Satz von Varignon

Das Seitenmittenviereck eines beliebigen Vierecks ist ein Parallelogramm. [92]



Übung 1:

Beweisen Sie den Satz von Varignon.

Tipp: Zeichnen Sie die Diagonalen ein.

[92] Warmuth, E.: 9.5. Haus der Vierecke, 2020, S. 34

Lösung 1:

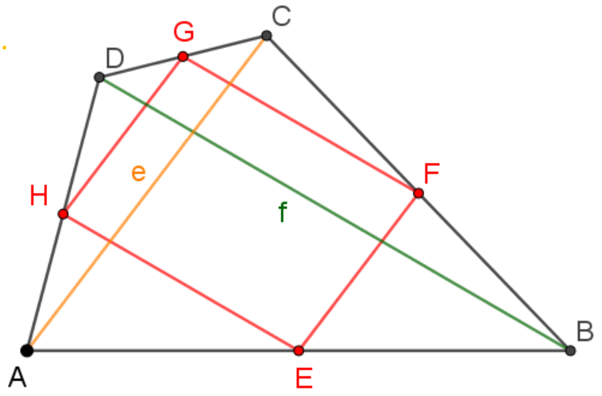
Man betrachte die Diagonale f und die Strecke HE.
Diese beiden sind parallel, weil gilt

|AH| : |AD| = 1 : 2 = |AE| : |AB|

(Siehe Strahlensätze, S. 78)

Analog ist f parallel zu GF.

Demnach ist HE parallel zu GF.



Analog zeigt man mit Hilfe der Diagonalen e, dass HG parallel zu EF ist.

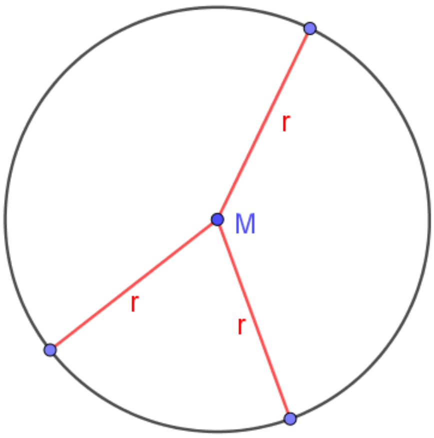
8 Rund um den Kreis

8.1 Grundbegriffe

8.1.1 Kreis – Kreisfläche und Kreislinie

- Die Kreislinie um M mit dem Radius r ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von M den Abstand r haben.
- Die Kreisfläche um M mit dem Radius r ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von M höchstens den Abstand r haben.

[93]



Bemerkungen:

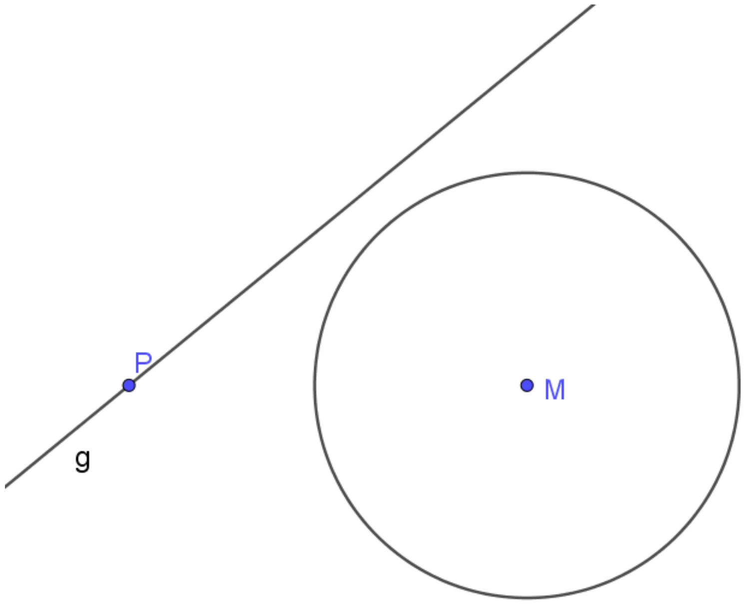
- *In der Schule ist mit Kreis in der Regel die Kreislinie gemeint. Aber: Flächeninhalt eines Kreises! Wir verwenden im Folgenden in der Regel den Begriff Kreis im Sinne von Kreislinie.*
- *Der doppelte Radius heißt Durchmesser d.*
- *Jede Strecke, die M mit einem beliebigen Punkt P der Kreislinie verbindet, wird ebenfalls als Radius bezeichnet; ebenso jede Verbindungsstrecke zweier Punkte der Kreislinie, die durch M geht, als Durchmesser.*

[93] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 3

Man betrachte im Folgenden einen Punkt P, der außerhalb des Kreises liegt und einen Kreis mit dem Mittelpunkt M. Weiterhin wird eine Gerade g betrachtet, die immer durch P verläuft, aber, je nach Fall, unterschiedlich bezeichnet wird.

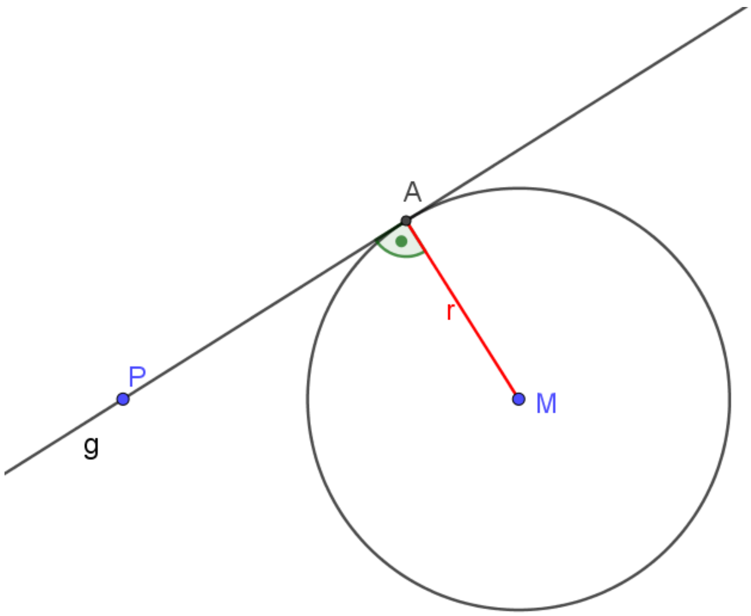
8.1.2 Passante

Die Gerade g wird als *Passante* bezeichnet. Sie besitzt keine gemeinsamen Punkte mit der Kreislinie.



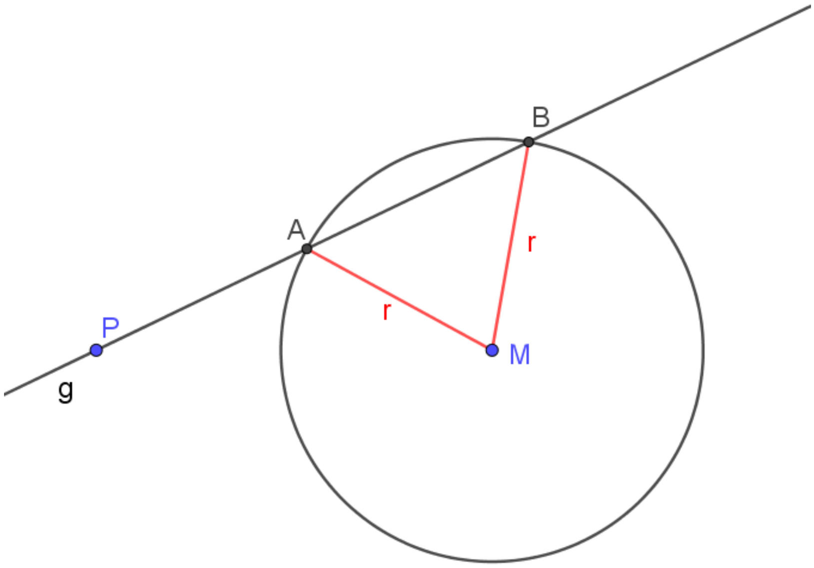
8.1.3 Tangente

Die Gerade g wird als *Tangente* bezeichnet. Sie besitzt genau einen gemeinsamen Punkt A mit der Kreislinie. AM wird als *Berührradius* der Tangente bezeichnet. AM und g stehen senkrecht zueinander.
(siehe auch S. 120)



8.1.4 Sekante und Sehne

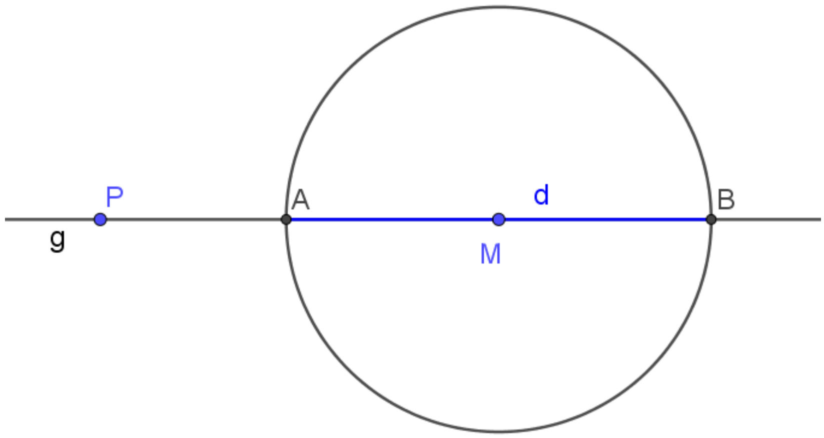
Die Gerade g wird als *Sekante* bezeichnet. Sie besitzt genau zwei gemeinsame Punkte A und B mit der Kreislinie. Die Strecke AB wird als *Sehne* bezeichnet.



8.1.5 Durchmesser

Wenn die Gerade g durch den Mittelpunkt M des Kreises verläuft, bezeichnet man die Strecke AB als *Durchmesser*.

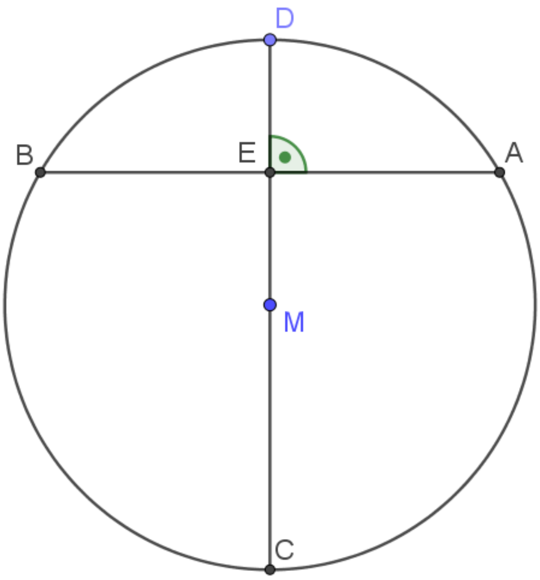
Es gilt: $|AB| = d = 2r$



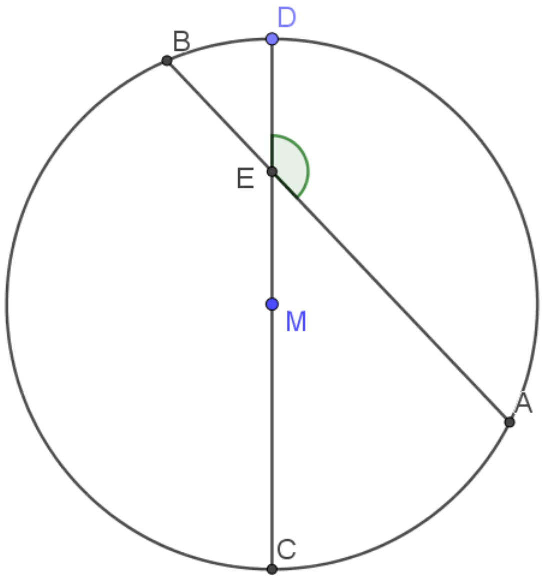
8.2 Satz (Durchmesser senkrecht auf Sehne)

Wenn ein Durchmesser eines Kreises senkrecht auf einer Sehne dieses Kreises steht, dann halbiert der Durchmesser die Sehne.[94]

Beispiel:
(Durchmesser halbiert die Sehne)



Gegenbeispiel:



Übung 1:

Beweisen Sie den Satz.

Tipp 1: Zeichnen Sie Hilfslinien.

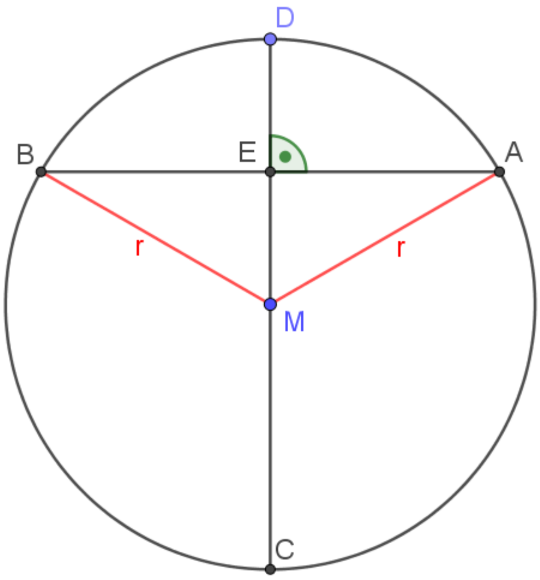
Tipp 2: Unterscheiden Sie zwischen zwei Fällen:

1. Fall: E ist nicht identisch mit M.
2. Fall: E ist identisch mit M.

[94] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 5

Lösung 1:

Man betrachte folgende Hilfslinien:



Beweis: 1. Fall: $E \neq M$

Weil $\measuredangle AED = 90°$, gilt auch: $\measuredangle MEA = \measuredangle BEM = 90°$.

Weiterhin gilt: $r = |BM| = |MA|$ und $|EM| = |EM|$.

Nach Ssw gilt: $\triangle BME \cong \triangle MAE$.

Somit ist $|BE| = |EA|$.

2. Fall: Es können keine Dreiecke betrachtet werden, weil $E = M$.

BA ist in diesem Fall jedoch der Durchmesser und es gilt: $|BE| = |EA| = r$.

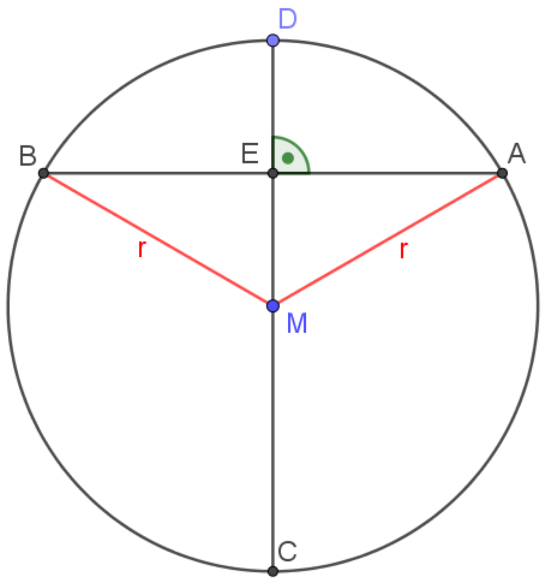
Übung 2:

Begründen Sie: Die Mittelsenkrechte einer Sehne eines Kreises verläuft durch den Mittelpunkt M. [95]

[95] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 6

Lösung 2:

Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten sind gleich weit von den Punkten A und B entfernt. Man wähle einen Punkt innerhalb des Kreises, der auf der Mittelsenkrechten liegt und gleichzeitig zum Punkt A die Entfernung r besitzt. Dann besitzt er auch zum B die Entfernung r. Somit kann es nur der Mittelpunkt M sein, da dies der einzige Punkt innerhalb des Kreises ist, der zu allen Punkten auf der Kreislinie die Entfernung r besitzt.



Übung 3:

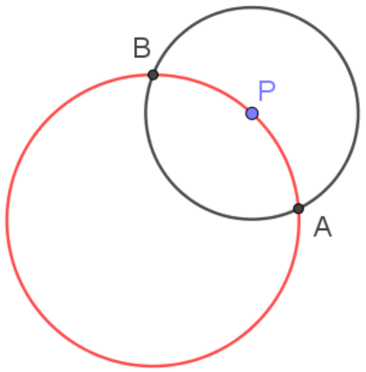
Gegeben sei ein Kreis. Geben Sie eine Konstruktion seines Mittelpunktes an. [96]

---

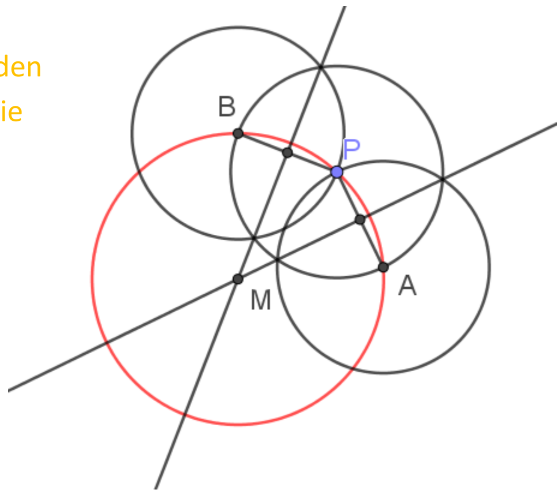
[96] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 6

Lösung 3:

Man Wähle einen Punkt P auf der Kreislinie und zeichne einen Kreis mit einem beliebigen Radius, sodass die Schnittpunkte A und B entstehen:

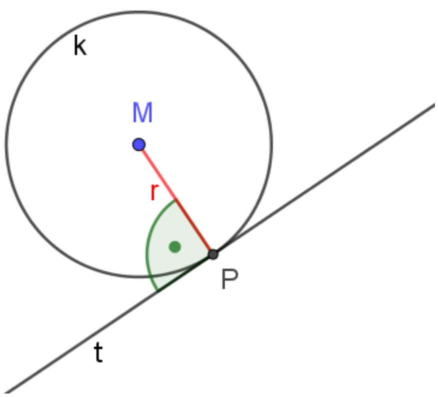


Man konstruiere die Mittelsenkrechten der Strecken BP und PA: Diese schneiden sich um Punkt M.
Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Kreises, weil er von den verschiedenen Punkte A, B und P, die alle auf der Kreislinie liegen, gleichweit entfernt ist.



8.3 Definition: Tangente

Eine Gerade t, die sich mit einem Kreis k in genau einem Punkt P schneidet, heißt Tangente an den Kreis im Punkt P. [97]



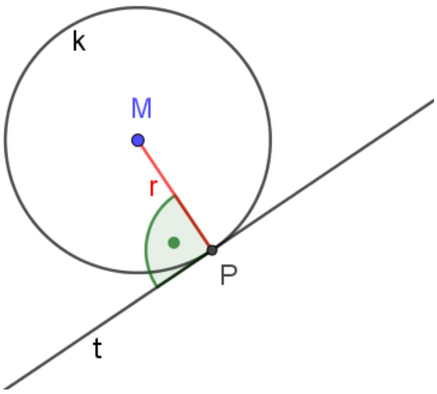
(siehe auch S. 115)

[97] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 7

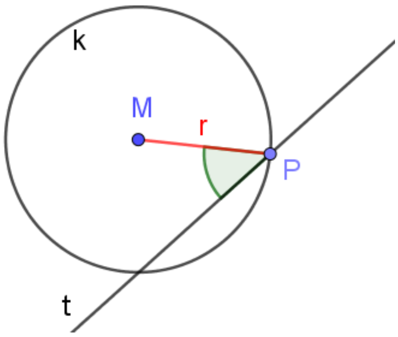
8.4 Satz (Tangente)

Eine Gerade t durch einen Punkt P des Kreises k ist genau dann Tangente an k, wenn der Radius MP senkrecht auf t steht. [98]

Beispiel (Tangente):



Gegenbeispiel (keine Tangente):



Übung 1: Beweisen Sie den Satz.

Hinweis:

Beachten Sie, dass zwei Richtungen zu beweisen sind:

„⇒“: Zu zeigen: t ist Tangente (genau ein Schnittpunkt). ⇒ Radius MP steht senkrecht auf t.

„⇐“: Zu zeigen: Radius MP steht senkrecht auf t. ⇒ t ist Tangente (genau ein Schnittpunkt).

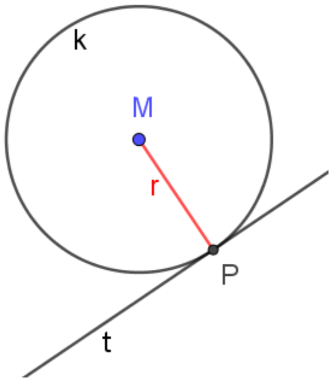
[98] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 7

Lösung 1:

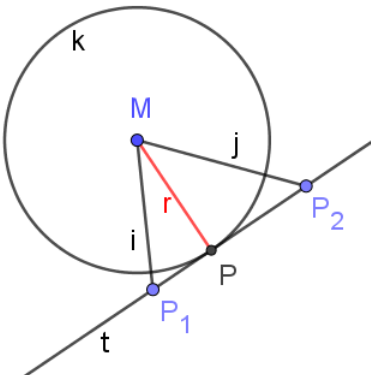
„⇒“: Zu zeigen: t ist Tangente (genau ein Schnittpunkt). ⇒ Radius MP steht senkrecht auf t.

Beweis: t ist Tangente

⇒ t schneidet (nach Definition) den Kreis k in genau einem Punkt:



⇒ alle anderen Punkte (z.B. P_1 und P_2) von t liegen *außerhalb* des Kreises k (denn sonst gäbe es *zwei* Schnittpunkte):



⇒ Nach der Dreiecksungleichung (siehe S. 10) ist MP die kürzeste Verbindung zwischen M und P.

⇒ P ist der Lotfußpunkt (siehe S. 12 und S. 37)

⇒ Radius MP steht senkrecht auf t.

„⇐“: Zu zeigen: Radius MP steht senkrecht auf t. ⇒ t ist Tangente (genau ein Schnittpunkt).

A ⇒ B

Beweis (ind.): ¬ (¬B ∧ A) ⇒ (A ⇒ B)

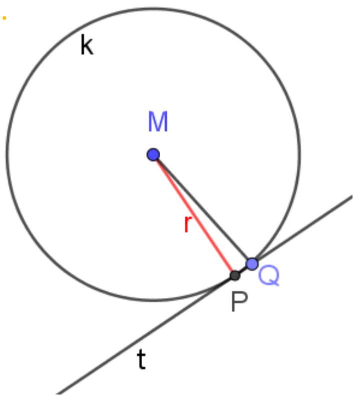
Annahme: (¬B ∧ A) ist wahr.

t ist keine Tangente und MP steht senkrecht auf t.

⇒ Es gibt einen zweiten *Schnitt*punkt Q:

Auch Q liegt auf dem Kreis k und der Geraden t.

(t ist schließlich keine Tangente ist):

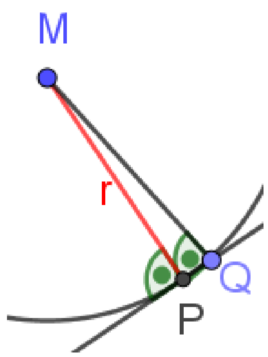


⇒ Das Dreieck △MPQ ist gleichschenklig

(da sowohl p als auch Q auf k liegen).

⇒ Die Basiswinkel sind gleich groß

und betragen beide 90°:



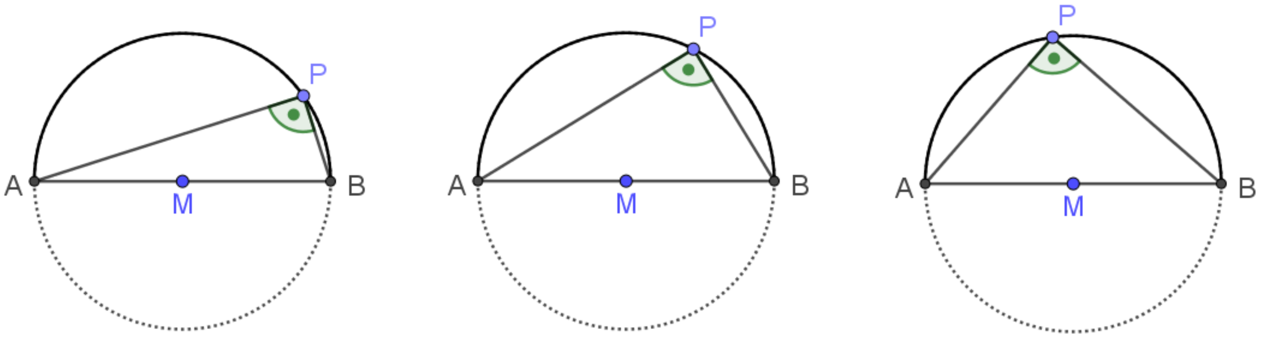
↯ Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.

Somit ist (¬B ∧ A) falsch und ¬ (¬B ∧ A) wahr.

⇒ (A ⇒ B)

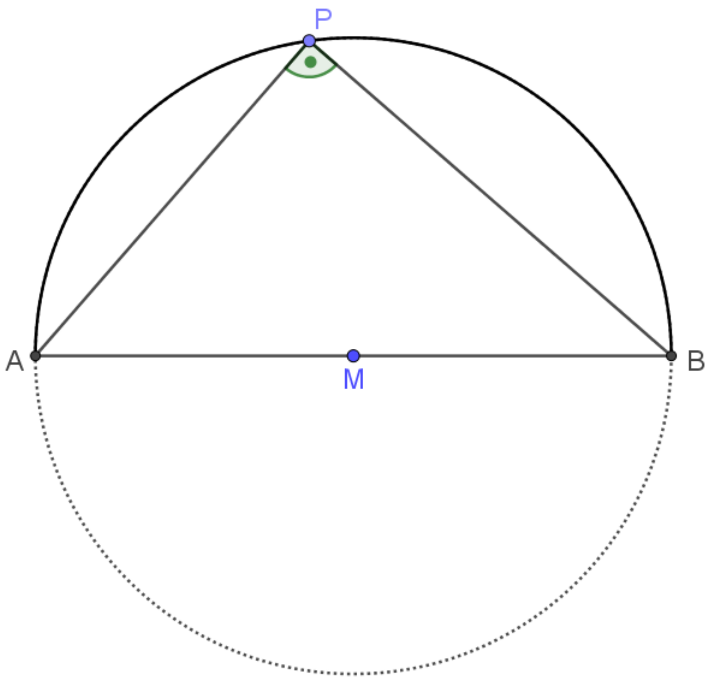
8.5 Satz des Thales

Im Kreis sind alle Winkel über einem Durchmesser rechte Winkel.[99]



Übung 1: Beweisen Sie den Satz des Thales.

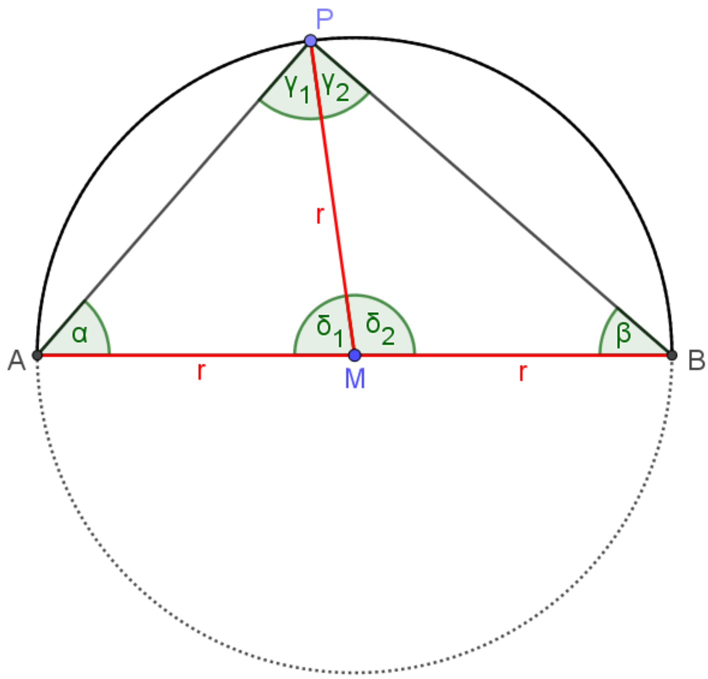
Tipp: Zeichnen Sie den Radius MP ein.



[99] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 8

Lösung:

Man betrachte folgende Abbildung:



Die Dreiecke △ AMP und △ MBP sind gleichschenklig, da jeweils zwei Seiten die Länge r besitzen.

$\Rightarrow \alpha \cong \gamma_1$ und $\beta \cong \gamma_2$

Weiterhin gilt:

$\delta_1 + \delta_2 = 180°$

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\alpha + \delta_1 + \gamma_1 = 180°$

$\delta_2 + \beta + \gamma_2 = 180°$

Nun wird eine Gleichung aufgestellt und umgeformt:

$\Rightarrow \quad (\alpha + \delta_1 + \gamma_1) + (\delta_2 + \beta + \gamma_2) = 360°$

$\Rightarrow \quad (\alpha + \gamma_1 + \delta_1) + (\delta_2 + \beta + \gamma_2) = 360° \quad | \ \alpha \cong \gamma_1$ und $\beta \cong \gamma_2$

$\Rightarrow \quad \gamma_1 + \gamma_1 + (\delta_1 + \delta_2) + \gamma_2 + \gamma_2 = 360° \quad | \ \delta_1 + \delta_2 = 180°$

$\Rightarrow \quad \gamma_1 + \gamma_1 + 180° + \gamma_2 + \gamma_2 = 360° \quad | \ - 180°$

$\Rightarrow \quad 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 180°$

$\Rightarrow \quad 2(\gamma_1 + \gamma_2) = 180° \quad | \ : 2$

$\Rightarrow \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 90°$

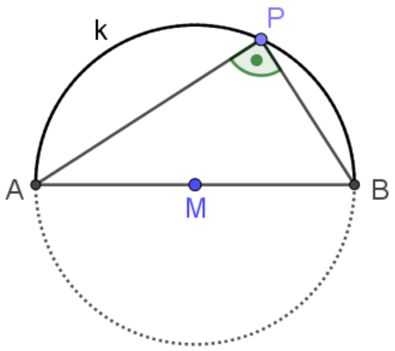
8.6 Umkehrung des Satzes des Thales

Der Satz des Thales lautete:

Im Kreis sind alle Winkel über einem Durchmesser rechte Winkel.

Dieser lässt sich auch anders formulieren:

Es sei AB ein Durchmesser eines Kreises k.
Wenn ein Punkt P auf dem Kreis k liegt, dann ist $|\measuredangle APB| = 90°$.



Übung 2: Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes des Thales.

Lösung 2: Umkehrung des Satzes des Thales

Es sei AB ein Durchmesser eines Kreises k und P ein Punkt mit $|\measuredangle APB| = 90°$. Dann liegt P auf k. [100]

Übung 3: Beweisen Sie die Umkehrung des Satzes des Thales.

[100] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 9

Lösung 3:

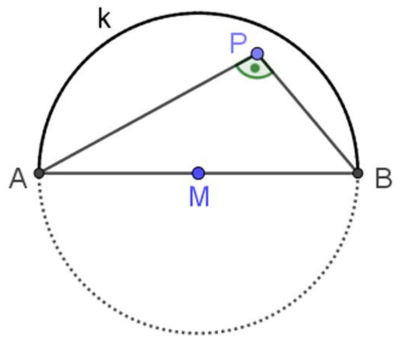
Zu zeigen: (Es sei AB ein Durchmesser eines Kreises k und P ein Punkt mit $|\measuredangle APB| = 90°$.) $\Rightarrow$ P liegt auf Kreis k.

A $\Rightarrow$ B

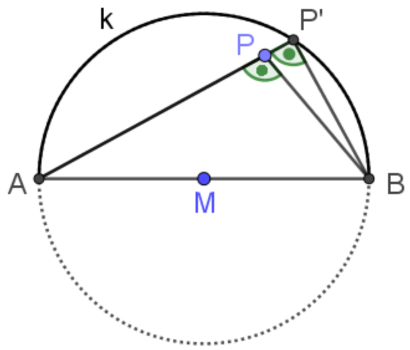
Beweis (ind.): ¬ (¬B ∧ A) ⇒ (A ⇒ B)

Annahme: (¬B ∧ A) ist wahr.

(P liegt nicht auf Kreis k) und (AB ist ein Durchmesser eines Kreises k und P ein Punkt mit $|\measuredangle APB| = 90°$.)



Man verlängere nun die Strecke AP, so dass ein Schnittpunkt P‘ mit dem Kreis k entsteht. Nach dem Satz des Thales wissen wir jedoch, dass hier ein rechter Winkel entsteht:



Somit hätte das Dreieck △PBP‘ zwei rechte Winkel.

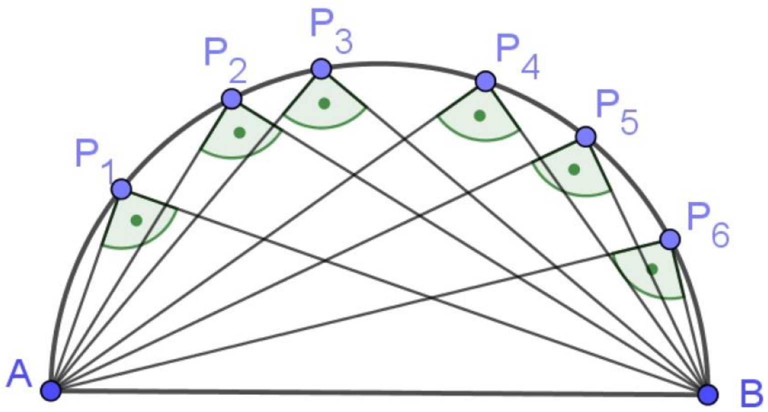
↯ Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.

Somit ist (¬B ∧ A) falsch und ¬ (¬B ∧ A) wahr.

⇒ (A ⇒ B)

Durch die Umkehrung des Thalessatzes ergibt sich:

Die Ortslinie aller Punkte, von denen aus eine Strecke AB unter einem Winkel von 90° erscheint, ist ein Kreis mit AB als Durchmesser.

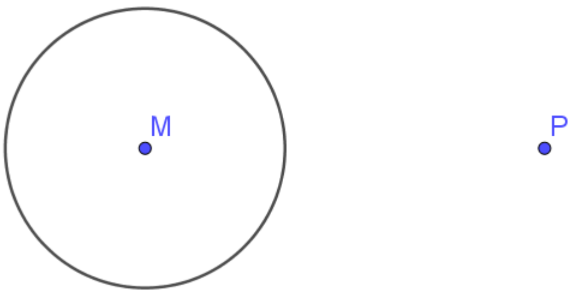


[101]

8.7 Konstruktion einer Tangente (Anwendung des Satzes des Thales)

Übung 4:

Konstruieren Sie die Tangenten an den Kreis, die durch den Punkt P verlaufen.

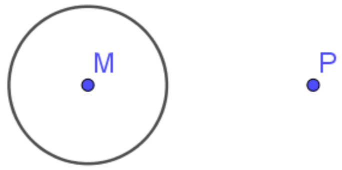


Tipp: Nutzen Sie den Satz des Thales.

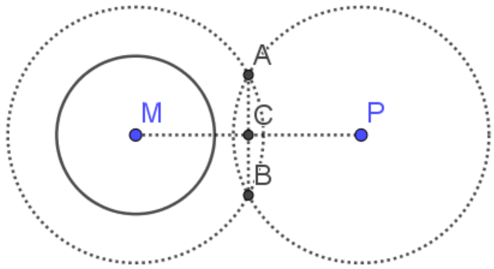
[101] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 10

Lösung 4:

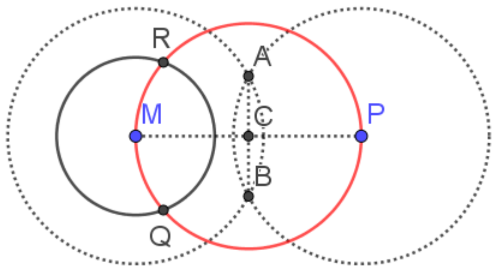
Ausgangssituation:



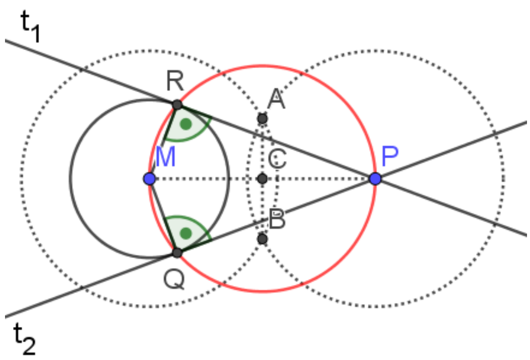
Konstruktion des Mittelpunktes C der Strecke MP.



Konstruktion des roten Kreises um C mit Radius |MC|.
Es ergeben sich die Schnittpunkte R und Q.

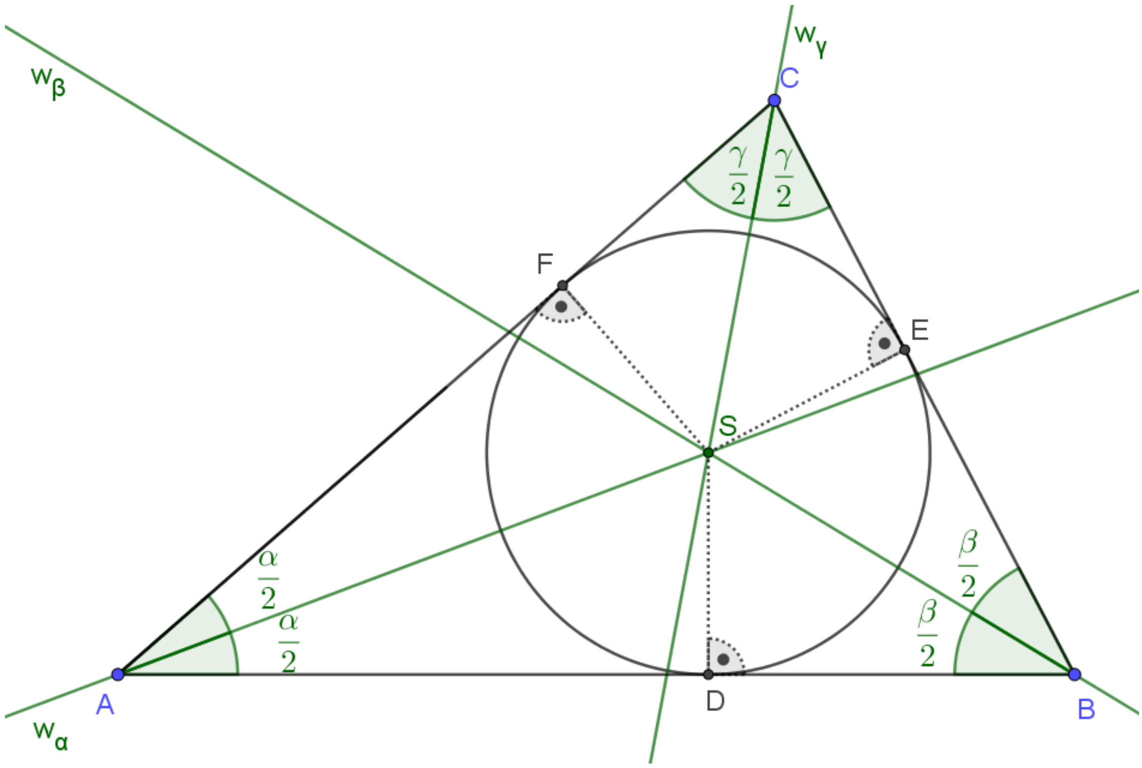


Nach dem Satz des Thales steht RM senkrecht
auf RP. Daher ist die Gerade t_1, die durch R und P geht, eine Tangente.
Analoges gilt für die Tangente t_2.



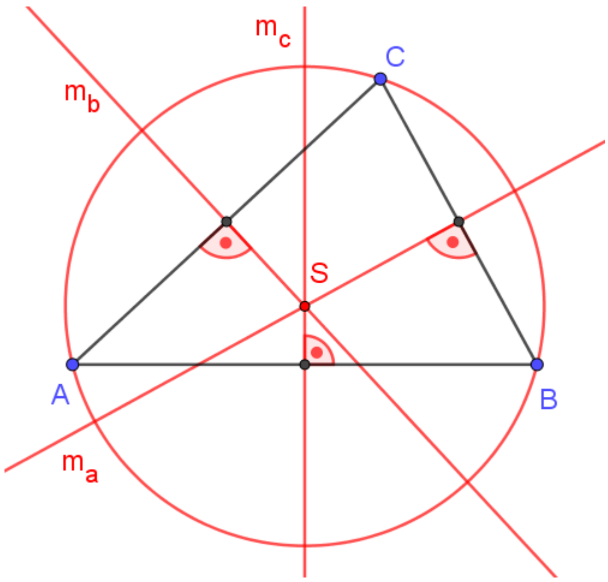
8.8 Wdh.: Inkreis eines Dreiecks

Erinnerung (siehe S. 61):



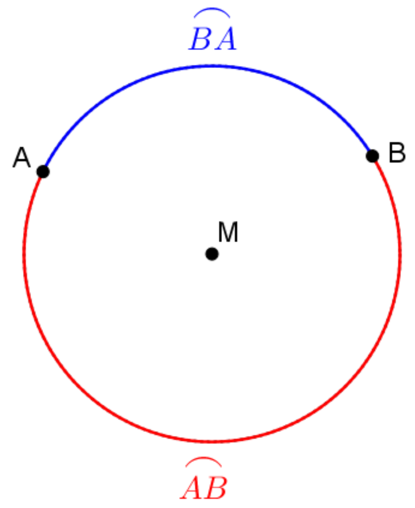
8.9 Wdh: Umkreis eines Dreiecks

Erinnerung (siehe S. 52):



8.10 Kreisbogen

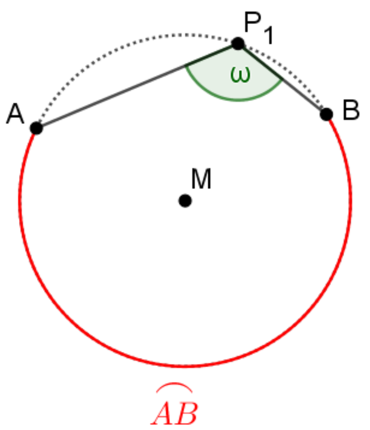
Zwei Punkte A und B eines Kreises zerlegen ihn in den Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ und in den Kreisbogen $\overset{\frown}{BA}$. Der Umlaufsinn ist entgegen dem Uhrzeigersinn.[102]



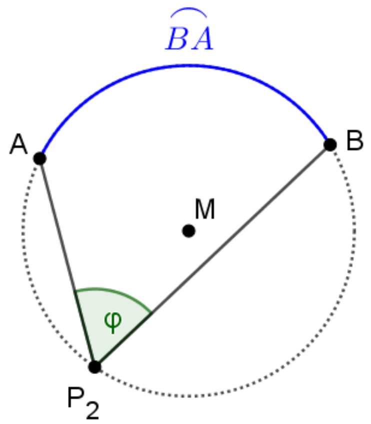
8.11 Peripheriewinkel (Umfangswinkel)

Die Winkel, deren Scheitel auf dem Kreisbogen außerhalb des Bogens liegen, heißen Peripheriewinkel (oder Umfangswinkel).

Der Winkel $\omega = \measuredangle AP_1B$ ist ein Peripheriewinkel zum Bogen $\overset{\frown}{AB}$.



Der Winkel $\varphi = \measuredangle BP_2A$ ist ein Peripheriewinkel zum Bogen $\overset{\frown}{BA}$.

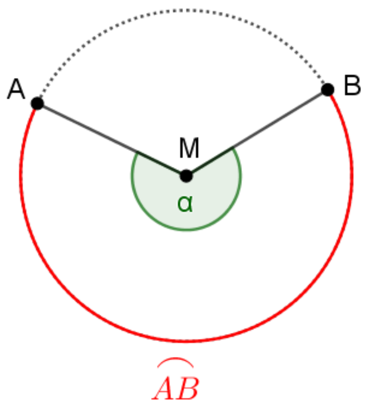


---

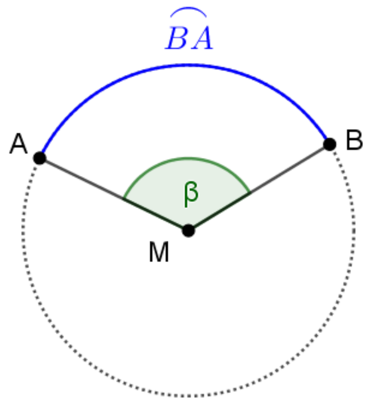
[102] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 14

8.12 Zentriwinkel (Mittelpunktswinkel)

Der Winkel $\alpha = \sphericalangle AMB$ heißt Zentriwinkel (oder Mittelpunktswinkel) über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$.



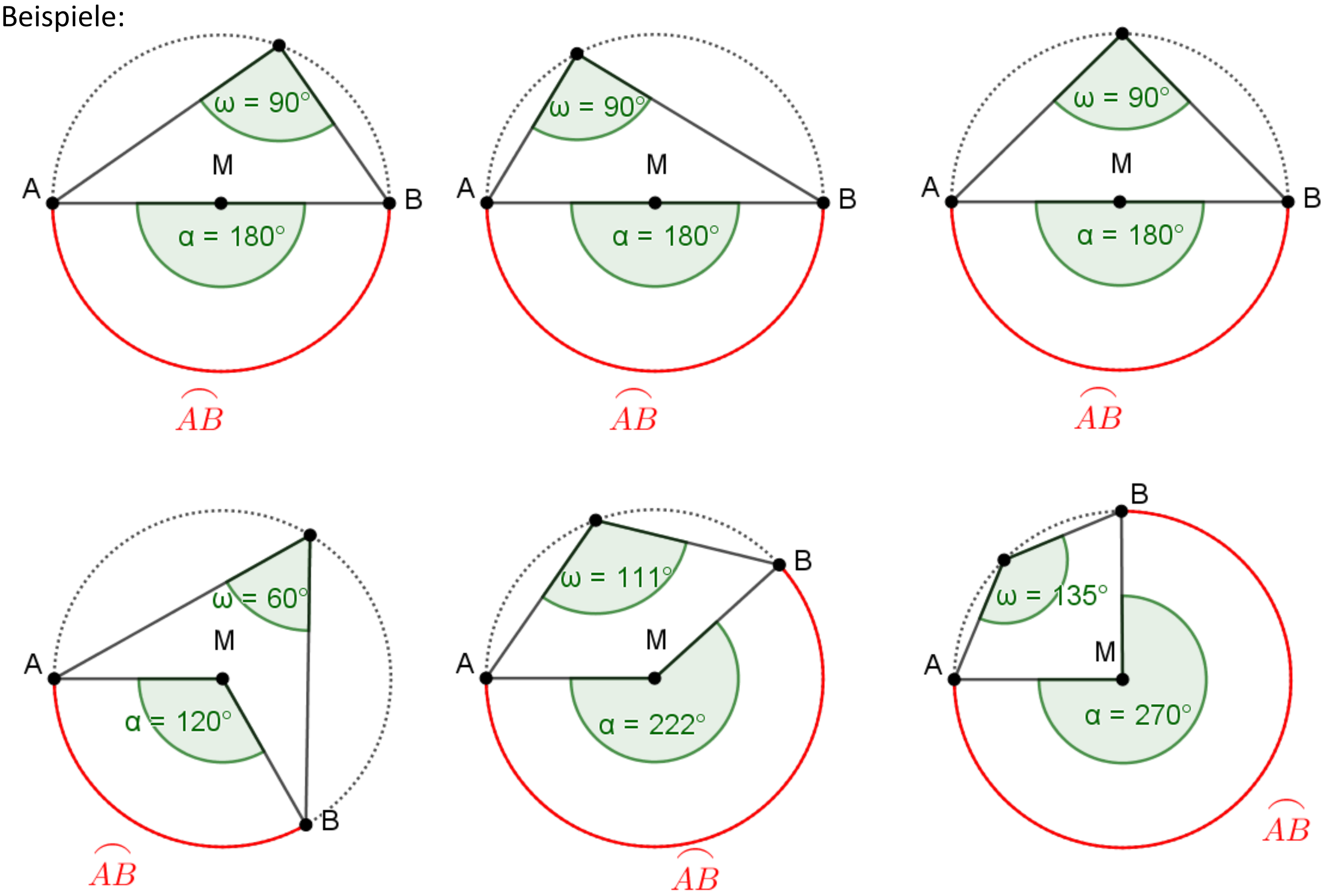
Der Winkel $\beta = \sphericalangle BMA$ heißt Zentriwinkel (oder Mittelpunktswinkel) über dem Bogen $\overset{\frown}{BA}$.



8.13 Satz (Zusammenhang zw. Zentriwinkel u. Peripheriewinkel)

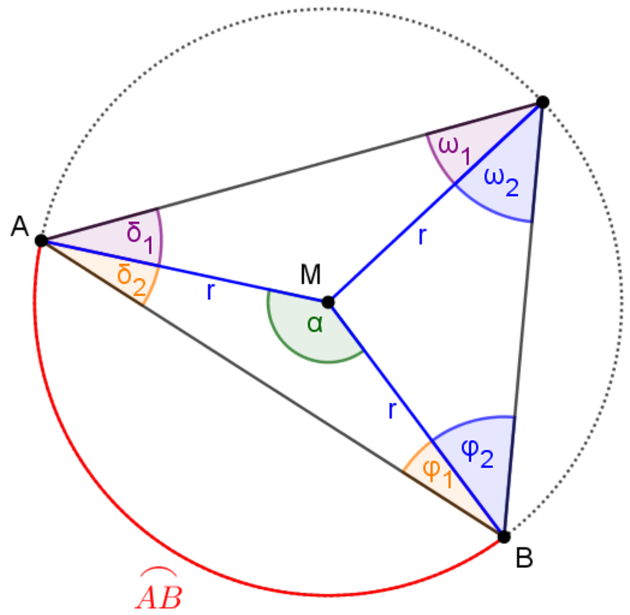
Der Zentriwinkel über einem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ ist doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel.

Beispiele:



Übung 1: Beweisen Sie obigen Satz.

Tipp 1: Verwenden Sie folgende Zeichnung:



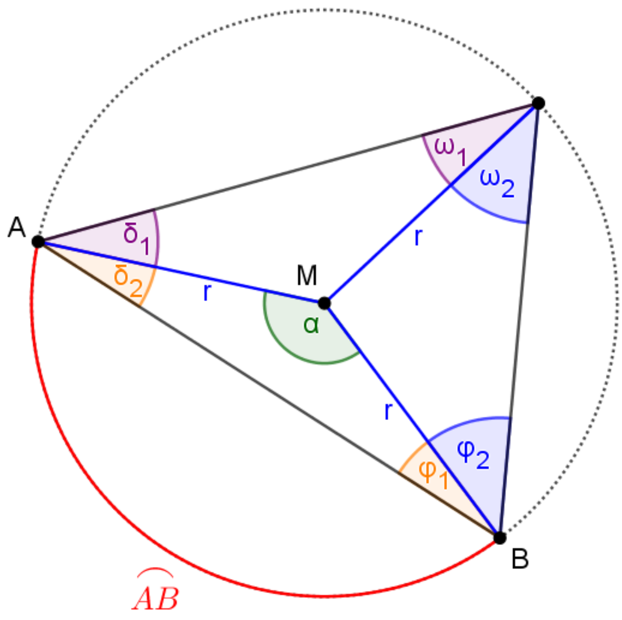
Tipp 2: Was ist zu zeigen?

Tipp 3: Welche Winkel sind warum kongruent?

Tipp 4: Stellen Sie Gleichungen auf.

Lösung 1:

Tipp 1: Verwenden Sie folgende Zeichnung:



Tipp 2: Was ist zu zeigen?

Antwort: $\alpha = 2(\omega_1 + \omega_2)$

Tipp 3: Welche Winkel sind warum kongruent?

Antwort: $\delta_1 \cong \omega_1$, $\delta_2 \cong \varphi_1$ und $\varphi_2 \cong \omega_2$ (weil es gleichschenklige Dreiecke sind)

Tipp 4: Stellen Sie Gleichungen auf.

$\alpha + \delta_2 + \varphi_1 = 180°$

$\Rightarrow \alpha + \varphi_1 + \varphi_1 = 180°$

$\Rightarrow \alpha + 2\varphi_1 = 180°$

$(\delta_1 + \delta_2) + (\omega_1 + \omega_2) + (\varphi_1 + \varphi_2) = 180°$

$\Rightarrow (\omega_1 + \varphi_1) + (\omega_1 + \omega_2) + (\varphi_1 + \omega_2) = 180°$

$\Rightarrow 2\varphi_1 + 2(\omega_1 + \omega_2) = 180°$

$\alpha + 2\varphi_1 = 2\varphi_1 + 2(\omega_1 + \omega_2)$

$\Rightarrow \alpha = 2(\omega_1 + \omega_2)$

Übung 2: Warum hat man gerade bewiesen, dass alle Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ gleich groß sind?

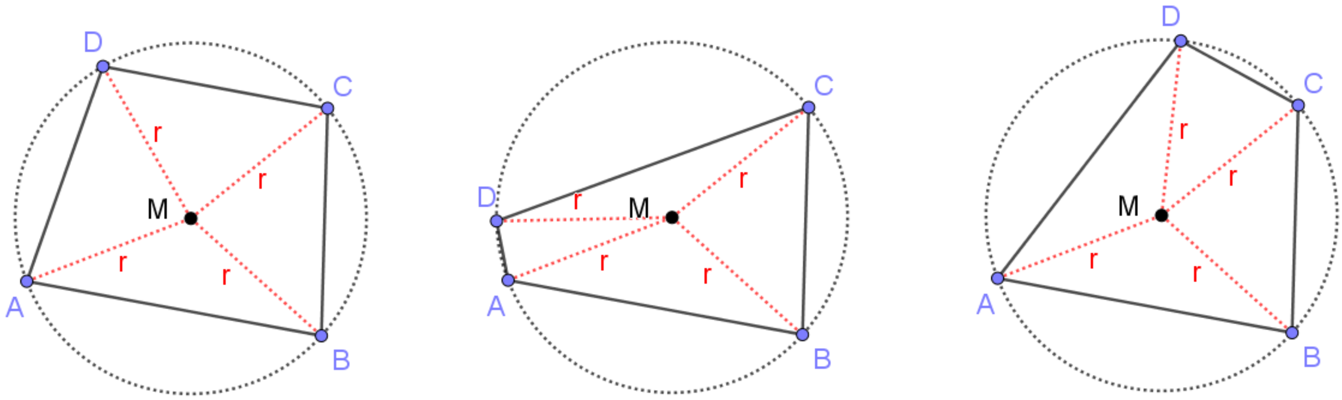
Lösung 2:

Weil *jeder* Peripheriewinkel genau halb so groß ist wie der Zentriwinkel.

8.14 Sehnenviereck

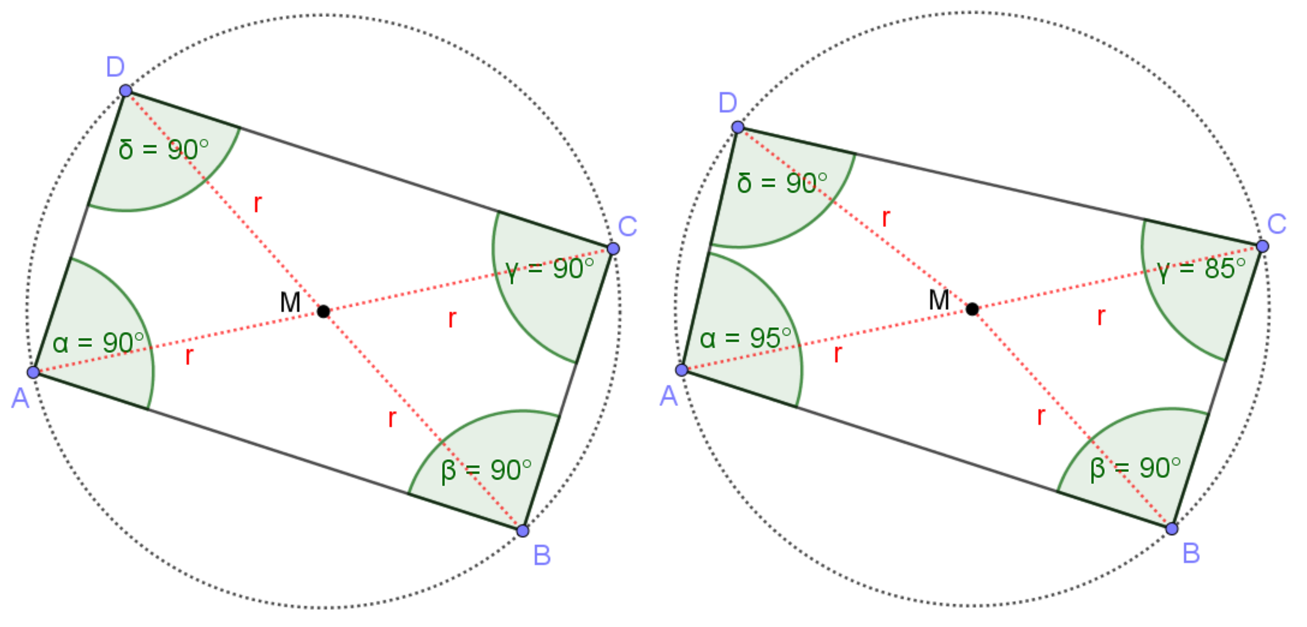
Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt Sehnenviereck.[103]

Beispiele:



Eigenschaft (per Definition): |AM| = |BM| = |CM| = |DM| = r

Übung 1: Stellen Sie eine Vermutung hinsichtlich des Zusammenhangs von Winkelgrößen auf:



[103] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 19

Lösung 1: Die Gegenwinkel ergänzen sich zu 180°.

8.15 Satz (Sehnenviereck / Gegenwinkel)

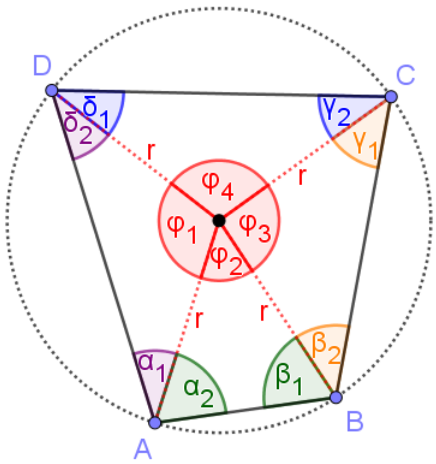
Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich zwei Gegenwinkel zu 180° ergänzen.[104]

Übung 2: Beweisen Sie obigen Satz.

Beachten Sie, dass zwei Richtungen zu beweisen sind:

„⇒“: Zu zeigen: Das Viereck ist ein Sehnenviereck. ⇒ Die Gegenwinkel ergänzen sich zu 180°.

Tipp: Nutzen Sie diese Zeichnung:



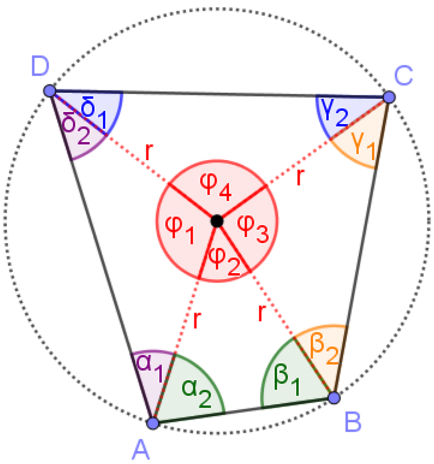
„⇐“: Zu zeigen: Die Gegenwinkel ergänzen sich zu 180°. ⇒ Das Viereck ist ein Sehnenviereck.

Tipp: Wählen Sie einen Widerspruchsbeweis.

[104] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 20

Lösung 2:

„⇒“: Zu zeigen: Das Viereck ist ein Sehnenviereck. ⇒ Die Gegenwinkel ergänzen sich zu 180°.



Beweis: $\delta_2 + \alpha_1 + \varphi_1 = 180°$ | gleichschenkl. Dreieck

⇒ $\alpha_1 + \alpha_1 + \varphi_1 = 180°$

⇒ $2\alpha_1 + \varphi_1 = 180°$ (1)

analog:

$2\alpha_2 + \varphi_2 = 180°$ (2)

$2\gamma_1 + \varphi_3 = 180°$ (3)

$2\gamma_2 + \varphi_4 = 180°$ (4)

Man addiere die Gleichungen (1), (2), (3) und (4):

⇒ $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2) + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = 4 \cdot 180°$

⇒ $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2) + 360° = 720°$ | - 360°

⇒ $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2) = 360°$ | : 2

⇒ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2) = 180°$

⇒ $\alpha + \gamma = 180°$

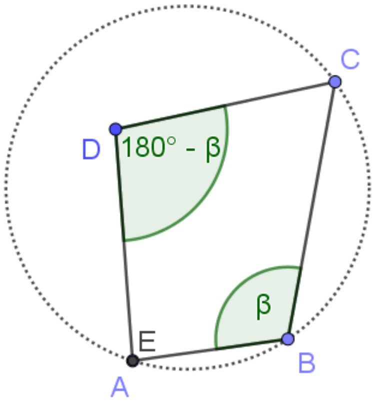
„⇐“: Zu zeigen: Die Gegenwinkel ergänzen sich zu 180°. ⇒ Das Viereck ist ein Sehnenviereck.

A ⇒ B

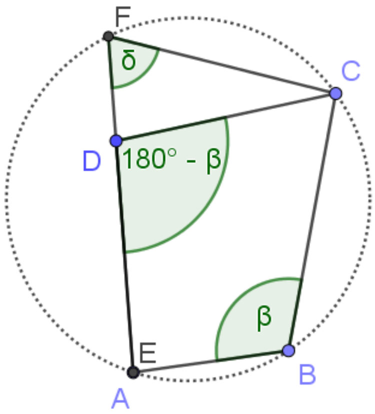
Beweis (ind.): ¬ (¬B ∧ A) ⇒ (A ⇒ B)

Annahme: (¬B ∧ A) ist wahr.

(Das Viereck ist *kein* Sehnenviereck) ∧ (Gegenwinkel ergänzen sich zu 180°.)
Es ergibt sich folgende Zeichnung:



Man verlängert die Strecke AD und
erhält den Schnittpunkt F sowie den Winkel δ:

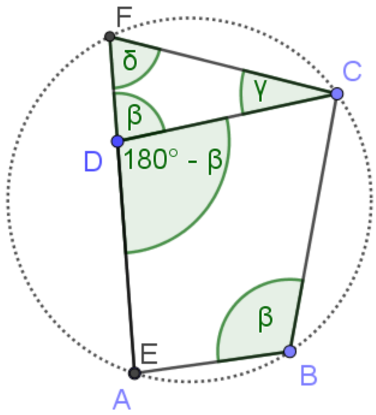


Weil das Viereck ABCF ein Sehnenviereck ist,
gilt: $\beta + \delta = 180° \Rightarrow \delta = 180° - \beta$

Für die Winkel im Dreieck △DCF gilt:
$\delta + \beta + \gamma = 180°$

$\Rightarrow 180° - \beta + \beta + \gamma = 180°$
$\Rightarrow 180° + \gamma = 180°$ ↯ (da $\gamma > 0$)

⇒ (¬B ∧ A) ist falsch ⇒ ¬ (¬B ∧ A) ist wahr.
⇒ (A ⇒ B)

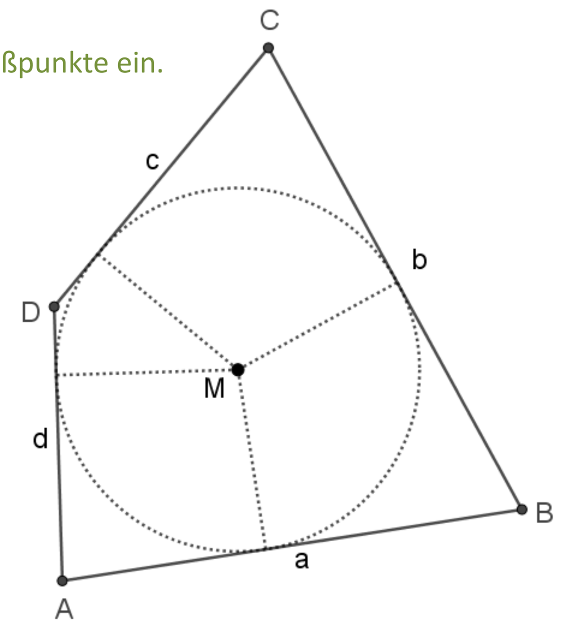


8.16 Tangentenviereck

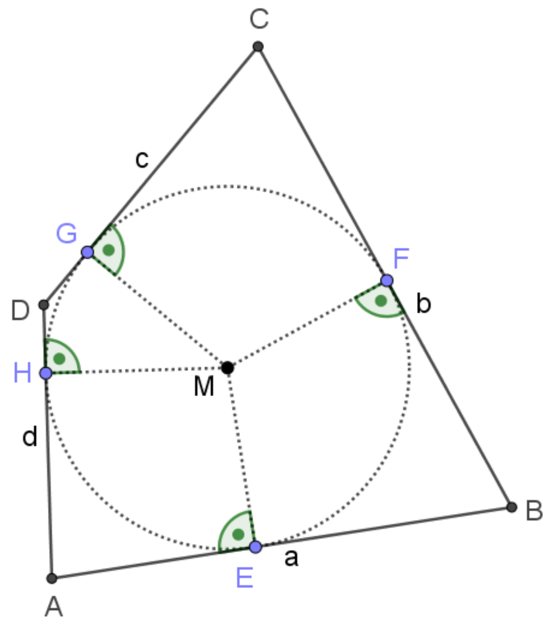
Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten an einen Kreis sind, heißt Tangentenviereck.[105]

Übung 1:

Zeichnen Sie rechte Winkel und Lotfußpunkte ein.



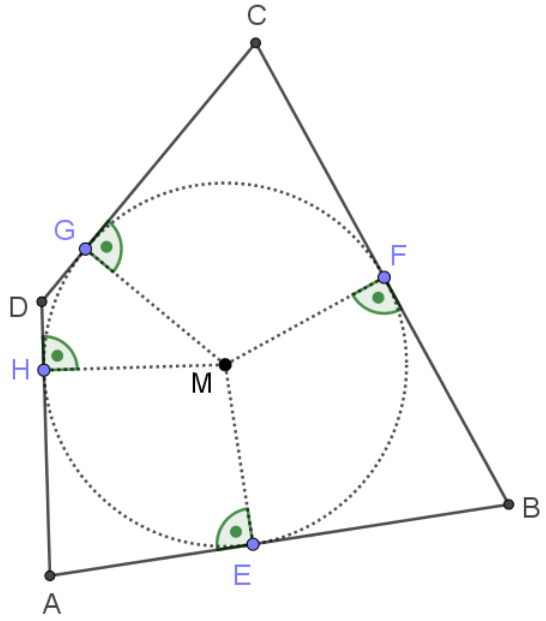
Lösung 1:



[105] Warmuth, E.: 9.6. Rund um den Kreis, 2020, S. 25

Übung 2:

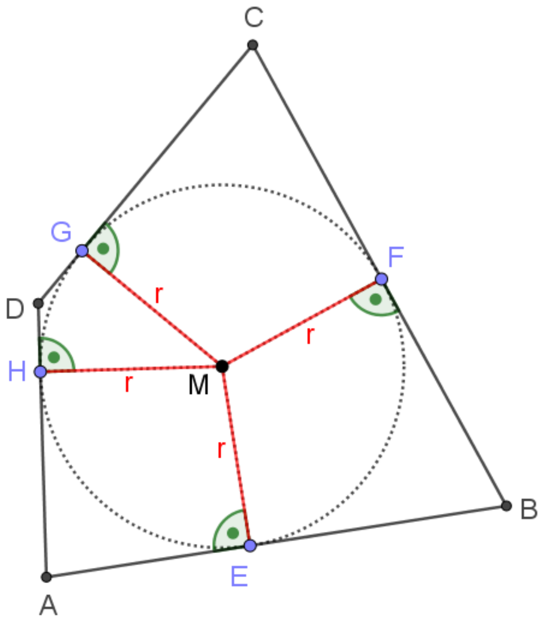
Welche Strecken haben die gleiche Länge? Begründen Sie.

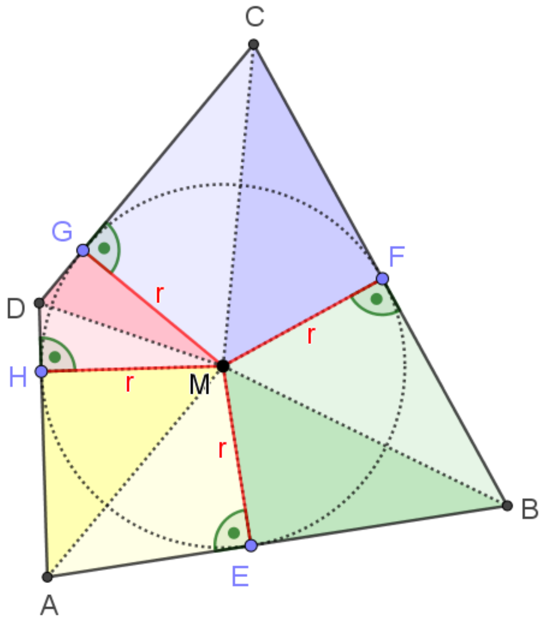


Lösung 2:

r = |EM| = |FM| = |GM| = |HM|

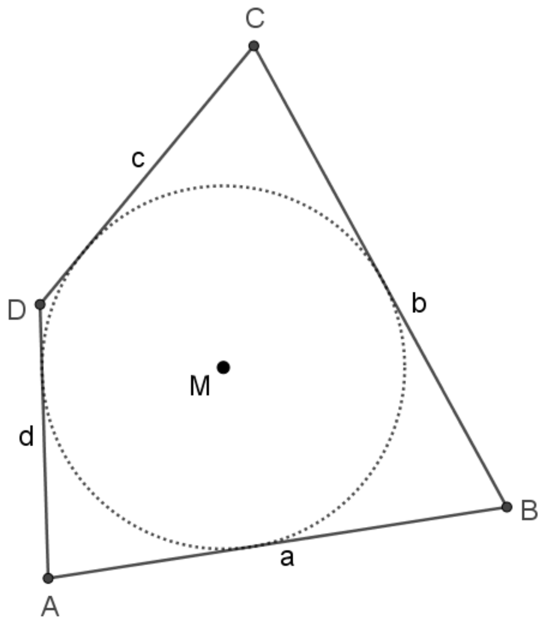
|AE| = |AH|
(gelbe Dreiecke sind kongruent nach Ssw)
analog: |BE| = |BF|, |CF| = |CG|, |HD| = |GD|





8.17 Satz: Tangentenviereck (Summe der Gegenseitenlängen)

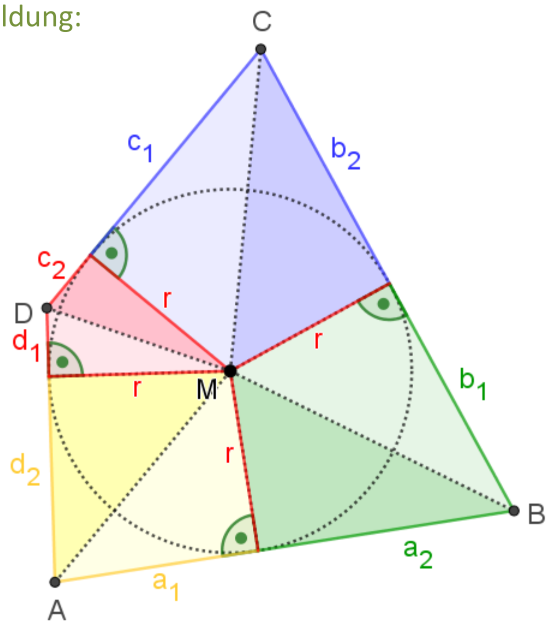
In einem Tangentenviereck sind die Summen der Gegenseiten gleich. Es gilt: a + c = b + d



Übung 3:

Beweisen Sie obigen Satz.

Tipp: Nutzen Sie folgende Abbildung:

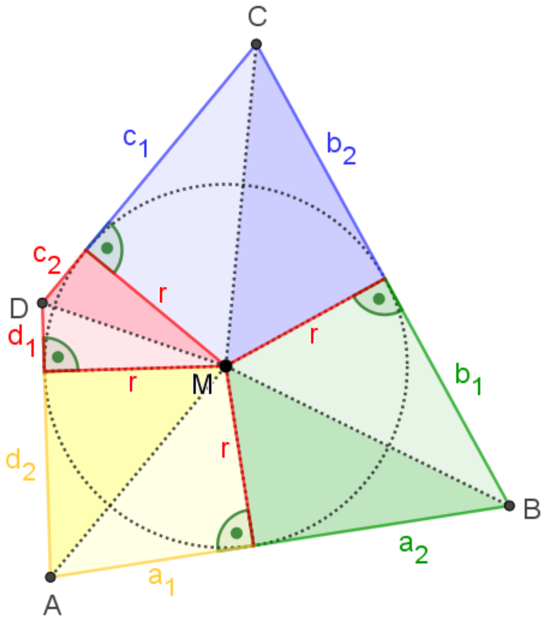


Lösung 3:

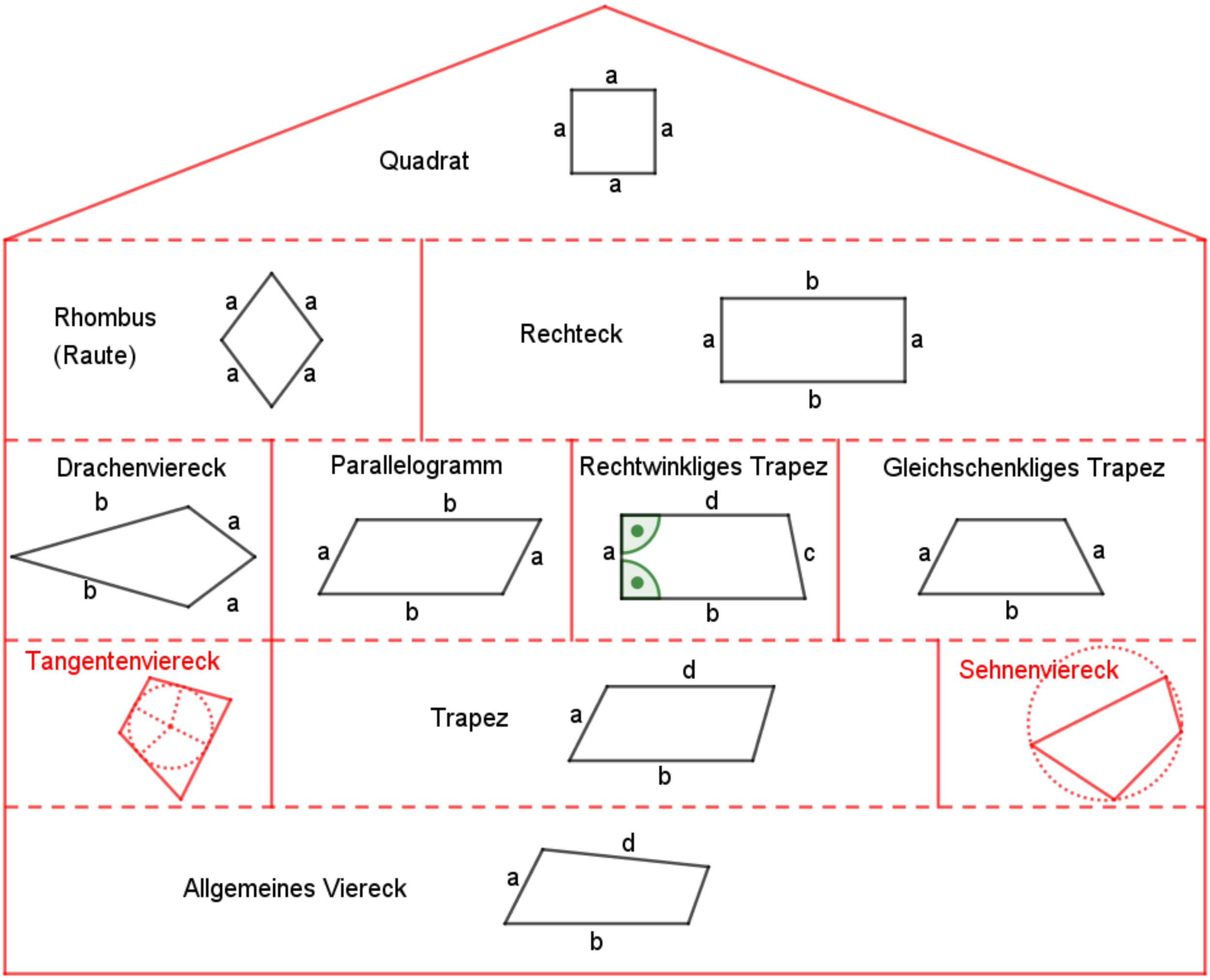
Zu zeigen: $a + c = b + d$

Beweis:

$$\begin{aligned} a + c &= a_1 + a_2 + c_1 + c_2 \\ &= d_2 + b_1 + b_2 + d_1 \\ &= b_1 + b_2 + d_1 + d_2 \\ &= b + d \end{aligned}$$



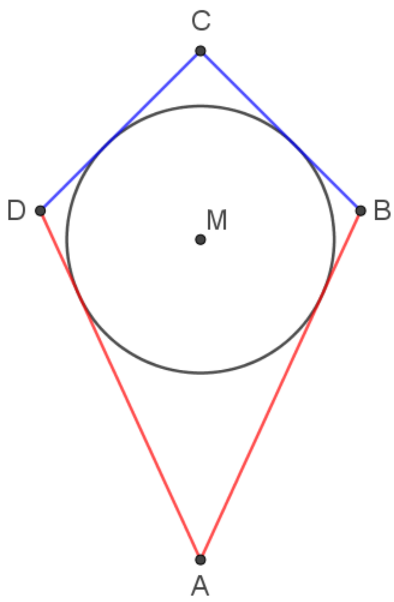
8.18 Haus der Vierecke (mit Tangenten- und Sehnenviereck)



(Vergleiche S. 110)

Übung 1:

Beweisen Sie: Jedes Drachenviereck ist auch ein Tangentenviereck.

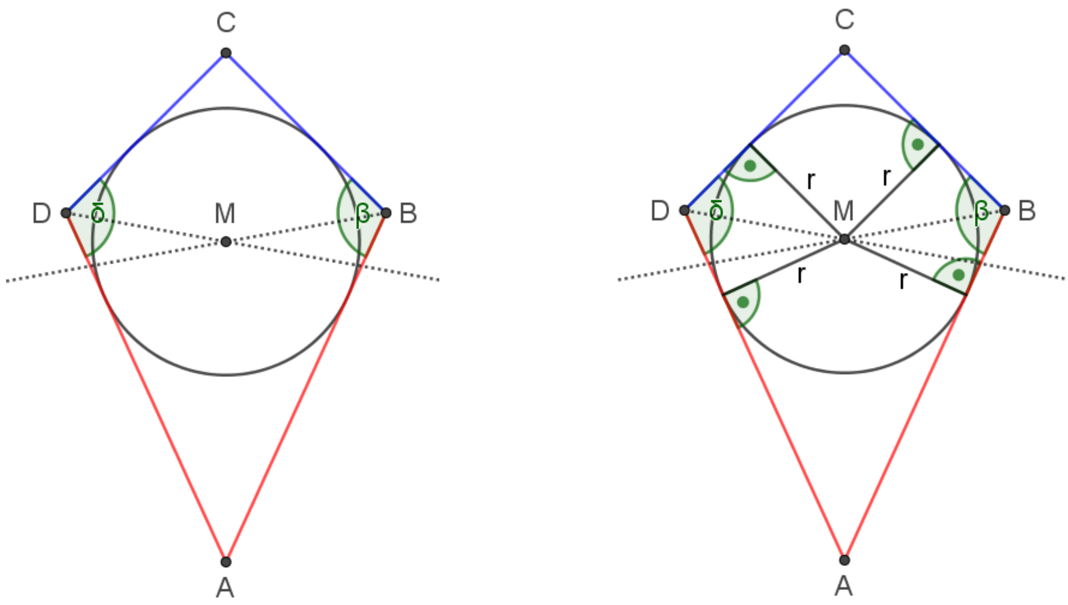


Tipp 1: Erläutern Sie, wie man den Mittelpunkt des Inkreises eines Drachenvierecks findet.

Tipp 2: Welche Eigenschaft muss der Mittelpunkt M besitzen?

Lösung 1:

Der Mittelpunkt M muss zu allen Seiten die gleiche Entfernung besitzen. Diese Eigenschaft besitzt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden (siehe auch S. 35) von β und δ.

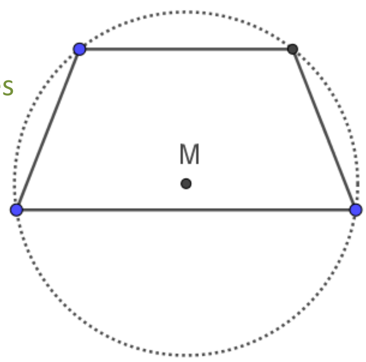


Somit ist jedes Drachenviereck auch ein Tangentenviereck.

Übung 2:

Beweisen Sie: Jedes gleichschenklige Trapez ist auch ein Sehnenviereck.

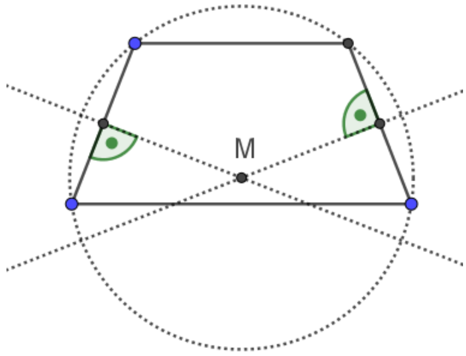
Tipp 1: Erläutern Sie, wie man den Mittelpunkt M des Außenkreises eines gleichschenkligen Trapezes findet.



Tipp 2: Welche Eigenschaft muss der Mittelpunkt M besitzen?

Lösung 2:

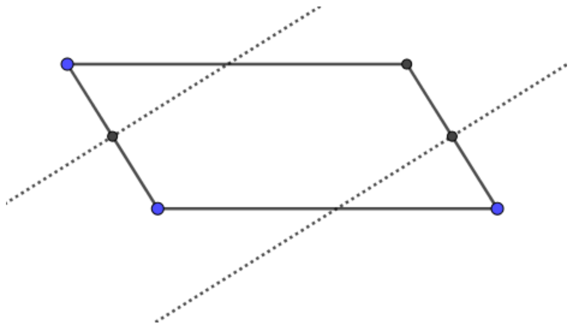
Der Mittelpunkt M muss zu allen Eckpunkten die gleiche Entfernung haben. Diese Eigenschaft erfüllt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (siehe auch S. 33).



Da man zu jedem gleichschenkligen Trapez einen Umkreis konstruieren kann, ist es auch immer ein Sehnenviereck.

Hinweis:

Ein Parallelogramm ist in diesem Sinne kein gleichschenkliges Trapez, da sich hier die Mittelsenkrechten nicht schneiden:



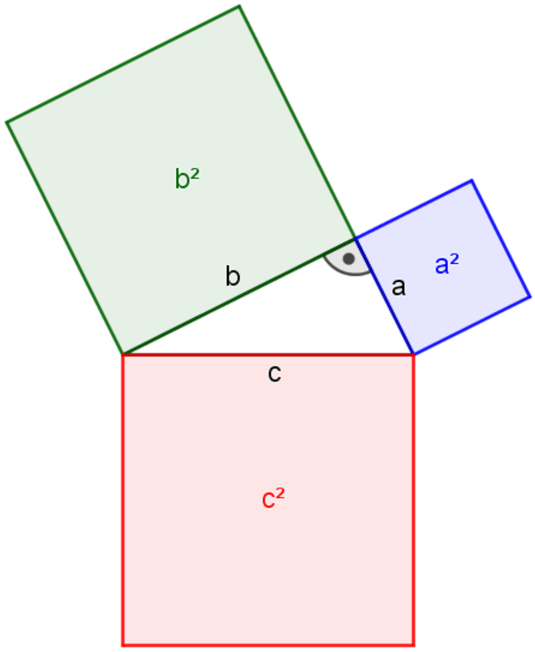
9 Satzgruppe des Pythagoras

9.1 Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächen der Quadrate über den Katheten gleich der Fläche des Quadrats über der Hypotenuse. Wenn c die Hypotenuse bezeichnet, gilt also

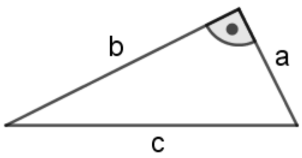
$$c^2 = a^2 + b^2$$

[106]



Übung 1:

Gegeben sei folgendes Dreieck:

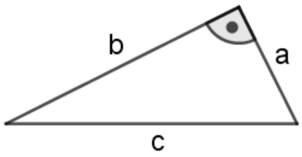


a = 1 cm
b = 2 cm

Berechnen Sie die Länge der Seite c.

[106] Warmuth, E.: 9.7. Satzgruppe des Pythagoras, 2020, S. 3

Lösung 1:



Da c die Hypotenuse ist, gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow^{107} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

Die Länge der Seite c beträgt ungefähr 2,24 cm.

Hinweis:

Ein häufiger Fehler in der Schule ist dieser:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad | \sqrt{}$$

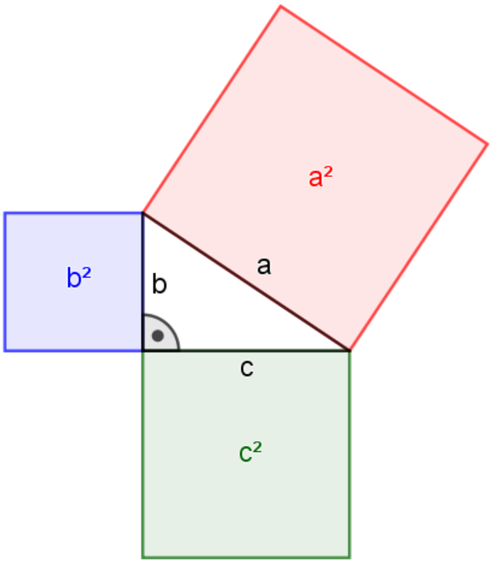
$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{c = a + b}$$

$$\Rightarrow \quad c = 1 + 2 = 3$$

Übung 2:

Gegeben sei folgende Abbildung:



$a^2 = 13\ cm^2$

$b = 2\ cm$

Berechnen Sie die Länge der Seite c.

[107] Die Lösung $c = -\sqrt{a^2 + b^2}$ kann man hier vernachlässigen, weil die Länger der Seite c nicht negativ sein kann.

Lösung 2:

Da a die Hypotenuse ist, gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad | - b^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - b^2 = c^2 \qquad | \sqrt{}$$

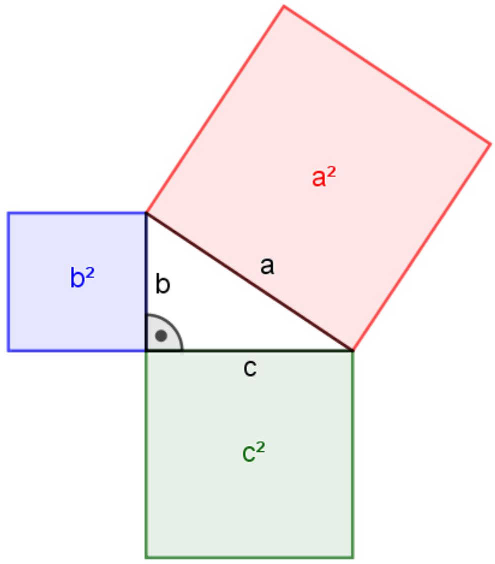
$$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2 - b^2} = c$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{13cm^2 - (2cm)^2} = c$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{13cm^2 - 4cm^2} = c$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{9cm^2} = c$$

$$\Rightarrow \quad 3cm = c$$



Die Länge der Seite c beträgt 3 cm.

Hinweis:

Ein häufiger Fehler in der Schule ist dieser:

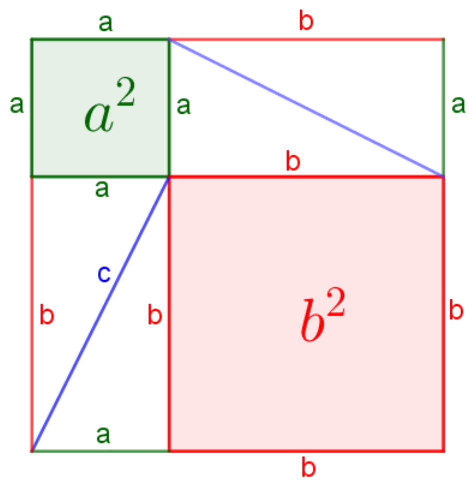
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

Diese Gleichung gilt nur im *rechtwinkligen* Dreieck, wenn die *Seite c die Hypotenuse* ist.

9.1.1 Beweis des Satzes des Pythagoras (altindischer Ergänzungsbeweis)

Übung 3:

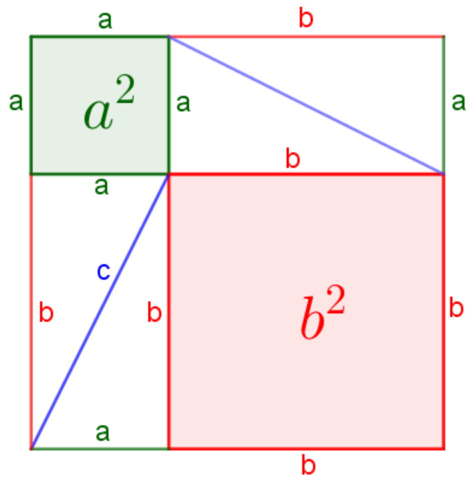
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des großen Quadrats.



Lösung 3:

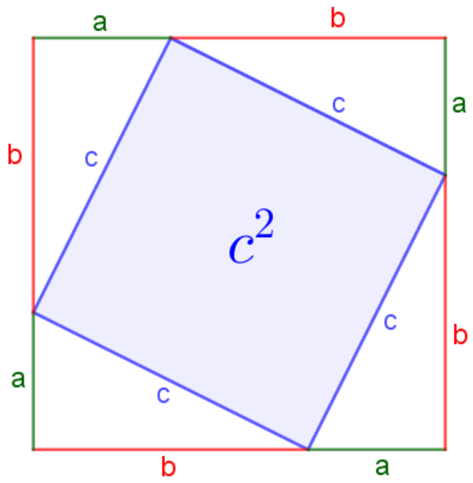
Der Flächeninhalt beträgt:

$(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Übung 4:

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des großen Quadrats.



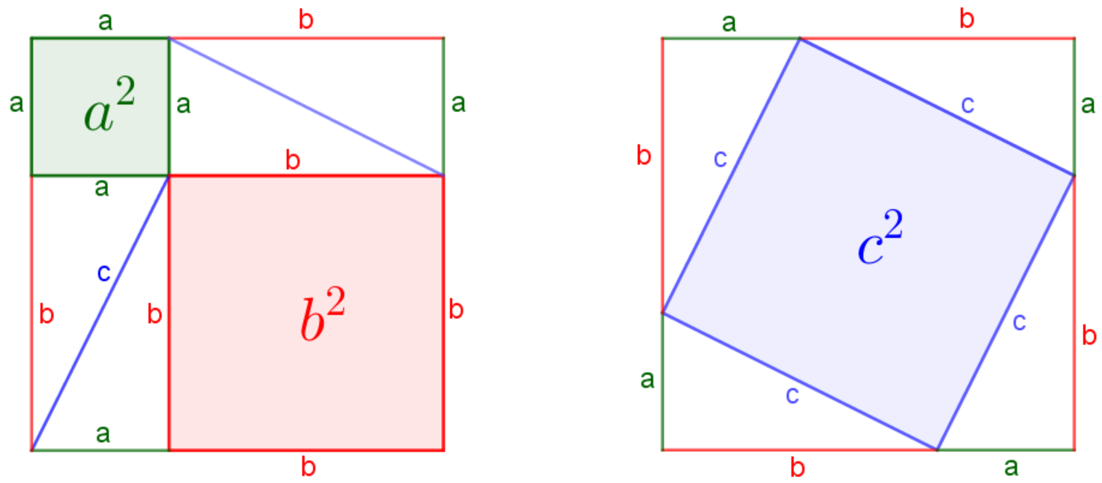
Lösung 4:

Der Flächeninhalt beträgt:

$(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Übung 5:

Beweisen Sie mit Hilfe der beiden Abbildungen den Satz des Pythagoras.



Lösung 5:

Beide Quadrate besitzen (wie oben gezeigt) den Flächeninhalt $a^2 + 2ab + b^2$.

Den Flächeninhalt des rechten Quadrats kann man jedoch auch folgendermaßen darstellen:

$$c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = c^2 + 2ab$$

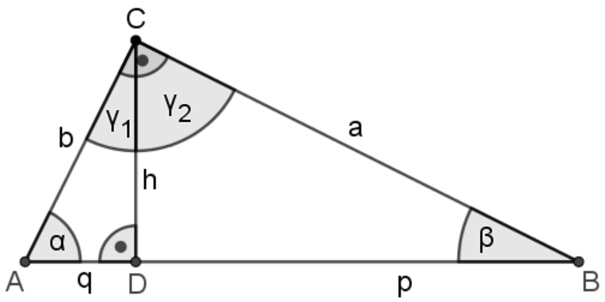
Nun setzt man beide Flächeninhalte gleich:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad |{-2ab}$$

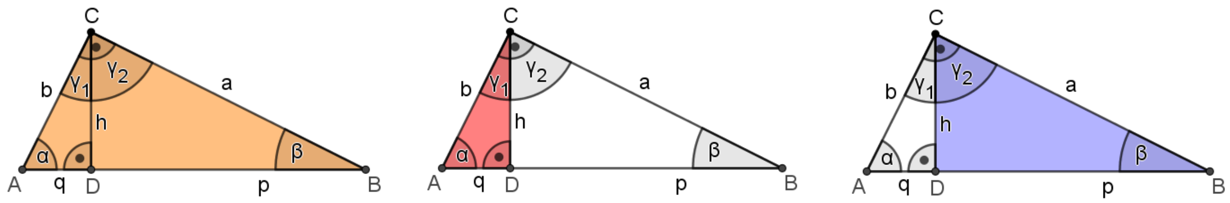
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

9.1.2 Beweis des Satzes des Pythagoras (Ähnlichkeitsbeweis)

Man betrachte das rechtwinklige Dreieck △ABC. Es gelte $c = q + p$.



Die Dreiecke △ABC, △CAD und △BCD sind ähnlich: △ABC ~ △CAD ~ △BCD.

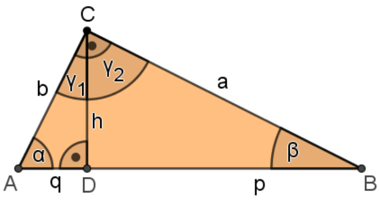


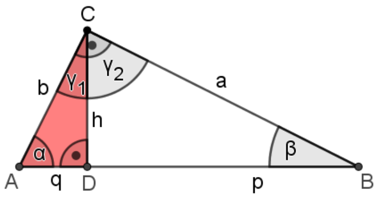
Übung 1: Begründen Sie, warum die Dreiecke ähnlich sind.

Lösung 1:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen (siehe S. 83).

Man betrachte die Dreiecke △ABC und △ADC:

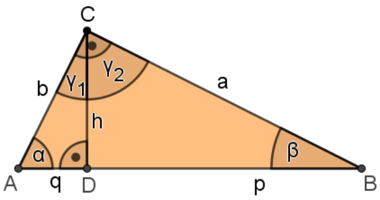


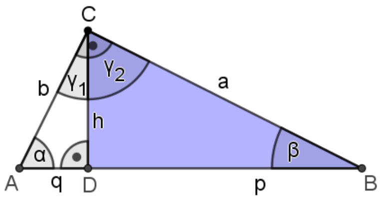


Sie besitzen beide einen rechten Winkel und den davon verschiedenen Winkel α. Also gilt:

$$\triangle ABC \sim \triangle CAD$$

Man betrachte die Dreiecke △ABC und △BCD:





Sie besitzen beide einen rechten Winkel und den davon verschiedenen Winkel β. Also gilt:

$$\triangle ABC \sim \triangle BCD$$

Es gilt: $(\triangle ABC \sim \triangle CAD) \wedge (\triangle ABC \sim \triangle BCD) \Rightarrow (\triangle CAD \sim \triangle BCD)$

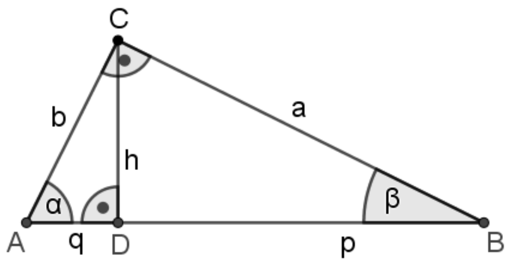
Demnach sind alle drei betrachteten Dreiecke ähnlich.

Übung 2: Betrachten Sie die Abbildung.

Die Dreiecke △ABC, △CAD und △BCD sind ähnlich.

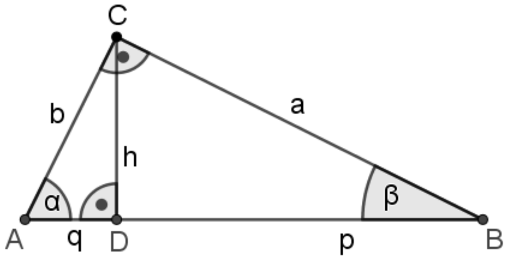
Beweisen Sie den Satz des Pythagoras mit Hilfe der Ähnlichkeit. Nutzen Sie folgende Tabelle[108]:

	$\triangle ABC$	$\triangle BCD$	$\triangle CAD$
Hypotenuse	c	a	b
Kathete mit α, 90°	b	h	q
Kathete mit β, 90°	a	p	h



[108] Warmuth, E.: 9.7. Satzgruppe des Pythagoras, 2020, S. 7

Lösung 2:



	$\triangle ABC$	$\triangle BCD$	$\triangle CAD$
Hypotenuse	c	a	b
Kathete mit α, 90°	b	h	q
Kathete mit β, 90°	a	p	h

Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn Sie im Verhältnis entsprechender Seiten übereinstimmen (siehe S. 84).

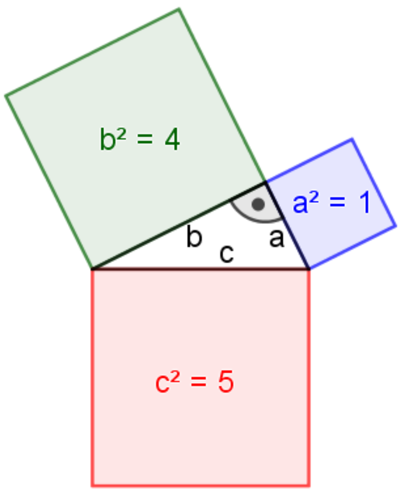
Es folgt:

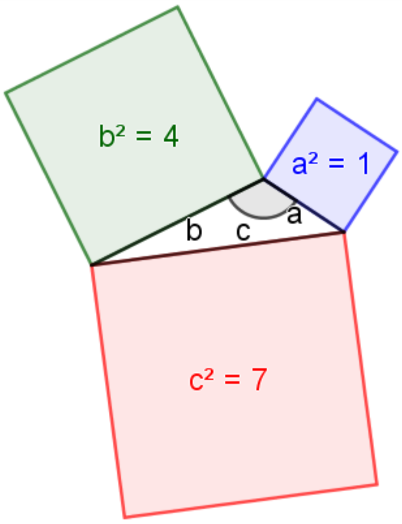
$$c : a = a : p \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = p \cdot c$$
$$c : b = b : q \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = q \cdot c$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (p + q) \cdot c = c^2.$$

[109]

9.2 Umkehrung des Satzes des Pythagoras

Gilt für die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so liegt der Seite c ein rechter Winkel gegenüber. [110]





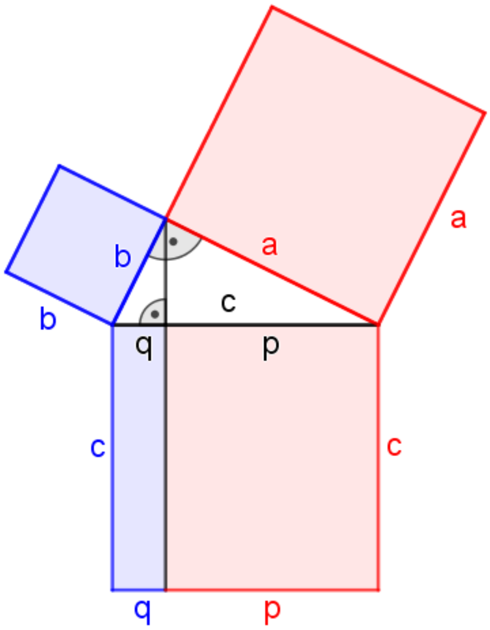
[109] Warmuth, E.: 9.7. Satzgruppe des Pythagoras, 2020, S. 7
[110] Warmuth, E.: 9.7. Satzgruppe des Pythagoras, 2020, S. 11

9.3 Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete inhaltsgleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem dieser Kathete anliegenden Hypothenusenabschnitt. Wenn c die Hypotenuse bezeichnet, gilt also

$$a^2 = p \cdot c \text{ bzw. } b^2 = q \cdot c.$$

[111]



Übung 1:

Beweisen Sie den Kathetensatz.

Lösung 1:

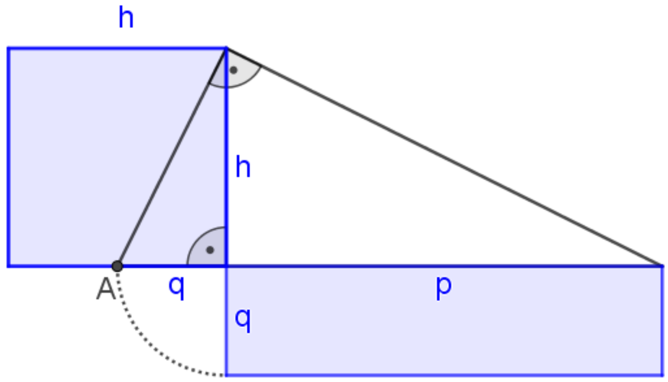
Der Beweis wurde bereits beim Ähnlichkeitsbeweis des Satzes des Pythagoras erbracht (S. 151).

[111] Warmuth, E.: 9.7. Satzgruppe des Pythagoras, 2020, S. 8

9.4 Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe h inhaltsgleich dem Rechteck aus den beiden Hypothenusenabschnitten p und q. Es gilt also

$$h^2 = p \cdot q.$$



[112]

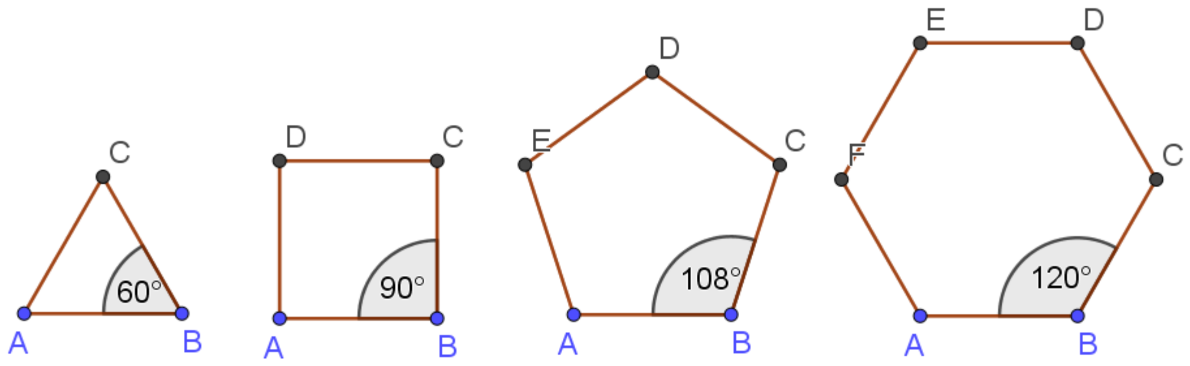
[112] Warmuth, E.: 9.7. Satzgruppe des Pythagoras, 2020, S. 9

10 Übungsaufgaben

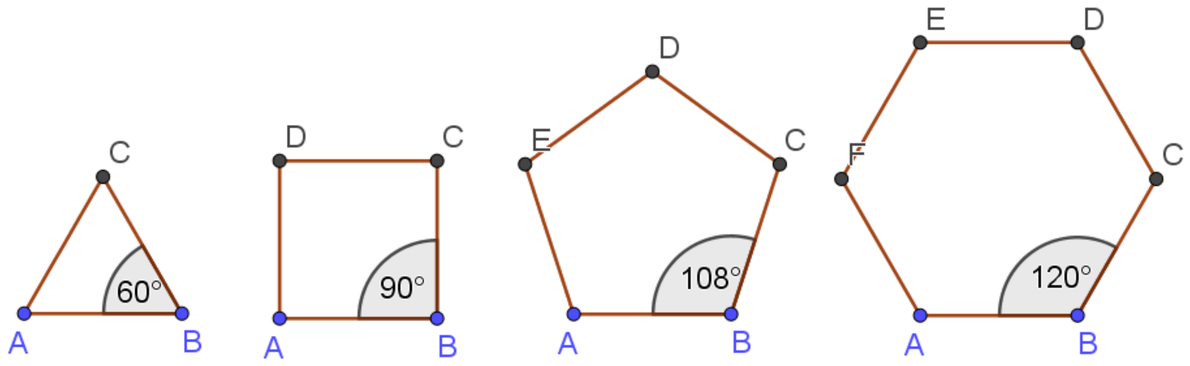
10.1 Innenwinkelsumme und Innenwinkelgröße im regelmäßigen n-Eck

Übung 1:

Bestimmen Sie jeweils die Innenwinkelsumme eines regelmäßigen 3-, 4-, 5- und 6-Ecks:



Lösung 1:



Die jeweilige Innenwinkelsumme beträgt:

3-Eck: $3 \cdot 60° = 180°$

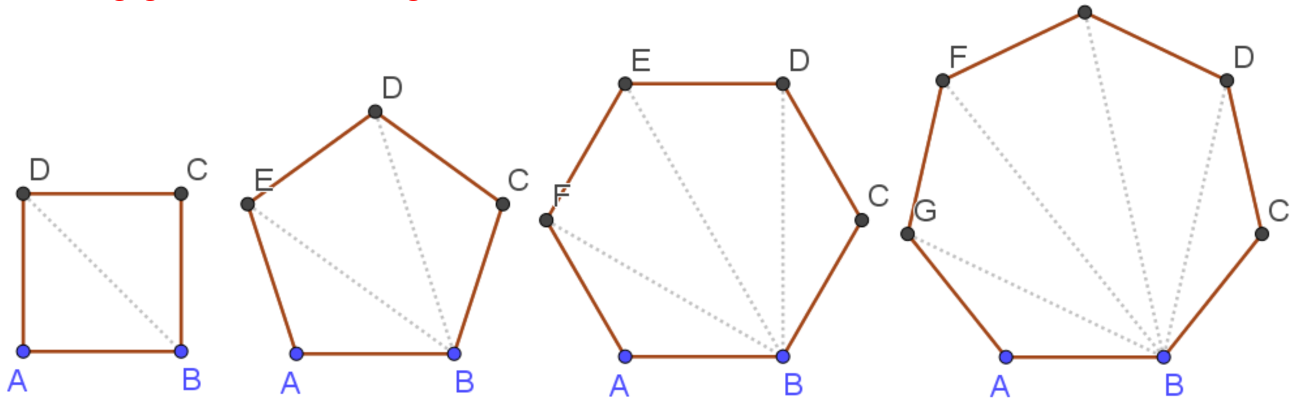
4-Eck: $4 \cdot 90° = 360°$

5-Eck: $5 \cdot 108° = 540°$

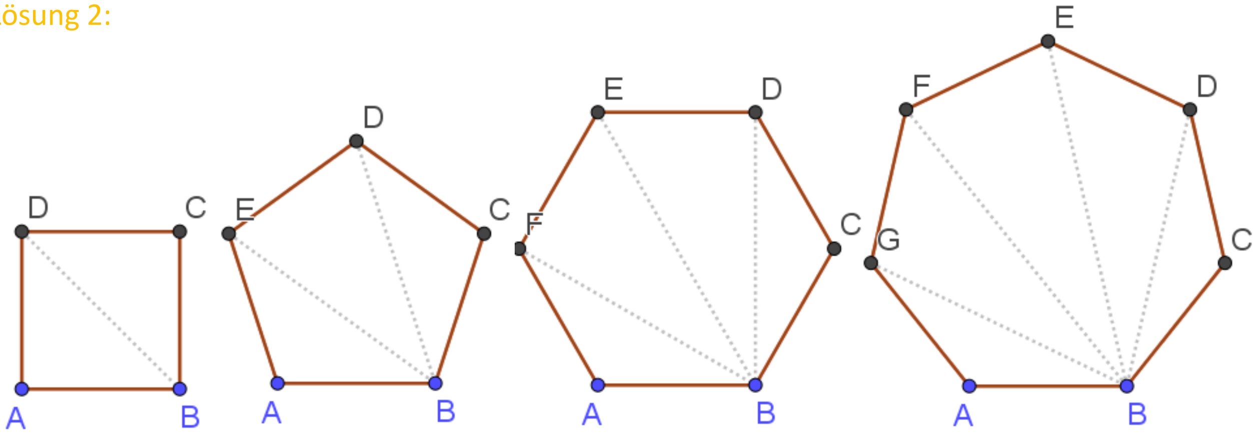
6-Eck: $6 \cdot 120° = 720°$

Übung 2:

Bestimmen Sie jeweils die Innenwinkelsumme eines regelmäßigen 4-, 5-, 6- und 7-Ecks, ohne die oben angegebene Innenwinkelgröße zu benutzen. Beachten Sie die Hilfslinien:



Lösung 2:



Das 4-Eck lässt sich in 2 Dreiecke zerlegen. Die Innenwinkelsumme beträgt also $2 \cdot 180° = 360°$

Das 5-Eck lässt sich in 3 Dreiecke zerlegen. Die Innenwinkelsumme beträgt also $3 \cdot 180° = 540°$

Das 6-Eck lässt sich in 4 Dreiecke zerlegen. Die Innenwinkelsumme beträgt also $4 \cdot 180° = 720°$

Das 7-Eck lässt sich in 5 Dreiecke zerlegen. Die Innenwinkelsumme beträgt also $5 \cdot 180° = 900°$

Übung 3:

Ermitteln Sie eine allgemeine Formel für die Innenwinkelsumme und Innenwinkelgröße im regelmäßigen n-Eck.

Lösung 3:

Ein 4-Eck lässt sich in 2 Dreiecke zerlegen.
Ein 5-Eck lässt sich in 3 Dreiecke zerlegen.
Ein 6-Eck lässt sich in 4 Dreiecke zerlegen.
Ein 7-Eck lässt sich in 5 Dreiecke zerlegen.

⇒ Ein n-Eck lässt sich in $(n-2)$ Dreiecke zerlegen.

⇒ Die Innenwinkelsumme beträgt $(n-2) \cdot 180°$.

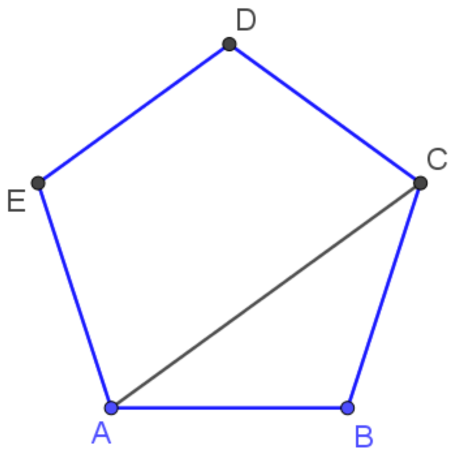
⇒ Die Innenwinkelgröße beträgt $\frac{(\mathrm{n}-2) \cdot 180°}{n}$.

10.2 Diagonale im regelmäßigen 5-Eck

Übung 4:

Beweisen Sie:

In einem regelmäßigen 5-Eck verläuft eine beliebige Diagonale parallel zu einer der 5-Eck-Seiten.



[113]

Tipp 1: Zeichnen Sie Hilfslinien.

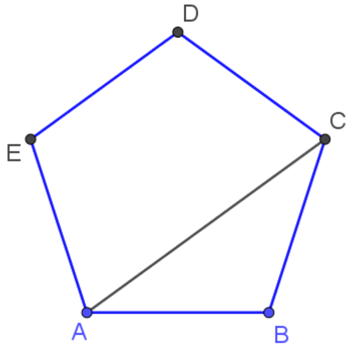
Tipp 2: Nutzen Sie Stufenwinkel.

Tipp 3: Nutzen Sie die Innenwinkelgröße im regelmäßigen 5-Eck.

[113] Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 2

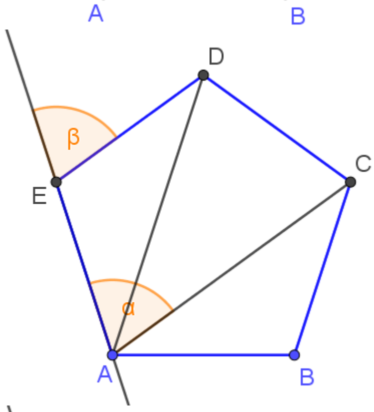
Lösung 4: Beweisen Sie:

In einem regelmäßigen 5-Eck verläuft eine beliebige Diagonale parallel zu einer der 5-Eck-Seiten.



Man zeichne Hilfslinien und Hilfswinkel:

Zu zeigen ist nun, dass die Stufenwinkel α und β kongruent sind, weil man dann weiß, dass die Strecke ED parallel zur Strecke AC ist (siehe Stufenwinkel, S. 17).

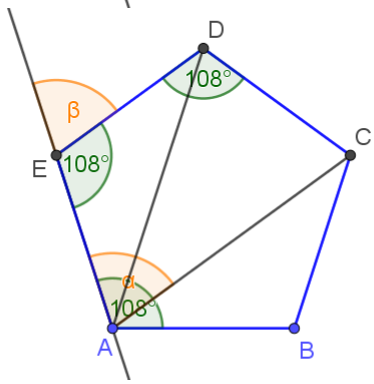


Beweis:

Die Innenwinkelgröße im 5-Eck beträgt 108° (siehe S. 156).

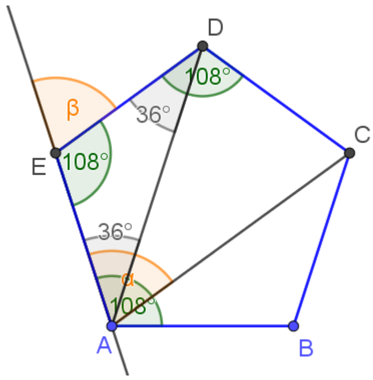
Da sich Nebenwinkel zu 180° ergänzen (siehe S. 11), ist β = 72°.

Es bleibt also zu zeigen, dass α ebenfalls 72° groß ist.



Das Dreieck △ADE ist gleichschenklig (da regelmäßiges 5-Eck).

Aufgrund der Innenwinkelsumme eines Dreiecks sind die Basiswinkel 36° groß.

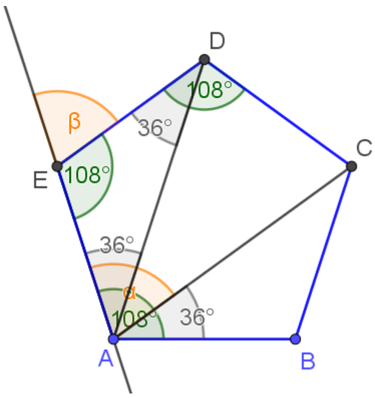


Aus Symmetriegründen beträgt der Winkel ∡BAC ebenfalls 36°.

Nun errechnet man den Winkel α durch

α = 108° - 36° = 72° = β

Es wurde somit gezeigt: α = β



10.3 Halbkreisfigur

Übung 5:

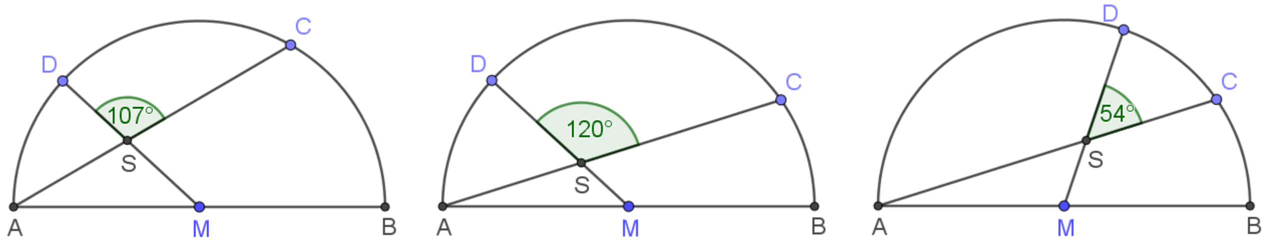
Gegeben seien:

- Mittelpunkt M eines Halbkreises
- Durchmesser AB
- Punkte C und D, welche beide auf dem Halbkreisbogen liegen
- Schnittpunkt S der Strecken MD und AC
- Winkel ∡CSD

Fertigen Sie eine Skizze an. (Eine Konstruktion ist nicht notwendig.)

Lösung 5:

Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B. diese:



Übung 6:

Gegeben seien:

- Mittelpunkt M eines Halbkreises
- Durchmesser AB
- Punkte C und D, welche beide auf dem Halbkreisbogen liegen
- Schnittpunkt S der Strecken MD und AC
- Winkel |∡CSD| = 90°
- Winkel ∡MAC = α
- Winkel ∡DCA = β

Fertigen Sie eine Skizze an. (Eine Konstruktion ist nicht notwendig.)

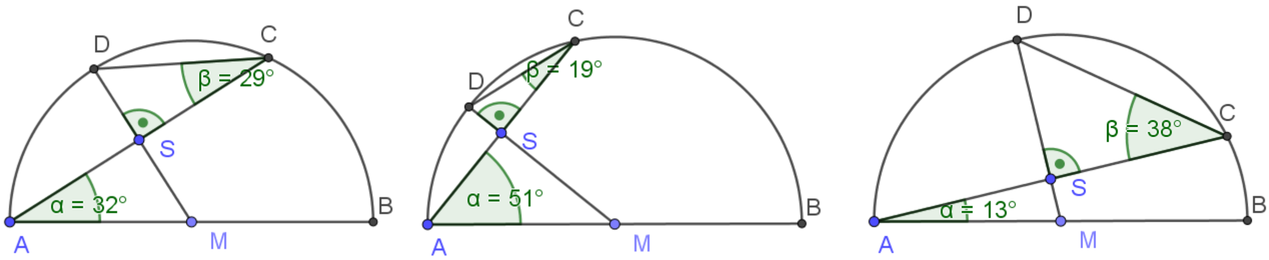
Lösung 6:

Gegeben seien:

- Mittelpunkt M eines Halbkreises
- Durchmesser AB
- Punkte C und D, welche beide auf dem Halbkreisbogen liegen
- Schnittpunkt S der Strecken MD und AC
- Winkel |∡CSD| = 90°
- Winkel ∡MAC = α
- Winkel ∡DCA = β

Fertigen Sie eine Skizze an. (Eine Konstruktion ist nicht notwendig.)

Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B. diese:



Übung 7:

Gegeben seien:

- Mittelpunkt M eines Halbkreises
- Durchmesser AB
- Punkte C und D, welche beide auf dem Halbkreisbogen liegen
- Schnittpunkt S der Strecken MD und AC
- Winkel |∡CSD| = 90°
- Winkel ∡MAC = α
- Winkel ∡DCA = β
- Es gilt: α = β

Fertigen Sie eine Skizze an. (Eine Konstruktion ist nicht notwendig.)

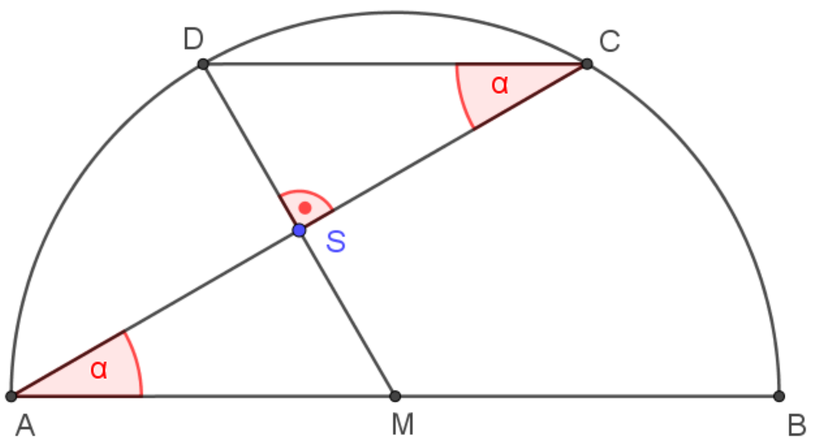
Lösung 7:

Gegeben seien:

- Mittelpunkt M eines Halbkreises
- Durchmesser AB
- Punkte C und D, welche beide auf dem Halbkreisbogen liegen
- Schnittpunkt S der Strecken MD und AC
- Winkel |∡CSD| = 90°
- Winkel ∡MAC = α
- Winkel ∡DCA = β
- Es gilt: α = β

Fertigen Sie eine Skizze an. (Eine Konstruktion ist nicht notwendig.)

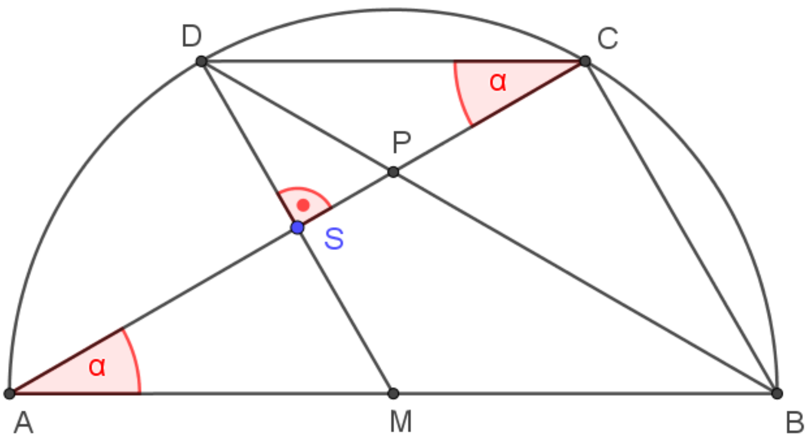
Es gibt nur eine Möglichkeit:



Übung 8:

M ist der Mittelpunkt des Halbkreises über der Strecke AB.

Man betrachte folgende Abbildung:



Aufgaben:

- Berechnen Sie den Winkel α.
- Halbiert die Gerade BD den Winkel ∡CBM?

[114]

Tipps:

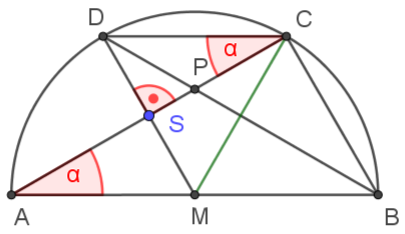
- Zeichnen Sie die Hilfslinie MC ein.
- Finden Sie geometrische Figuren.
- Begründen Sie jede geometrische Figur.

[114] Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 3

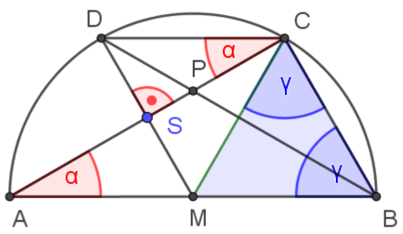
Lösung 8:

Man zeichne die Strecke MC. Es gilt: Für den Radius r gilt:

r = |MC| = |MB| = |MD| = |MA|

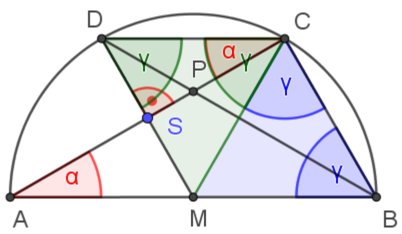


Deswegen ist das Dreieck △MBC gleichschenklig und besitzt zwei kongruente Basiswinkel:



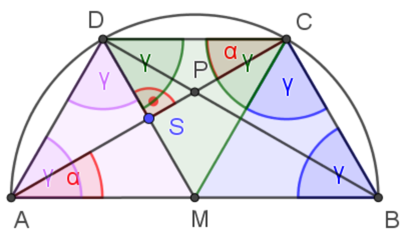
Weiterhin ist das Dreieck △MCD gleichschenklig und besitzt zwei kongruente Basiswinkel:

Da beide Dreiecke die gleiche Schenkellänge r besitzen, sind alle vier Basiswinkel kongruent.

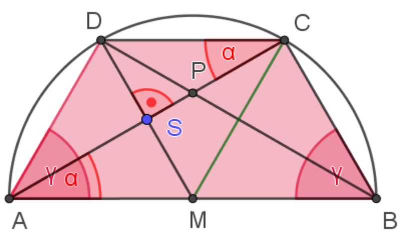


Gleiches gilt für das Dreieck △MDA:

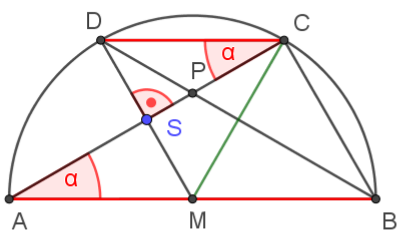
Da man den jeweils dritten Winkel über die Innenwinkelsumme berechnen kann, sind nach wsw alle drei Dreiecke kongruent.



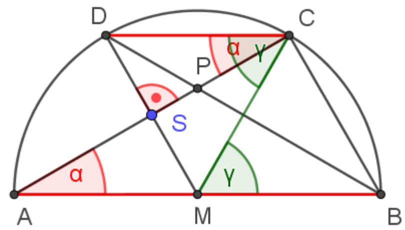
Man erkennt nun weiterhin, dass das Trapez ABCD gleichschenklig ist, da es zwei kongruente Basiswinkel besitzt:



Die Strecken AB und DC sind parallel, da die Wechselwinkel kongruent sind:

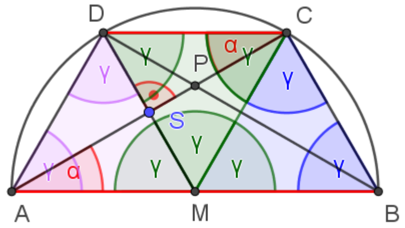


Da die Strecken AB und DC parallel sind, sind die Wechselwinkel ∡DCM und ∡BMC kongruent:



Da die gleichschenkligen Dreiecke △MBC, △MCD und △MDA kongruent sind, besitzen sie alle den gleichen Winkel γ an der Spitze und da sie somit gleichwinklig sind, sind sie auch gleichseitig:

Es gilt: $3 \cdot \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 60°$



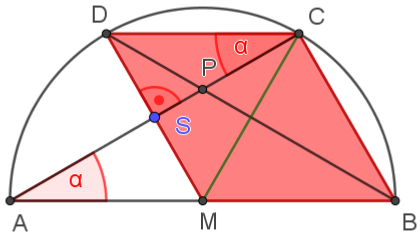
Das Viereck AMCD ist eine Raute (Rhombus), da es vier gleichlange Seiten besitzt (siehe 1. Rhombus-Kriterium, S. 104). In einer Raute (Rhombus) sind die Diagonalen Winkelhalbierende (siehe 3. Rhombus-Kriterium, S. 108). Somit gilt:

$\alpha = \gamma : 2 = 30°$

(Antwort auf die erste Frage)

Da das Viereck MBCD ebenfalls eine Raute ist, halbiert die Gerade BD den Winkel ∡CBM.

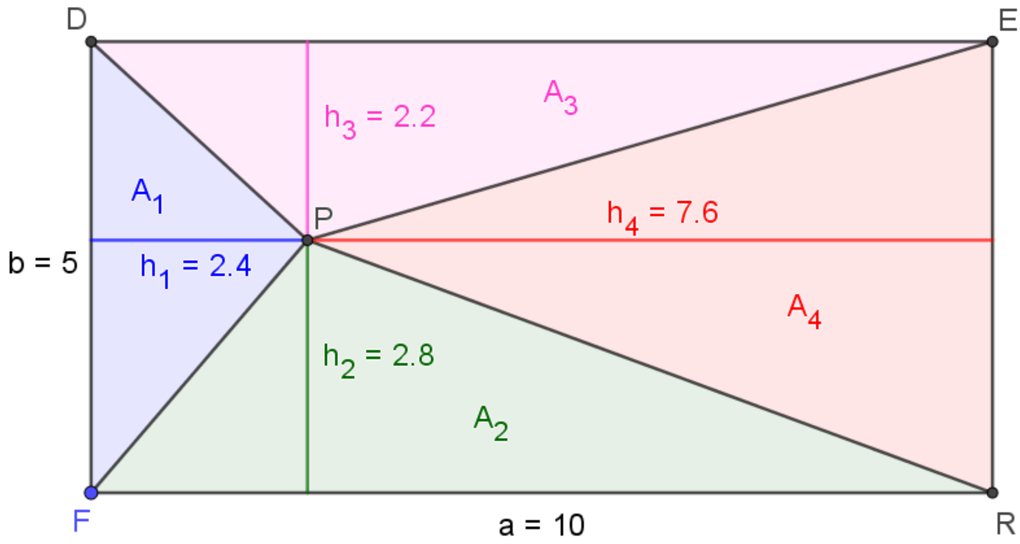
(Antwort auf die zweite Frage)



10.4 Anteil an der Rechtecksfläche

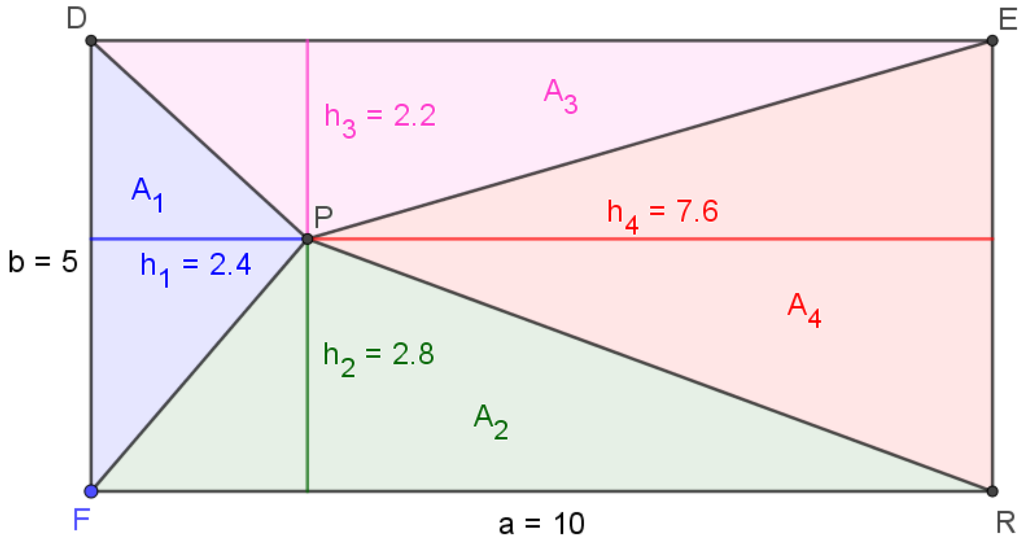
Übung 9:

Berechnen Sie die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_4 der Dreiecke.



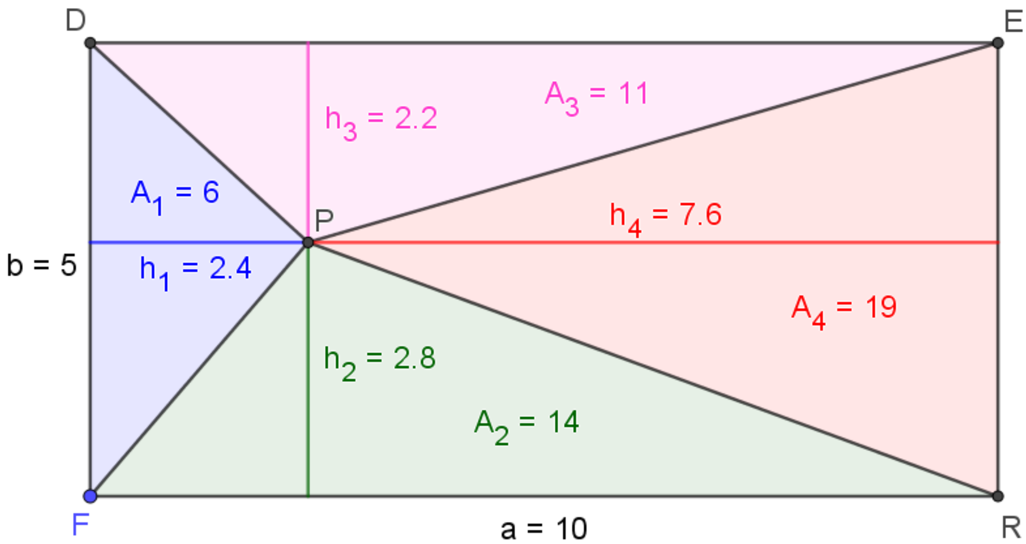
Lösung 9:

Berechnen Sie die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_4 der Dreiecke.



Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich durch $\frac{Grundseite \cdot Höhe}{2}$ (siehe S. 64).

Es ergibt sich:

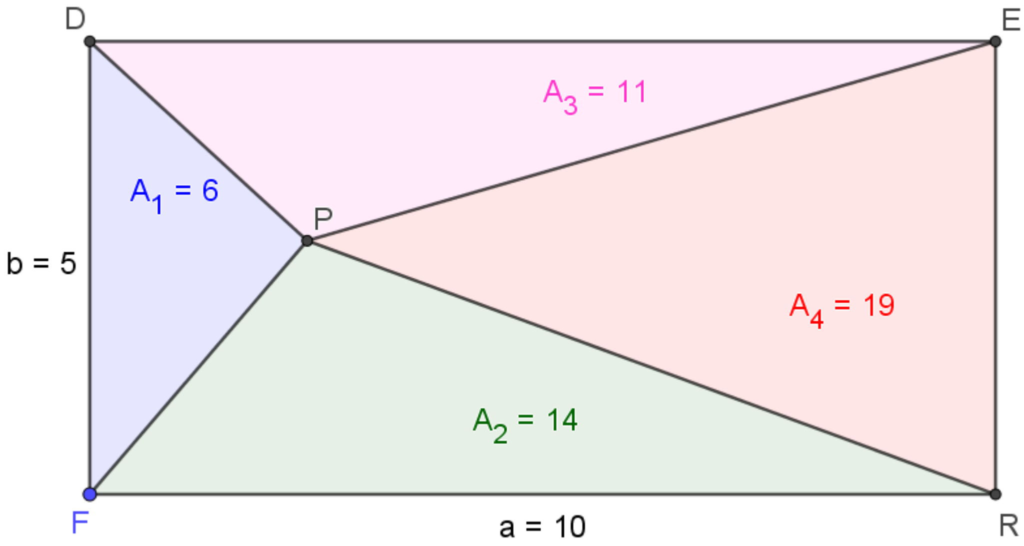


Übung 10:

In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte A_1 und A_2, A_2 und A_3 sowie A_1 und A_4 zueinander?

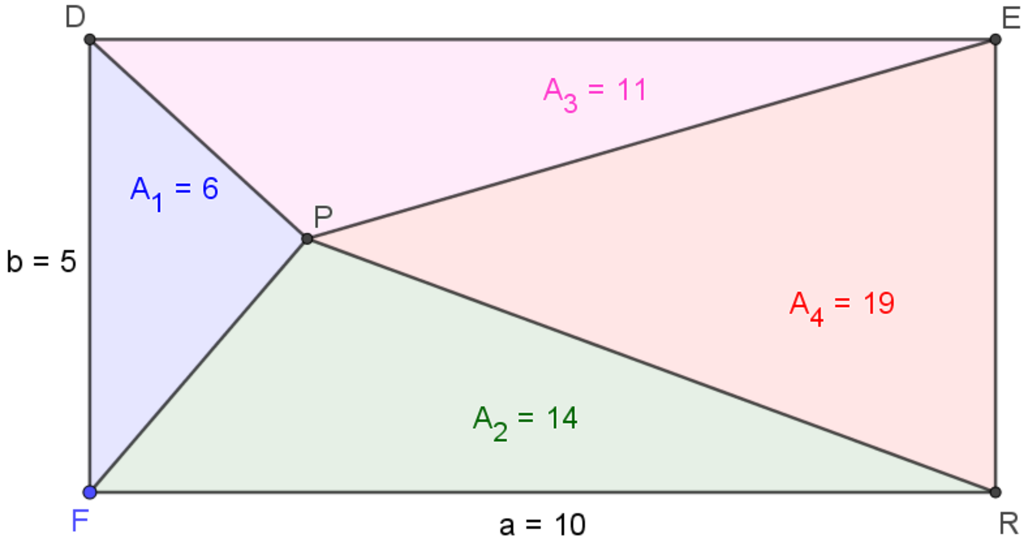
Wie verhalten sich A_1, A_2, A_3 und A_4 zueinander?

Wie groß ist der Flächeninhalt A des Rechtecks?



Lösung 10:

In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte A_1 und A_2, A_2 und A_3 sowie A_1 und A_4 zueinander?



$A_1 : A_2 = 6 : 14 = 3 : 7$

$A_2 : A_3 = 14 : 11$

$A_1 : A_4 = 6 : 19$

Wie verhalten sich A_1, A_2, A_3 und A_4 zueinander?

A_1, A_2, A_3 und A_4 verhalten sich wie $6 : 14 : 11 : 19$.

Wie groß ist der Flächeninhalt A des Rechtecks?

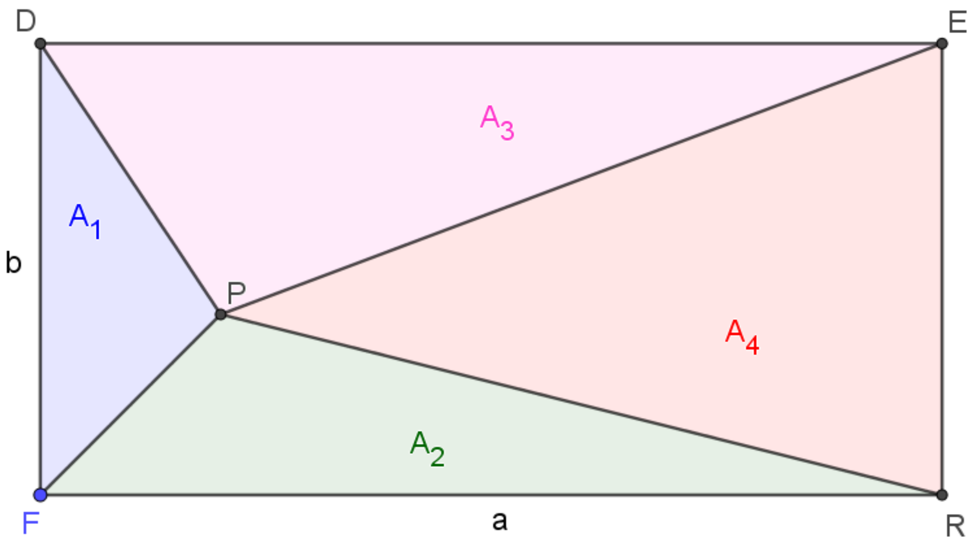
$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 6 + 14 + 11 + 19 = 50$ [FE] [115] bzw. $A = 5 \cdot 10 = 50$ [FE]

[115] [FE] steht für Flächeneinheiten. Dies ist eine Schreibweise, wenn die Rechnung ohne Einheiten ausgeführt wurde.

Übung 11:

♣ 2. Im Rechteck *FRED* mit den Seiten $a = FR$ und $b = FD$ wird ein Punkt P so gewählt, dass die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle PDF$, $\triangle PFR$ und $\triangle PED$ sich wie 1 : 2 : 3 verhalten. Welchen Anteil hat das Dreieck $\triangle PRE$ an der Rechtecksfläche?

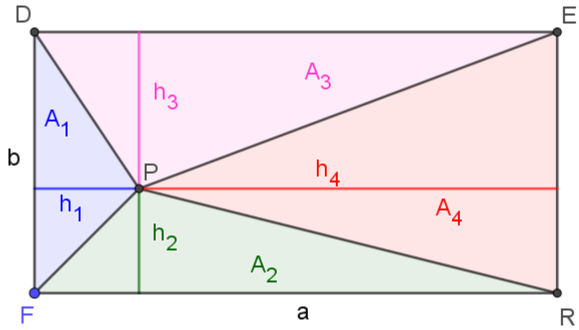
[116]



[116] Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 5

Lösung 11:

♣ 2. Im Rechteck $FRED$ mit den Seiten $a = FR$ und $b = FD$ wird ein Punkt P so gewählt, dass die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle PDF$, $\triangle PFR$ und $\triangle PED$ sich wie 1 : 2 : 3 verhalten. Welchen Anteil hat das Dreieck $\triangle PRE$ an der Rechtecksfläche?[117]



Man zeichne Hilfslinien (die Höhen). Es gilt:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{b\cdot h_1}{2}}{\frac{a\cdot h_2}{2}} = \frac{b\cdot h_1}{a\cdot h_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{\frac{b\cdot h_1}{2}}{\frac{a\cdot h_3}{2}} = \frac{b\cdot h_1}{a\cdot h_3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{\frac{a\cdot h_2}{2}}{\frac{a\cdot h_3}{2}} = \frac{a\cdot h_2}{a\cdot h_3} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{2}{3} h_3$$

Weiterhin gilt:

$$h_2 + h_3 = b$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} h_3 + h_3 = b \;\Rightarrow\; \frac{5}{3} h_3 = b \qquad \Rightarrow h_3 = \frac{3}{5} b$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{2}{5} b$$

Man versucht nun, h_1 in Abhängigkeit von a auszudrücken:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{b\cdot h_1}{2}}{\frac{a\cdot h_2}{2}} = \frac{\frac{b\cdot h_1}{2}}{\frac{a\cdot \frac{2}{5}\cdot b}{2}} = \frac{\frac{b\cdot h_1}{2}}{a\cdot \frac{2}{5\cdot 2}\cdot b} = \frac{\frac{b\cdot h_1}{2}}{a\cdot \frac{1}{5\cdot 1}\cdot b} = \frac{5\cdot b\cdot h_1}{2a\cdot b} = \frac{5\cdot h_1}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{1}{5} a$$

Weiterhin gilt:

$$h_1 + h_4 = a \qquad \Rightarrow h_4 = \frac{4}{5} a$$

Der Flächeninhalt A_4 des Dreiecks $\triangle$PRE lässt sich berechnen durch:

$$A_4 = \frac{b\cdot h_4}{2} = \frac{b\cdot \frac{4}{5}a}{2} = b\cdot \frac{4}{5\cdot 2} a = b\cdot \frac{2}{5} a = \frac{2}{5} ab$$

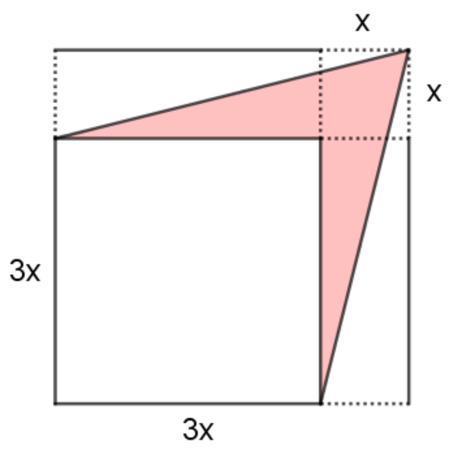
Der Anteil des Dreiecks $\triangle$PRE an der Rechtecksfläche beträgt $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 40\%$.

[117] Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 5

10.5 Flächeninhalt einer Teilfigur eines Quadrats

Übung 12:

Wie groß ist der Flächeninhalt der roten Fläche?



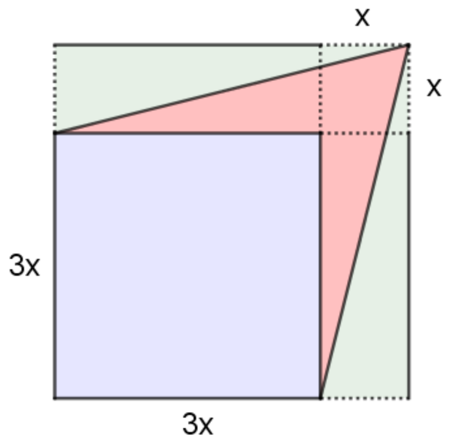
[118]

Tipp: Betrachten Sie Teilflächen.

[118] Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 6

Lösung 12:

Wie groß ist der Flächeninhalt der roten Fläche?



Sei A der Flächeninhalt der gesamten Figur:

$A = (3x + x) \cdot (3x + x) = 4x \cdot 4x = 16x^2$

Der Flächeninhalt A_D eines grünen Dreiecks beträgt:

$A_D = \frac{(3x+x) \cdot x}{2} = \frac{4x^2}{2} = 2x^2$

Der Flächeninhalt A_Q der blauen Figur beträgt:

$A_Q = 3x \cdot 3x = 9x^2$

Der Flächeninhalt A_{Pfeil} der roten Figur berechnet sich durch:

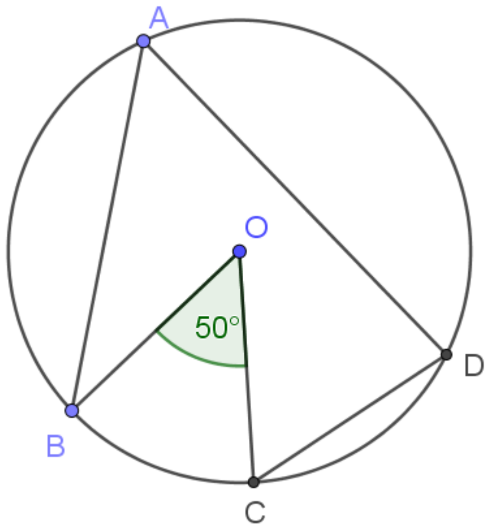
$A_{Pfeil} = A - 2A_D - A_Q = 16x^2 - 4x^2 - 9x^2 = 3x^2$

10.6 Winkel in Kreisfigur

Übung 13:

Auf einem Kreis mit Mittelpunkt O liegen die vier Punkte A, B, C und D.
Dabei gilt: ∡BOC = 50° und |CO| = |CD|

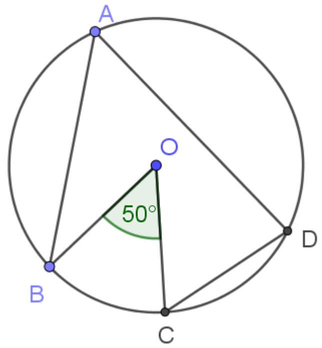
Ermitteln Sie die Größe des Winkels ∡BAD.



119

[119] Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 7

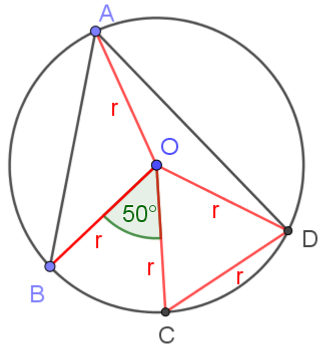
Lösung 13:



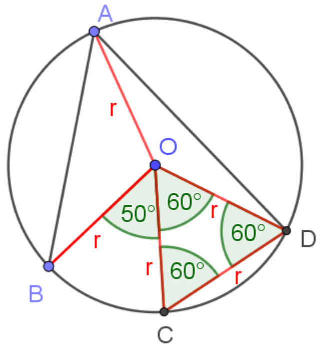
Auf einem Kreis mit Mittelpunkt O liegen die vier Punkte A, B, C und D.
Dabei gilt: ∡BOC = 50° und |CO| = |CD|

Ermitteln Sie die Größe des Winkels ∡BAD.

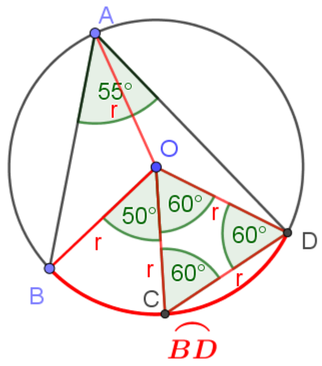
Man zeichne die Radien r:



Das Dreieck △CDO ist gleichseitig. Demnach besitzt es drei 60° - Winkel:



Man betrachte den Kreisbogen $\overset{\frown}{BD}$:



Der Zentriwinkel beträgt 50° + 60° = 110°.

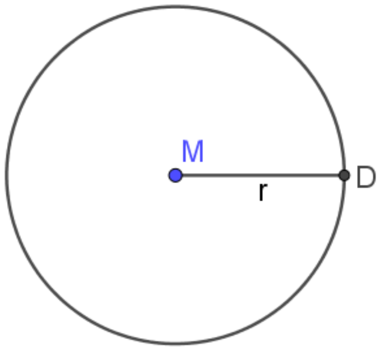
Nach dem Peripheriewinkelsatz (siehe S. 132) ist der Peripheriewinkel ∡BAD halb so groß und beträgt 55°.

10.7 Anteil einer Teilfigur im Sechseck

Übung 14:

Gegeben seien ein Mittelpunkt M eines Kreises, der Radius r und ein Punkt D auf der Kreislinie.

Konstruieren Sie ein regelmäßiges Sechseck.

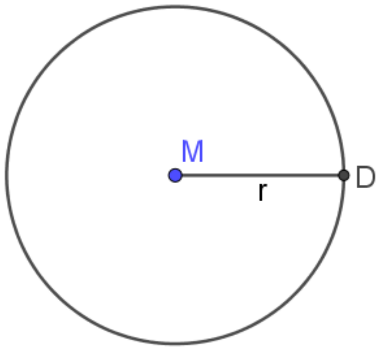


Erläutern Sie kurz Ihre Vorgehensweise.

Lösung 14:

Gegeben seien ein Mittelpunkt M eines Kreises, der Radius r und ein Punkt D auf der Kreislinie.

Konstruieren Sie ein regelmäßiges Sechseck.



Erläutern Sie kurz Ihre Vorgehensweise.

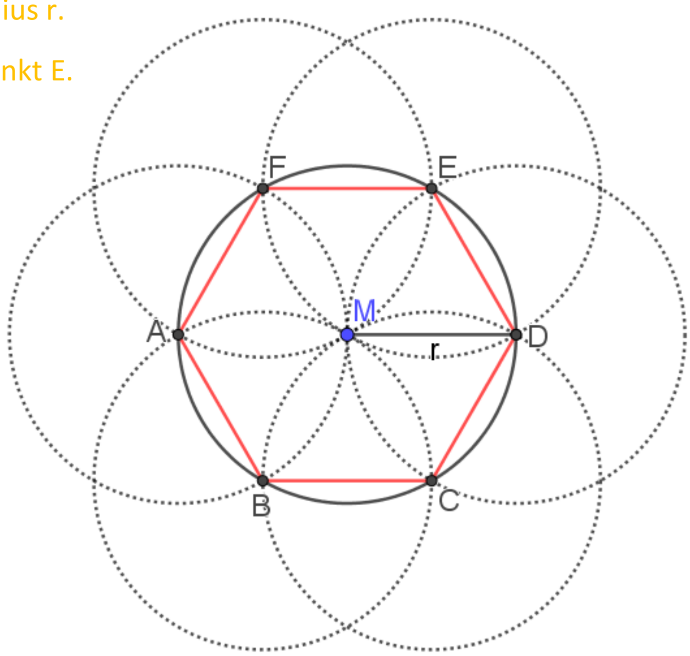
Man zeichnet einen Kreis um D mit dem Radius r.

Der Kreis schneidet den anderen Kreis im Punkt E.

Nun wiederholt man das Vorgehen und

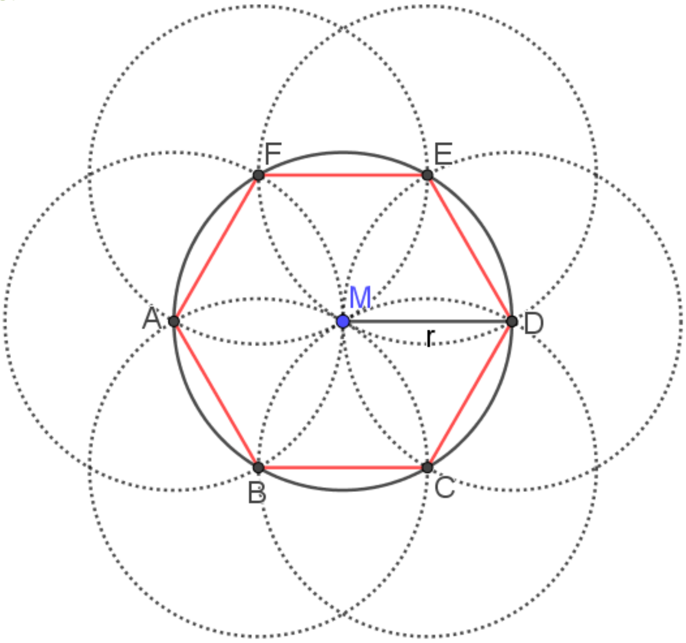
erhält die Punkte F, A, B und C, welche

die Eckpunkte des Sechsecks darstellen.



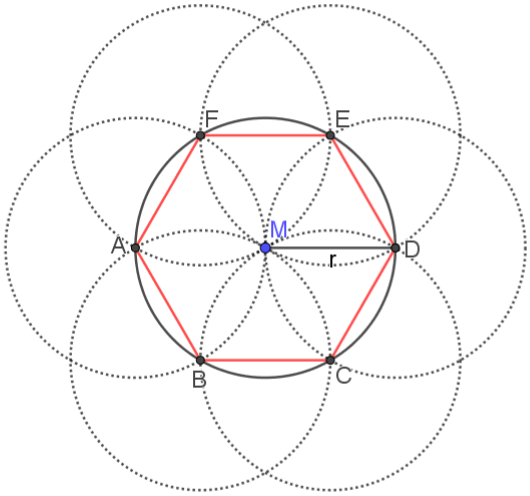
Übung 15:

Begründen Sie, dass bei oben beschriebener Vorgehensweise, der Kreis um C mit dem Radius r durch den Punkt D verläuft.

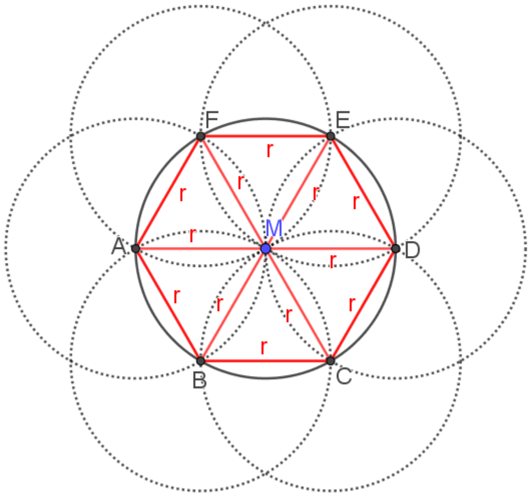


Lösung 15:

Begründen Sie, dass bei oben beschriebener Vorgehensweise, der Kreis um C mit dem Radius r durch den Punkt D verläuft.



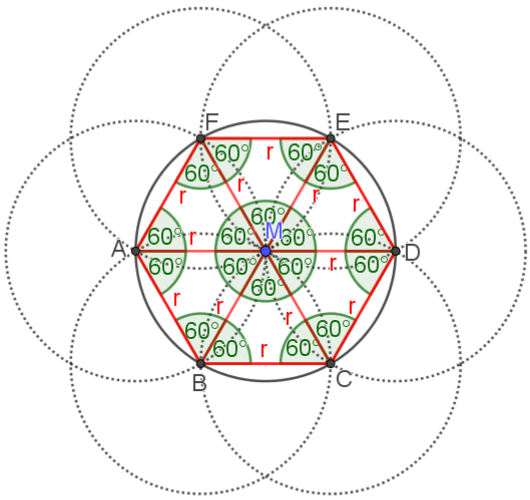
Man zeichne diese Hilfslinien:



Da die roten Dreiecke alle gleichseitig sind, besitzt jedes Dreieck drei 60°-Winkel.

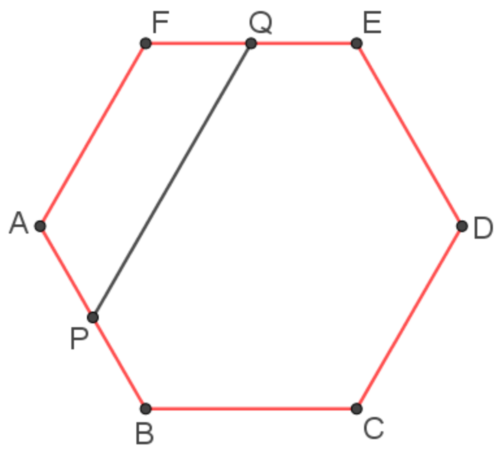
Die Winkel um den Mittelpunkt M betragen insgesamt 6 · 60° = 360°. Das entspricht einem Vollwinkel.

Daher geht der Kreis um den Punkt C durch den Punkt D.



Übung 16:

Das Vieleck ABCDEF sei ein regelmäßiges Sechseck. Die Punkte P und Q seien die Mittelpunkte der Seite AB bzw. EF. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{APQF} : A_{ABCDEF}$.



[120]

Tipps:

Zeichnen Sie die Diagonalen des Sechsecks und weitere Mittelpunkte ein.

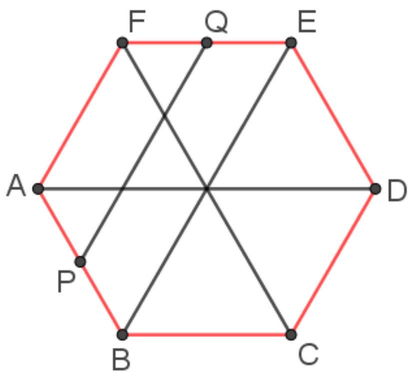
Suchen Sie kongruente Dreiecke.

[120] Warmuth, E.: Komplexe Übungen, 2020, S. 8

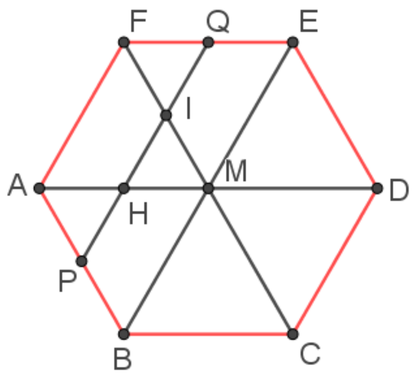
Lösung 16:

Nach Konstruktion (siehe Übung oben) teilen die Diagonalen AD, BE und CF das Sechseck in sechs kongruente und gleichseitige Dreiecke.

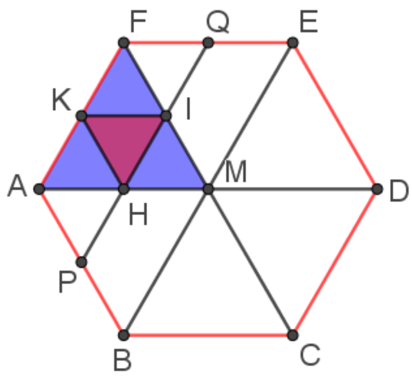
Die Strecke PQ ist die Mittelparallele (siehe S. 39 und S. 48) von AF und BE.



Daher ist H der Mittelpunkt von AM und I der Mittelpunkt von FM.



Man zeichne den Mittelpunkt K von AF. Dann ist △HIK das Seitenmittendreieck (siehe S. 49) von △AMF. Daher ist HI halb so lang wie AF, KH halb so lang wie FM und KI halb so lang wie AM.



Es sind fünf grüne kongruente Dreiecke erkennbar, weil z.B. |FQ| = |FK|.

Analog zeichnet man weitere kongruente Dreiecke und erkennt:

Das Verhältnis von Flächeninhalte A_{APQF} : A_{ABCDEF} beträgt 5 : 24.